Skriptum Lineare Algebra I

Prof. Dr. René Grothmann

Wintersemester 2004/05

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Mathematik **9**

1.1 Einführung 9

1.2 Mathematische Logik 10

1.2.1 Modelle 10

1.2.2 Axiome 11

1.2.3 Sätze 12

1.2.4 Logische Aussagen 13

1.2.5 Definitionen 17

1.2.6 Beweise 18

1.3 Mengen und Abbildungen 22

1.3.1 Mengen 22

1.3.2 Gleichheit von Mengen 24

1.3.3 Potenzmenge 25

1.3.4 Vereinigung und Schnitt 25

1.3.5 Relationen und Abbildungen 29

1.3.6 Bild, Urbild, Umkehrabbildung 31

1.4 Die natürlichen Zahlen 38

1.4.1 Induktion 38

1.4.2 Rekursive Konstruktion 42

1.4.3 Endliche Mengen 44

1.4.4 Abzählbare Mengen 48

1.4.5 Das Auswahlaxiom 50

2 Vektorräume **53**

2.1 Körper . . . 53

2.1.1 Definition, Eigenschaften und Beispiele . . . 53

2.1.2 Die komplexen Zahlen . . . 56

2.2 Vektorräume . . . 58

2.2.1 Definition . . . 58

2.2.2 Beispiele . . . 60

2.2.3 Unterräume . . . 62

2.2.4 Aufgespannter Unterraum . . . 64

2.2.5 Basen . . . 66

2.2.6 Endlich-Dimensionale Vektorräume . . . 70

2.2.7 Summen von Unterräumen . . . 73

2.3 Analytische Geometrie . . . 76

2.3.1 Affine Unterräume . . . 76

2.3.2 Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ . . . 78

2.3.3 Strecken und konvexe Mengen . . . 80

3 Lineare Abbildungen **87**

3.1 Lineare Abbildungen . . . 87

3.1.1 Eigenschaften . . . 87

3.1.2 Dimensionsformel . . . 91

3.1.3 Matrizen . . . 95

3.1.4 Matrizenrechnung . . . 102

3.2 Gleichungssysteme . . . 106

3.2.1 Gaußscher Algorithmus . . . 106

3.2.2 Berechnung von Basen . . . 113

3.2.3 Rang . . . 114

3.2.4 Berechnung der inversen Matrix . . . 115

3.2.5 Basiswechsel . . . 116

3.3 Anwendungen . . . 121

3.3.1 Analytische Geometrie . . . 121

3.3.2 Affine Abbildungen . . . 123

3.3.3 Interpolation . . . 124

4 Das Skalarprodukt **131**

4.1 Skalarprodukte und Normen . . . 131

4.1.1 Skalarprodukte . . . 131

4.1.2 Normen . . . 132

Vorwort

Das Skript

Dieses Skript entstand für eine Vorlesung über „Lineare Algebra und Analytische Geometrie“ im Winter- und Sommersemester 2004/2005 an der Katholischen Universität Eichstätt.

Mit dem Aufkommen der Massenuniversitäten im 19. Jahrhundert etablierte sich der noch heute übliche Stil der Vorlesung mit begleitenden Übungen. In der oft überfüllten Vorlesung trägt der Dozent aus einem vorbereiteten Skript vor. Die Studenten schreiben so weit wie möglich mit und machen sich zusätzliche Notizen. In der Mathematik führt dies dazu, dass der Dozent ein vollständiges Skript an der Tafel entwirft und die Studenten dieses Skript mitschreiben, ohne Zeit zu haben, den Stoff gedanklich zu begleiten. Erst durch eine Nachbereitung (wenn sie erfolgt) und durch das Bearbeiten der Übungen wird der Stoff verstanden. Die offensichtliche Ineffizienz eines bloßen Mitschreibens soll das vorliegende Skript vermeiden helfen. Der Student kann sich auf zusätzliche Notizen beschränken. Er soll damit in die Lage versetzt werden, der Vorlesung zu folgen. Gedankenloses Mitschreiben wird vermieden.

Das Skript soll die Mitschrift des Studenten ersetzen und ihm erlauben, der Vorlesung gedanklich zu folgen.

Natürlich wird es immer Dinge geben, die der Dozent dem Skript hinzufügt. Zum einen geht er vielleicht auf Zwischenfragen ein, zum anderen rechnet er möglicherweise zusätzliche Beispiele vor, oder er fertigt Skizzen an, die nicht im Skript enthalten sind.

Andererseits soll alles, was aus dem Skript behandelt wird, auch an die Tafel geschrieben werden. Ansonsten wird möglicherweise das Tempo zu hoch und es entsteht für den Studenten die Versuchung, ausgelassene Details für unwichtig zu halten.

Ein Skript ist kein Lehrbuch. Lehrbücher unterscheiden sich von Skripten durch längere Texte und durch kürzere Rechnungen. Sie eignen sich nicht als Vorlesungsskripte. Natürlich nimmt man in ein gedrucktes Skript zur Erhöhung der Lesbarkeit auch Texte auf, die der Dozent normalerweise nicht an die Tafel schreibt, sondern nur als Kommentar sagt.

Studium der Mathematik

Während die Schule sich mehr auf Rechentechniken und deren Anwendung konzentriert, steht in der Universität die Abstraktion und das Beweisen im Vordergrund. Dieser Kulturschock ist für die angehenden Mathematiker nur schwer verdaulich.

In Wirklichkeit gibt es aber zahlreiche Überlappungen. Der Dozent der Hochschule sollte sich im Gespräch um das Vorwissen der Studenten bemühen, und die bekannten Dinge zum Stoff in Beziehung setzen. Dadurch entstehen für den Studenten gedankliche Anknüpfungspunkte und er fühlt sich weniger verloren. Leider tendiert auch der Autor dieser Zeilen dazu, den Schulstoff zu sehr zu vernachlässigen. Umgekehrt sollte sich die Schule bemühen, mehr als bisher Beweise und Grundlagen in den Unterricht aufzunehmen. In der Tat gibt es viele Lehrer, die sich dieser Herausforderung bewusst sind.

Man muss sich darüber im Klaren sein, dass das Studium der Mathematik auf verschiedensten Ebenen stattfindet.

- Auf der untersten Sprosse steht das sachliche *Verständnis* der Tatsachen, die in der Vorlesung gelehrt werden. Dies allein ist eine Herausforderung, da die Aussagen logisch verstanden werden müssen, ebenso wie die korrekte Definition der mathematischen Objekte.

- Die direkte *Anwendung* der Vorlesung und der dort vorgestellten Methoden ist der nächste Schritt. Übungen sollten einen großen Anteil an solchen Rechenaufgaben enthalten, ebenso wie die Beispiele der Vorlesung. Die Anwendung der Mathematik ist auch motivationsfördernd.

- Schwieriger ist es schon, *Beweise und Begründungen nachvollziehen* zu können. Es ist aber für einen Mathematiker nicht nur wichtig zu wissen, was gilt, sondern auch warum.

- Der nächste Level ist das *Auffinden eigener Beweise* zu vorgegebenen Zusammenhängen. Knobelaufgaben sind ein wichtiger Bestandteil der Übungen, die sich nicht nur auf Rechenaufgaben konzentrieren dürfen.

- Auf der obersten Sprosse steht das *Entdecken neuer Zusammenhäge*. Dies wird leider zu sehr vernachlässigt, obwohl schon auf niedrigem Niveau neue Fragen aufgeworfen werden könnten. Selbst viele Diplomarbeiten enthalten keine vom Studenten selbst entdeckte und begründete neue Zusammenhänge.

Ziel des Mathematikstudiums sind nicht nur mathematische Sätze, sondern auch Grundlagen, systematisches und logisches Denken, sowie Hartnäckigkeit beim Lösen von Problemen.

Lineare Algebra

Lineare Algebra beschäftigt sich im Kern mit dem Studium linearer Gleichungen, also Gleichungen, in denen die Variablen nur linear vorkommen (nicht quadriert oder ähnliches). In der Schule werden neben Geradengleichungen auch Systeme lineare Gleichungen behandelt. Außerdem werden Ebenengleichungen behandelt (Hessesche Normalform). Diese Theorie wird ausgebaut, die Lösungsmenge von linearen System beschrieben, und es werden andere Koeffizientenmengen behandelt (zum Beispiel Gleichungen mit komplexen Koeffizienten). Die Matrizenrechnung vereinfacht weiter den Umgang mit linearen Gleichungen.

Darüber hinaus werden Determinanten, Skalarprodukte und Eigenwerte behandelt. Die ersten beiden Stoffgebiete tauchen möglicherweise auch schon in der Schule auf, zumindest in Spezialfällen. Eigenwerte sind normalerweise völlig neu.

Eine wichtige Anwendung der Techniken der linearen Algebra ist die analytische Geometrie, also das Studium von geometrischen Objekten in der Ebene oder im Raum mit Hilfe von Koordinaten. Auch hier gibt es reiche Anknüpfungspunkte mit der Schule, wie etwa Geraden- und Ebenengleichungen, sowie senkrechten Vektoren. Aus der Schule stammt die Bezeichnung „Vektorrechnung“. Ein spezieller Gegenstand sind Quadriken, die in der Schule in Form von Ellipsen auftauchen.

Das vorliegende Skript legt aber auch Wert auf algebraische Strukturen, also Mengen, in denen man nach vorgegeben Gesetzen rechnen kann. Die wichtigsten behandelten Strukturen sind Körper und Vektorräume. In dem Kapitel über Grundlagen werden Gruppen als Beispiel behandelt. Nichtkommutative Gruppen kommen in Form von Abbildungsräumen vor. Aber auch Skalarprodukte und Determinanten sind wichtige algebraische Strukturen.

Dieses Skript beschäftigt sich mit Linearer Algebra, Analytischer Geometrie und algebraischen Strukturen.

Kapitel 1

Grundlagen der Mathematik

1.1 Einführung

Oft wird Mathematik mit *Rechnen* gleichgesetzt. Natürlich ist das Berechnen von Werten oder das numerische Lösen von Gleichungen eine der Hauptanwendungen der Mathematik. Aber Mathematik ist mehr. Sie ist darüber hinaus die Fähigkeit, zu *abstrahieren*. Das bedeutet, dass wir ein konkretes Problem in eine mathematische Welt übersetzen und dort studieren.

Dabei werden sehr unterschiedliche Probleme mit denselben mathematischen Methoden behandelt.

- **Lösen von Gleichungen.** Schon in der Schule wird das Lösen von Gleichungen in verschiedenen Zusammenhängen angewendet. Man kann damit Bewegungsprobleme lösen, Geldbeträge oder Zinsen berechnen, oder auch geometrische Größen, wie Flächen, Strecken oder Winkel, bestimmen.
- **Wahrscheinlichkeitsrechung.** Die Wahrscheinlichkeitsrechnung überall angewandt, wo der Zufall mathematisch erfasst werden soll, vom Würfeln bis zur Umfrage. Immer wird dieselbe mathematische Theorie verwendet.
- **Differential- und Integralrechnung.** Diese schon in der Schule verwendeten Kalküle haben ebenfalls vielfältige Anwendungen, von der Bestimmung der Extremwerte von Funktionen bis zur Berechnung des freien Falls in der Physik.

Solche Theorien mit breitem Anwendungsspektrum zeigen die Nützlichkeit der mathematischen Abstraktion.

Der Nutzen der mathematischen Abstraktion besteht darin, dass die unterschiedlichsten Probleme in denselben mathematischen Rahmen gestellt werden und dort exakt und allgemeingültig lösbar sind.

Eine mathematische Theorie **abstrahiert** also von einem konkreten Problem, indem sie die wichtigsten Eigenschaften und Zusammenhänge erfasst und für andere, ähnlich gelagerte Probleme zur Verfügung stellt. Außerdem werden so die wesentlichen Dinge herausgehoben, und Unwesentliches weggelassen.

In Abbildung 1.1 ist das schematisch festgehalten. Dort wird für ein konkretes Problem das Wort „Modell“ verwendet. Man könnte stattdessen von auch „Realisierung“ oder „Anwendung“ einer mathematischen Theorie sprechen.

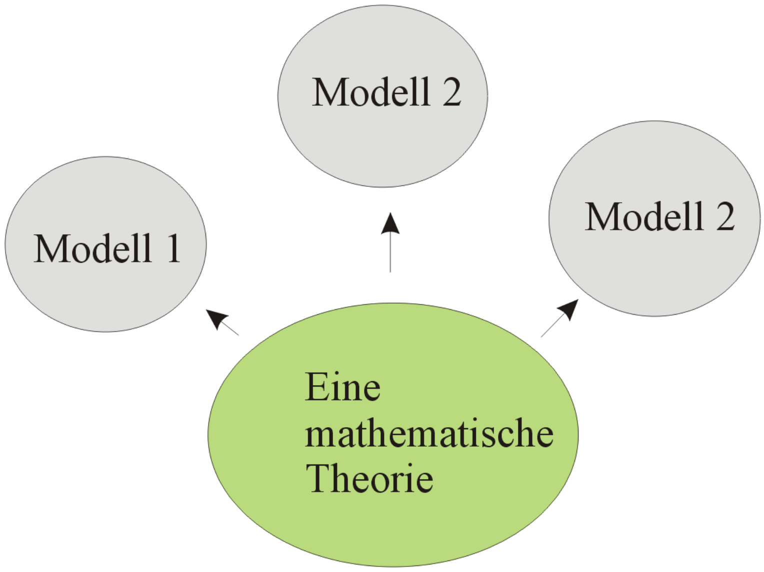

Abbildung 1.1: Mathematische Theorie und ihre Modelle

1.2 Mathematische Logik

Wie funktioniert nun diese Übertragung von konkreten Modellen in mathematische Theorien?

1.2.1 Modelle

Ein Modell für eine mathematische Theorie ist eine *gedachte* Gesamtheit (wir wollen noch nicht „Menge“ sagen) von Objekten. Dies kann eine endliche Gesamtheit oder eine unendliche Gesamtheit sein. Die Zahlen der Zahlgerade $\mathbb{R}$ bilden zum Beispiel eine unendliche Gesamtheit.

Wir sind in einer mathematischen Theorie interessiert an gewissen **Eigenschaften**, die die Objekte haben oder nicht haben. Für ein Objekt x könnten wir diese Eigenschaft als $A(x)$ schreiben, und für jedes konkrete Objekt x nehmen wir an, dass $A(x)$ entweder wahr ist oder falsch.

1.1. Beispiel: Für die reellen Zahlen ist $x > 0$ so eine Eigenschaft, die entweder wahr ist oder falsch.

Es kann auch **Beziehungen** zwischen zwei oder mehr Objekten geben, die erfüllt sind oder nicht erfüllt sind. Für zwei Objekte x und y könnten wir die Beziehung als $R(x, y)$ schreiben, und für je zwei Objekte ist diese Beziehung entweder erfüllt oder nicht.

1.2. Beispiel: Eine Beziehung zwischen zwei reellen Zahlen ist etwa $x < y$, und eine Beziehung zwischen drei reellen Zahlen ist $x + y = z$.

Außerdem kann es sein, dass wir gewisse Objekte als **Konstante** auszeichnen und mit einem eindeutigen Namen versehen. Ein Objekt mit diesem Namen muss dann in jedem Modell unserer Theorie vorhanden sein.

1.3. Beispiel: Bei den reellen Zahlen könnten wir die Konstanten 0 und 1 festlegen.

Wir sind in unseren Modellen an Eigenschaften von Objekten, Beziehungen zwischen Objekten und speziellen Objekten, den Konstanten, interessiert.

1.4. Beispiel: Wir treffen oft Gesamtheiten von Objekten an, in denen man **addieren** kann. Als Beziehung betrachten wir dann eine Beziehung zwischen je drei Objekten x, y, z, die besagt, dass die Summe von x und y gleich z ist. Man schreibt das, wie gewohnt, als

$$x + y = z.$$

Beispiele für Additions-Modelle aus der Schule sind die natürlichen Zahlen, die Brüche, die reellen Zahlen und die Vektoren. Man kann darüber hinaus aber auch Funktionen addieren, oder Matrizen. Diese Schreibweise ist also universell einsetzbar.

1.2.2 Axiome

Axiome sind Aussagen, die in jedem Modell der Theorie gelten sollen. Jedes Modell der Theorie muss also alle Axiome erfüllen. Durch die Axiome werden unsere Theorien exakt festgelegt.

Wir legen Axiome fest, die in allen für uns interessanten Modellen gelten sollen.

1.5. Beispiel: Wir kehren zurück zu unserem Beispiel mit der Addition. Dafür legen wir nun Axiome fest, die schon aus der Schule bekannt sein sollten.

1. Das erste Axiom erscheint selbstverständlich, verdient es aber, festgehalten werden.

   $$\text{Für alle } x, y \text{ existiert genau ein } z \text{ mit } x + y = z.$$

Dies entspricht unserer Vorstellung von Addition. Aufgrund dieses Axioms machen Ausdrücke wie $(a + b) + c$ erst Sinn und wir können wie gewohnt rechnen. Wenn nämlich $a+b$ nicht eindeutig bestimmt wäre, was soll dann $(a + b) + c$ bedeuten?

2. Als nächstes Axiom haben wir

$$\text{Für alle } x, y \text{ gilt } x + y = y + x.$$

Dies ist das **Kommutativgesetz**.

3. Weiter

$$\text{Für alle } x, y, z \text{ gilt } (x + y) + z = x + (y + z).$$

Dies ist das **Assoziativgesetz**.

4. Wir nehmen auch die Existenz eines **neutralen Elements** und des **Inversen** an. Es gibt ein Element 0, so dass gilt

$$x + 0 = x \qquad \text{für alle } x,$$

und

$$\text{Für alle } x \text{ existiert ein } y \text{ mit } x + y = 0.$$

Diese Axiome nennt man Axiome einer **Gruppe** (engl.: group) (genauer, einer kommutativen Gruppe). Wie wir wissen, erfüllen die reellen Zahlen diese Axiome, aber auch die Vektoren. Es gibt aber noch zahlreiche andere interessante Gruppen, denen wir in dieser Vorlesung begegnen werden.

Axiome sollen **unabhängig** sein. Das heißt, dass man kein Axiom weglassen kann. Das ist der Fall, wenn es ein Modell gibt, dass die anderen Axiome erfüllt, aber das wegzulassende Axiom nicht.

Axiome sollen **widerspruchsfrei** sein. Das bedeutet, dass kein Axiom den übrigen widerspricht. Dies ist genau dann der Fall, wenn es überhaupt ein Modell für die Theorie gibt.

1.2.3 Sätze

Ein Satz einer Theorie ist eine Aussage, die in allen Modellen der Theorie wahr ist. Das heißt, in jedem denkbaren Modell, in dem die Axiome erfüllt sind, gilt auch der Satz. Damit wird die Theorie allgemein gültig. Solange die Voraussetzungen erfüllt sind, stimmen die Resultate der Theorie.

1.6. Beispiel: Kehren wir zu den Gruppen zurück. Die folgende Aussage ist ein Satz der Gruppentheorie.

Es gibt genau ein neutrales Element.

Das bedeutet ausgeschrieben: Wenn 0 und $\tilde{0}$ beide die Eigenschaften eines neutralen Elementes erfüllen, dann ist $0 = \tilde{0}$.

Ein Satz muss **bewiesen** werden. Dazu verwenden wir logische Argumente die zeigen, dass der Satz in jedem Modell gelten *muss*, in dem die Axiome gelten.

Man darf dabei keine zusätzlichen Annahmen machen, oder nur Spezialfälle betrachten.

> Sätze sind in allgemein gültige Aussagen. Ihre Aussagen sind in jedem Modell gültig, in dem die Voraussetzungen gelten. Ein Beweis ist eine Argumentation, die die Allgemeingültigkeit nachweist.

1.7. Beispiel: Beweisen wir den oben erwähnten Satz über die Eindeutigkeit des neutralen Elements. In einer kommutativen Gruppe ist das nicht schwer. Seien also 0 und $\tilde{0}$ neutrale Elemente. Dann gilt

$$0 + \tilde{0} = 0,$$

weil $\tilde{0}$ neutrales Element ist. Außerdem gilt

$$\tilde{0} + 0 = \tilde{0},$$

weil 0 neutrales Element ist. Aufgrund des Kommutativgeseztes hat man also

$$0 = 0 + \tilde{0} = \tilde{0} + 0 = \tilde{0}.$$

Damit ist $0 = \tilde{0}$ bewiesen. Wir haben dazu lediglich das Kommutativgesetz benötigt.

1.8. Beispiel: Wir zeigen, dass in einer Gruppe auch inverse Elemente eindeutig bestimmt sind. Das ist schon schwerer. Sei x also ein Element der Gruppe und y zu x invers, also

$$x + y = 0.$$

Sei $\tilde{y}$ ebenfalls ein inverses Element, also

$$x + \tilde{y} = 0.$$

Dann addieren wir in der ersten Gleichung $\tilde{y}$ auf beiden Seiten und in der zweiten y. Also

$$\begin{aligned} \tilde{y} + (x + y) &= \tilde{y} + 0 = \tilde{y}, \\ y + (x + \tilde{y}) &= y + 0 = y. \end{aligned}$$

Die beiden linken Seiten sind aber gleich. Denn

$$\tilde{y} + (x + y) = (\tilde{y} + x) + y = y + (\tilde{y} + x) = y + (x + \tilde{y}).$$

Also folgt $y = \tilde{y}$. Bei dieser Argumentation haben wir alle Axiome verwendet!

1.9. Bemerkung: Die beiden Aussagen über die Eindeutigkeit bleiben richtig, wenn man das Kommutativgesetz streicht. Aber sie sind dann nur mit deutlich mehr Aufwand zu beweisen.

1.2.4 Logische Aussagen

Da es erfahrungsgemäß am Anfang schwierig ist, in Beweisen exakt und logisch zu argumentieren, lohnt es sich, logische Aussagen etwas genauer unter die Lupe zu nehmen.

Elementare Aussagen (Prädikate)

Die in unserem Modell betrachteten Eigenschaften und Beziehungen sind die elementaren Aussagen unserer Theorie. Bei den Gruppen ist die einzige elementare Aussage $x + y = z$.

Die Gleichheit $v = w$ ist in jedem Modell eine elementare Aussage, die für je zwei Objekte v und w wahr ist oder falsch. Man sagt, die Objekte seien *unterscheidbar*.

Boolesche Aussagen

Und. Zwei Aussagen A und B lassen sich mit **„und“** verknüpfen. Die Aussage „A und B gelten“ ist genau dann wahr, wenn die Aussagen A und B *beide* wahr sind.

1.10. Beispiel: Als simples Beispiel lassen sich zwei Axiome einer Theorie immer mit „und“ verknüpfen und ergeben dann einen Satz der Theorie.

Oder. Zwei Aussagen A und B lassen sich auch mit **„oder“** verknüpfen. Im Gegensatz zur Umgangssprache bedeutet dies, dass eine der beiden Aussagen *oder auch beide* wahr sind.

Nicht. Die Bedeutung der Aussage **„A gilt nicht“** ist klar.

Implikation. Über die Aussage **„Aus A folgt B“** herrschen dagegen oft Unklarheiten. Die Aussage ist richtig, wenn in jedem Modell, in dem A gilt auch B gelten muss. Wenn A nicht gilt, ist es *egal*, ob B gilt oder nicht. Das bedeutet, dass die Aussage gleichbedeutend ist mit „A gilt nicht, oder B gilt“. Wenn die Aussage A immer falsch ist, dann ist die Aussage „Aus A folgt B“ richtig, wenngleich sinnlos (ex falso quodlibet).

1.11. Beispiel: Ein Satz einer Theorie wird gewöhnlich in der Form

$$\text{Aus } A_1 \text{ und } A_2 \text{ und } \ldots \text{und } A_n \text{ folgt } B$$

wiedergegeben. B muss gelten, wenn *alle* Voraussetzungen $A_1, \ldots, A_n$ gelten. Wenn eine der Voraussetzungen *immer* falsch ist, dann ist der Satz richtig, aber sinnlos.

Äquivalenz. Die Bedeutung der Aussage **„A gilt genau dann, wenn B gilt“** ist offensichtlich. Die Aussage beweist man in zwei Teilen. Zuerst zeigt man, dass aus A die Aussage B folgt, und dann zeigt man, dass aus B die Aussage A folgt. Man sagt auch oft, dass die Aussagen A und B **äquivalent** sind.

In der **Booleschen Algebra** werden für diese Verknüpfungen Zeichen eingeführt, die wir hier aber bis auf $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ nur selten verwenden. Diese Zeichen sind

$$\begin{array}{cc} A \wedge B, & A \text{ und } B, \\ A \vee B, & A \text{ oder } B, \\ A \Rightarrow B, & \text{Aus } A \text{ folgt } B, \\ A \Leftrightarrow B, & A \text{ und } B \text{ sind äquivalent}, \\ \neg A, & \text{Nicht } A. \end{array}$$

Außerdem lernt man, mit booleschen Ausdrücken zu rechnen. In **Wahrheitstafeln** wird für einen booleschen Ausdruck der Wahrheitswert, abhängig vom Wahrheitswert der Variablen festgehalten. Hier ist die Wahrheitstafel für die bisher behandelten booleschen Ausdrücke.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

1.12. Beispiel: Wann ist die Aussage „A und B“ falsch? Das Gegenteil der Aussage „A und B“ ist offensichtlich die Aussage „Nicht A oder nicht B“. In der booleschen Algebra stellt sich mit Hilfe von Wahrheitstafeln heraus, dass die Aussage

$$\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \vee (\neg B).$$

immer wahr ist. Man nennt solche Aussagen **Tautologien**.

1.13 Aufgabe: Vervollständigen Sie die folgende Wahrheitstafel.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

1.14 Aufgabe: Wann ist die Aussage „A oder B“ falsch?

1.15 Aufgabe: Angenommen, alle Kreter sind Lügner. Wenn nun Sokrates ein Kreter ist, muss er Lügner sein. Was kann daraus geschlossen werden, dass Sokrates Lügner ist? Was kann daraus geschlossen werden, dass Sokrates *kein* Lügner ist?

1.16 Aufgabe: Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien?

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow B \Rightarrow A$$
$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$$
$$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$
$$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$
$$(A \Rightarrow B) \wedge \neg A \Rightarrow \neg B$$

Quantoren

Allquantor. Wir betrachten die Aussage **„Für alle x gilt $A(x)$“**. Dabei ist $A(x)$ eine Aussage, die x als freie Variable enthält. Eine freie Variable ist eine Variable, die nicht schon durch einen anderen Quantor gebunden ist. Die Aussage soll in einem Modell richtig sein, wenn $A(x)$ immer richtig ist, egal welches konkrete Objekt x man einsetzt. Man schreibt

$$\forall_x A(x).$$

1.17. Beispiel: Das Kommutativgesetz in einer Gruppe schreibt sich dann als

$$\forall_x \forall_y \, (x + y = y + x) \, .$$

Dies sind eigentlich zwei ineinander geschachtelte Allquantoren. Man schreibt das einfach als

$$\forall_{x,y} \, (x + y = y + x) \, ,$$

da es auf die Reihenfolge der Allquantoren offenbar nicht ankommt.

Existenzquantor. Die Aussage **„Es gibt ein x mit $A(x)$"** ist genau dann in einem Modell erfüllt, wenn es dort ein konkretes Objekt x gibt, für das $A(x)$ wahr ist. Wir schreiben

$$\exists_x A(x).$$

1.18. Beispiel: Die Existenz des Inversen in einer Gruppe lässt sich damit als

$$\forall_x \exists_y \, (x + y = 0)$$

schreiben, wobei 0 das neutrale Element der Gruppe sei. Hier kommt es natürlich schon auf die Reihenfolge der Quantoren an!

1.19 Aufgabe: Schreiben Sie das Axiom von der Existenz des neutralen Elements mit Hilfe von Quantoren.

1.20. Beispiel: In der Graphentheorie betrachtet man Modelle mit der Beziehung

$$x \to y$$

zwischen x und y. In Abbildung 1.2 ist das durch Pfeile angedeutet. Die Punkte stellen die Objekte des Modells dar. Wie man sieht, geht von jedem Punkt ein Pfeil aus. Also ist die Aussage

$$\forall_x \exists_y \, (x \to y)$$

in diesem Modell wahr.

1.21 Aufgabe: Überprüfen Sie im Graphen 1.2 die folgenden Aussagen.

(1)

$$\exists_x \forall_y \, (x \to y)$$

(2)

$$\forall_x \exists_y \, (y \to x)$$

(3) Es gibt x, y, z, v mit

$$x \to y, \quad y \to z, \quad z \to v, \quad v \to x.$$

Wann ist die Aussage $\forall_x A(x)$ falsch? Das ist genau dann der Fall, wenn die Aussage „Es gibt kein x, für das $A(x)$ falsch ist" richtig ist. In Zeichen

$$\neg \forall_x A(x) \;\Leftrightarrow\; \exists_x \neg A(x).$$

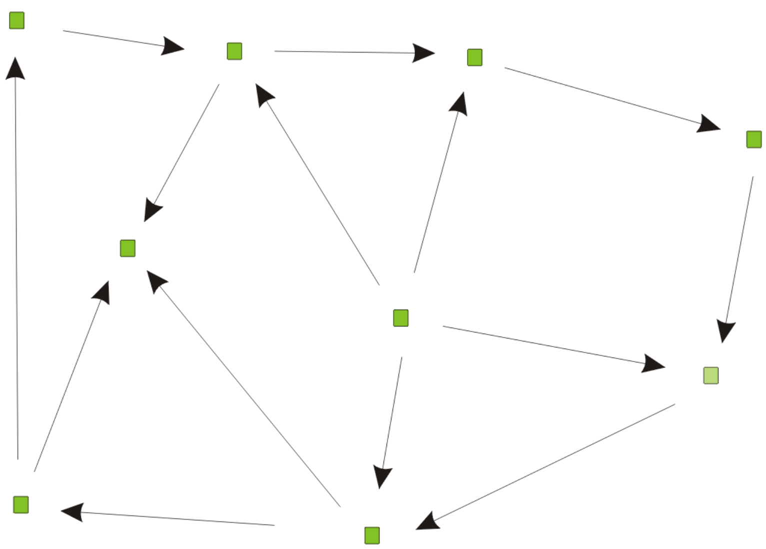

Abbildung 1.2: Ein Graph

Umgekehrt ist die Aussage $\exists_x A(x)$ falsch, wenn für alle x die Aussage $\neg A(x)$ richtig ist.

Sehr oft formuliert man auch die Aussage „Es gibt genau ein x mit $A(x)$“. Diese Aussage zerlegt sich in zwei Teile, nämlich die Existenz $\exists_x A(x)$ und die Eindeutigkeit

$$\forall_{x,y} \left((A(x) \text{ und } A(x)) \;\Rightarrow\; x = y \right).$$

Beispielsweise haben wir schon gezeigt, dass es in einer Gruppe genau ein neutrales Element gibt. Im Beweis haben wir angenommen, dass es zwei solche Elemente gibt, und gezeigt, dass diese Elemente gleich sein müssen.

1.22 Aufgabe: Gibt es in Abbildung 1.2 zu jedem x genau ein y mit $x \to y$?

1.23 Aufgabe: Formulieren Sie die folgenden Aussagen in logischen Ausdrücken, die nur All- und Existenzquantoren, sowie die Booleschen Grundelemente enthalten.

(1) Es gibt mindestens zwei Objekte x und y, für die die Aussage $A(x)$ gilt.

(2) Es gibt genau zwei Objekte x und y, für die die Aussage $A(x)$ gilt.

(3) Es gibt höchstens ein Objekt x, für das die Aussage $A(x)$ gilt.

(4) Kein x, für das $A(x)$ gilt, erfüllt auch $B(x)$.

(5) Obwohl A nicht gilt, gilt die Aussage B.

(6) Entweder gilt A oder B.

1.2.5 Definitionen

Definitionen sind einfach Abkürzungen für häufig verwendete Eigenschaften oder Objekte.

1.24. Beispiel: Da es zu jedem Gruppenelement x ein *eindeutig bestimmtes* inverses Element gibt, kann man für das Inverse das Zeichen $-x$ definieren und dann damit rechnen. Ebenfalls definiert man

$$x - y := x + (-y).$$

Das Zeichen „:=“ steht für „definiert als“.

Definitionen von Zeichen machen nur Sinn, wenn diese Zeichen eindeutig bestimmte Objekte angeben.

1.25. Beispiel: Wir zeigen, dass in jeder Gruppe für alle x, y

$$-(x + y) = (-x) + (-y)$$

gilt. Dazu rechnen wir nach, dass

$$(x + y) + ((-x) + (-y)) = 0$$

gilt. Dies ist eine leichte Aufgabe, die wir dem Leser überlassen. Wenn wir das nachgerechnet haben, ist also $(-x) + (-y)$ ein inverses Element zu $x + y$. Die Behauptung folgt also aus der Eindeutigkeit des inversen Elementes.

1.26 Aufgabe: Zeigen Sie $-(-x) = x$ für alle Elemente x in einer Gruppe.

Man kann auch Eigenschaften von Objekten definieren. In den Voraussetzung eines Satzes braucht man dann nur noch zu sagen, dass das Objekt die definierte Eigenschaft hat, anstatt diese Eigenschaft explizit auszuschreiben.

1.27. Beispiel: Ein Punkt x in einem Graphen heiße *erreichbar*, wenn es ein y gibt mit $y \to x$.

1.2.6 Beweise

Auch korrektes Beweisen fällt anfangs oftmals schwer. Natürlich gewinnt man mit der Zeit Übung. Wir wollen hier aber dennoch einige allgemeine, und immer wiederkehrende Beweisstrategien behandeln.

Die normale Formulierung eines Satzes besteht darin, gewisse **Voraussetzungen** anzugeben und eine **Behauptung**, die aus diesen Voraussetzungen folgt. Implizit werden immer die Axiome der Theorie als Voraussetzungen angenommen. Natürlich können Voraussetzungen mit Hilfe von Definitionen für Eigenschaften abgekürzt werden.

Mit logischen Zeichen ist ein mathematischer Satz also von der Form

$$V_1, \ldots, V_n \;\Rightarrow\; A$$

Dabei sind $V_1, \ldots, V_n$ die Voraussetzungen des Satzes (einschließlich der Axiome) und A die Behauptung. Wir haben das Komma als Abkürzung für „und“ verwendet.

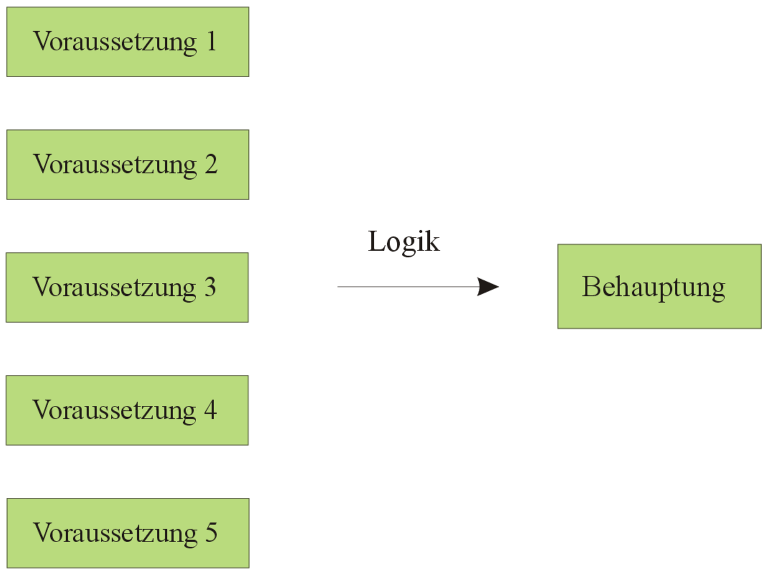

Abbildung 1.3: Mathematische Sätze

Ein Beweis eines Satzes muss für den Leser zwingend darlegen, warum die Behauptung des Satzes aus den Voraussetzungen folgt.

Es ist dabei immer hilfreich, an ein beliebiges Modell zu denken, von dem man nichts weiß, außer, dass dort die Voraussetzungen des Satzes gelten müssen. Man muss lediglich der Versuchung widerstehen, zusätzliche Annahmen zu machen, obwohl sie vielleicht naheliegend erscheinen.

Implikation

Behauptungen vom Typ $A_1 \Rightarrow A_2$ beweist man, indem man zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes annimmt, dass A_1 gilt, und daraus schließt, dass A_2 gilt.

Bei Äquivalenzen $A_1 \Leftrightarrow A_2$ sind **zwei Richtungen** zu beweisen, also

$$A_1 \Rightarrow A_2, \quad A_2 \Rightarrow A_1.$$

1.28. Beispiel: In der Schule werden oft Gleichungen einfach untereinander geschrieben. Es ist dabei wichtig zu beachten, ob die Gleichungen nur im Rechengang auseinander folgen, oder ob sie äquivalent sind. Innerhalb der reellen Zahlen folgt aus $x = y$ immer $x^2 = y^2$, aber die Umkehrung ist falsch. Das Wurzelziehen auf beiden Seiten einer Gleichung ist keine erlaubte Operation, wenn man Äquivalenz aufrecht erhalten will.

Aussagen mit Allquantoren

Wenn die Aussage vom Typ $\forall_x A(x)$ ist, so nimmt man ein „beliebiges, aber festes“ x in einem beliebigen Modell der Theorie und beweist die Aussage $A(x)$ für dieses x. Dabei darf man natürlich keine speziellen Annahmen über x oder das Modell machen.

1.29. Beispiel: In einer Gruppe gilt für alle $x, y, \tilde{y}$ die folgende Aussage

$$y + x = \tilde{y} + x \;\Rightarrow\; y = \tilde{y}.$$

Diesen Satz beweisen wir, indem wir $x, y, \tilde{y}$ als beliebig vorgegeben annehmen. Dann gilt, wenn wir die Notation $-x$ für das Inverse von x verwenden,

$$\begin{aligned} y = y + 0 = y + (x + (-x)) = (y + x) + (-x) \\ = (\tilde{y} + x) + (-x) = \tilde{y} + (x + (-x)) = \tilde{y} + 0 = \tilde{y}. \end{aligned}$$

Wir haben also de facto $-x$ auf beiden Seiten der Gleichung $y + x = \tilde{y} + x$ addiert.

1.30. Beispiel: Die Umkehrung

$$y = \tilde{y} \;\Rightarrow\; y + x = \tilde{y} + x.$$

für alle $x, y, \tilde{y}$ in einer Gruppe braucht nicht bewiesen zu werden. Sie ist eine logische Selbstverständlichkeit.

Für gleiche Objekte gelten dieselben Beziehungen.

1.31. Beispiel: In einer Gruppe gilt für alle x, y, z die Äquivalenz

$$x + y = z \;\Leftrightarrow\; x = z - y.$$

Zum Beweis haben wir zwei Richtungen zu zeigen, nachdem wir x, y, und z beliebig aus der Gruppe festgelegt haben.

„ $\Rightarrow$ “: Nimmt man $x + y = z$ an, so gilt

$$x = x + (y + (-y)) = (x + y) + (-y) = z - y.$$

„$\Leftarrow$“: Nimmt man $x = z - y$ an, so gilt

$$\begin{aligned} x + y = (z - y) + y = (z + (-y)) + y = z + ((-y) + y) \\ = z + (y + (-y)) = z + 0 = z. \end{aligned}$$

Fallunterscheidungen

Möglicherweise ist in einem Beweis für x eine **Fallunterscheidung** nötig. In diesem Fall ist es wichtig, dass man *alle* Fälle vollständig behandelt.

1.32. Beispiel: Innerhalb der reellen Zahlen gilt für alle x die Aussage

$$x^2 \geq 0.$$

Der Beweis geht über die Fallunterscheidung $x \geq 0$ und $x < 0$, die alle möglichen Fälle umfasst. Im ersten Fall folgt aus den Regeln für „$\leq$“ direkt $x^2 = x \cdot x \geq 0$. Im zweiten Fall folgt $-x > 0$ und daher

$$x^2 = (-x)^2 > 0.$$

Aussagen mit Existenzquantoren

Eine Aussage vom Typ $\exists_x A(x)$ kann man **konstruktiv** beweisen. Dazu konstruiert man aus anderen Objekten, deren Existenz aus den Voraussetzungen folgt, das gewünschte x. Die Konstruktion muss natürlich mit den Axiomen oder den Voraussetzungen möglich sein.

1.33. Beispiel: In den reellen Zahlen existiert ein Element $x > 0$ mit

$$x^2 = 2.$$

Diese Aussage wird in der Analysis *konstruktiv* bewiesen, indem eine Folge konstruiert wird, die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert.

Es ist aber auch möglich, die Existenzaussage dadurch zu beweisen, dass man das Gegenteil widerlegt. Man zeigt also, dass die Aussage

$$\forall_x \neg A(x)$$

falsch ist, zum Beispiel durch einen Widerspruchsbeweis, den wir im folgenden Abschnitt behandeln.

1.34. Beispiel: Beispiele für nicht-konstruktive Existenzbeweise tauchen in der Analysis erst recht spät auf. Man kann zum Beispiel zeigen, dass es tranzendente Zahlen (Zahlen, die nicht Nullstellen von ganzzahligen Polynomen sind) gibt, ohne eine solche Zahl konkret angeben zu können. Allerdings gibt es dafür inzwischen auch konstruktive Beweise, denn π und e wurden als transzendent erkannt.

Widerspruchsbeweise

Dieser Beweistyp tritt recht häufig auf, wird aber oft falsch verstanden. Um eine Aussage A zu beweisen, nehmen wir an, dass A *nicht* gilt. Man zeigt dann, dass sich ein Widerspruch zu einer der Voraussetzungen ergibt, dass also diese Voraussetzung doch nicht gelten kann. Da jede Aussage aber entweder gilt oder nicht gilt, kann das nicht sein. Daher muss A doch gelten.

Man kann dass mit logischen Zeichen so ausdrücken. Wenn V_1 bis V_n Voraussetzungen einer Behauptung A sind, und

$$V_1, \ldots, V_n, \neg A \;\Rightarrow\; \neg V_i$$

für eine der Voraussetzungen V_i, dann ist

$$V_1, \ldots, V_n \;\Rightarrow\; A$$

bewiesen.

1.35. Beispiel: Der berühmte Beweis dafür, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, wird am einfachsten als Widerspruchsbeweis formuliert. Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$. Dann teilt keine dieser Primzahlen die Zahl

$$x = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Da wir wissen, dass x eine Primfaktorzerlegung hat, ist x selbst eine Primzahl. x ist aber verschieden von $p_1, \ldots, p_n$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass p_1 bis p_n die einzigen Primzahlen sind.

1.36. Beispiel: Ein anderes bekanntes Beispiel ist der Beweis dafür, dass $\sqrt{2}$ kein Bruch ist. Wir nehmen das Gegenteil an. Also

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

mit teilerfremden p, q. Dann folgt

$$2q^2 = p^2.$$

Also ist p^2 gerade, und damit auch p. Also ist p^2 durch 4 teilbar. Da p und q teilerfremd sind, ist q ungerade. Nun hat man den Widerspruch, da $2q^2$ nicht durch 4 teilbar ist. Aus diesem Widerspruch schließt man, dass die Annahme falsch war, dass $\sqrt{2}$ ein Bruch ist.

Viele Beweise, die auch direkt geführt werden könnten, werden manchmal unnötigerweise als Widerspruchsbeweise aufgeschrieben.

Das Problem ist, dass sich die Voraussetzungen auch gegenseitig widersprechen können. In diesem Fall führt ein Widerspruchsbeweis natürlich immer zum Erfolg. Wir haben dann einen sinnlosen Satz bewiesen, dessen Voraussetzungen niemals alle erfüllt sind.

1.3 Mengen und Abbildungen

1.3.1 Mengen

Wenn wir uns ein konkretes Modell vorstellen, so kann man in diesem Modell die Gesamtheit aller Elemente mit einer gewissen Eigenschaft $A(x)$ aussondern. Man erhält die Gesamtheit aller Objekte x, die die Eigenschaft $A(x)$ erfüllen, die wir als **Menge** (engl.: set)

$$M = \{x : A(x)\},$$

bezeichnen. Wenn x **Element** der Menge M ist, so schreiben wir

$$x \in M.$$

Es gilt also

$$x \in M \;\Leftrightarrow\; A(x).$$

$x \in M$ ist quasi nur eine Abkürzung für $A(x)$.

Wir können nun diese Mengen wieder als Objekte betrachten. Damit entsteht die Möglichkeit, diese Mengen zu neuen Mengen zusammen zu fassen. Mengen können damit wieder Elemente von Mengen werden. Es gibt eine Vielzahl von neuen Konstruktionsmöglichkeiten. Diese neuen Möglichkeiten wollen wir in diesem Abschnitt genauer betrachten. Auch Abbildungen werden dort als Mengen dargestellt.

> Mengenlehre beginnt dann, wenn wir die Mengen selbst wieder als Objekte unserer Modells betrachten, und Mengen von Mengen bilden.

1.37. Beispiel: Es ist in einer Gruppe möglich, dass $x + x = 0$ ist, obwohl $x \neq 0$ ist. Solche Gruppen werden wir später kennen lernen. In den reellen Zahlen ist das natürlich nicht der Fall. Wir können nun

$$M := \{x : x + x = 0\}$$

definieren. In den reellen Zahlen enthält M nur das Element 0.

1.38 Aufgabe: Beweisen Sie

$$x, y \in M \;\Rightarrow\; x + y \in M.$$

Die Konstruktionsmöglichkeiten, die wir hier kennenlernen werden, fasst man als Axiome der **Mengenlehre** (engl.: set theory) zusammen. Akzeptiert man diese Axiome, so besteht ein Modell nicht mehr nur aus den Objekten, an die man zunächst gedacht hat, sondern auch aus Mengen von Objekten, Mengen von Mengen, Abbildungen und Mengen von Abbildungen.

In der Praxis werden wir sogar von der Menge der Objekte in unserem Modell sprechen. Eigenschaften von Objekten entsprechen dann Teilmengen dieser Menge und Beziehungen zwischen Objekten entsprechen Abbildungen. Alles wird in der Sprache der Mengenlehre ausgedrückt.

> Der Vorteil der Mengenlehre ist die einheitliche Sprechweise, die man damit gewinnt. „Die Mengenlehre ist ein Paradies, aus dem uns niemand vertreiben kann.“

Die **axiomatische Mengenlehre** geht sogar einen Schritt weiter und bildet einen Rahmen, in den sämtliche denkbaren Modelle hinein passen. Was dort nicht konstruierbar ist, existiert mathematisch nicht. Wir wollen hier pragmatischer bleiben und eine mathematische Gesamttheorie vermeiden. Auch werden wir die Konstruktionsmechanismen der Mengenlehre sparsam anwenden.

1.3.2 Gleichheit von Mengen

Als wichtigstes Axiom der Mengenlehre halten wir fest, dass zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Das heißt, A und B sind genau dann gleich, wenn

$$\forall_x \, (x \in A \;\Leftrightarrow\; x \in B)$$

gilt.

Es ist klar, dass gleiche Mengen dieselben Elemente enthalten. Schließlich haben gleiche Objekte dieselben Eigenschaften. Die Umkehrung ist von der Anschauung her selbstverständlich, muss aber festgehalten werden.

1.39. Definition: Eine Menge A heißt **Teilmenge** (engl.: subset) von B, wenn jedes Element aus A auch in B ist. Das heißt

$$\forall_x \, (x \in A \;\Rightarrow\; x \in B) \, .$$

Der folgende Satz ist aufgrund unseres Axioms über die Gleichheit von Mengen offensichtlich.

1.40 Satz: *Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt.*

Ein weiteres Axiom der Mengenlehre erlaubt uns, aus einer gegebenen Menge A aller Elemente mit einer gewissen Eigenschaft $A(x)$ **auszusondern**. Es entsteht die Teilmenge

$$M := \{x \in A : A(x)\}.$$

Also

$$x \in M \;\Leftrightarrow\; (x \in A \text{ und } A(x)) \, .$$

Da M durch seine Elemente festgelegt ist, ist diese Menge eindeutig definiert.

1.41. Definition: Die leere Menge $\emptyset$ ist die Menge, die keine Elemente enthält. Sie ist dadurch eindeutig charakterisiert, dass

$$x \notin \emptyset$$

für alle x gilt. Sie ist Teilmenge jeder anderen Menge, also

$$\emptyset \subseteq A.$$

für jede Menge A.

1.42 Aufgabe: Schreiben Sie die leere Menge in der Form

$$\emptyset = \{x \in A : \ldots\},$$

wobei A eine beliebige vorgegebene Menge ist.

1.43. Bemerkung: Die Elemente einer Menge können wieder Mengen sein. Wir machen bei allen Mangenoperationen keinen Unterschied zwischen Mengen und den Grundobjekten, von denen wir ausgehen. Der einzige Unterschied ist, dass wir uns nicht für die Elemente der Grundobjekte interessieren. Grundobjekte tauchen nur auf der linken Seite der Elementbeziehung auf und werden nie als Menge betrachtet.

Ein weiteres Axiom erlaubt uns, aus zwei oder mehr Elementen eine neue Menge durch **Aufzählung** zu bilden. Wenn also x und y gegeben sind, so ist die Menge

$$M = \{x, y\}$$

dadurch festgelegt, dass die Elemente von M genau x oder y sind. Dasselbe gilt für ein Element, oder auch für drei oder mehr Elemente. Natürlich gilt

$$\{x, y\} = \{y, x\}.$$

1.3.3 Potenzmenge

1.44. Definition: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A. Also

$$M \in \mathcal{P}(A) \;\Leftrightarrow\; M \subseteq A.$$

Ein weiteres, sehr mächtiges Axiom der Mengenlehre garantiert die Existenz der Potenzmenge einer beliebigen Menge.

1.45. Beispiel: Sei $x \neq y$ und

$$M = \{x, y\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}.$$

Denn die angezeigten Mengen sind genau alle Teilmengen von $\{x, y\}$.

1.46 Aufgabe: Geben Sie $\mathcal{P}\{x, y, z\}$ für drei verschiedene Elemente x, y, z an.

1.3.4 Vereinigung und Schnitt

1.47. Definition: Zu je zwei Mengen A und B definieren wir die **Vereinigung** (engl.: union)

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

Die Existenz der Vereinigung gilt per Axiom der Mengenlehre. Man hat

$$x \in A \cup B \;\Leftrightarrow\; (x \in A \text{ oder } x \in B)\,. \tag{1.1}$$

1.48. Beispiel: Für jede Menge A und B gilt

$$A \subseteq A \cup B, \quad B \subseteq A \cup B.$$

Denn jedes Element, dass in A (bzw. B) ist, ist nach Definition offenbar auch in $A \cup B$.

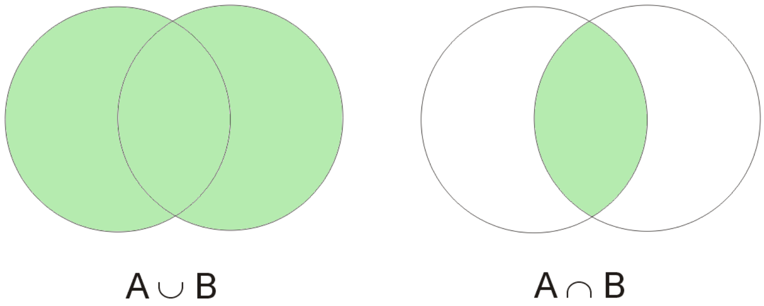

Abbildung 1.4: Vereinigung und Schnitt

1.49. Definition: Aus der Vereinigung können wir die Elemente aussondern, die in beiden Mengen liegen. Man bezeichnet diese Menge als **Schnitt** (engl.: intersection) von A und B. Also

$$A \cap B := \{x \in A \cup B : x \in A \text{ und } x \in B\}. \tag{1.2}$$

1.50. Bemerkung: Die Skizze in Abbildung 1.4 bezeichnet man als **Venn-Diagramm**. Für zwei Mengen A, B entstehen vier Flächen, die den vier Fällen

$$\begin{gathered} x \in A, x \in B, \\ x \notin A, x \in B, \\ x \in A, x \notin B, \\ x \notin A, x \notin B \end{gathered}$$

entsprechen. Bei drei Mengen entstehen dann 8 Flächen usw. Man kann auf diese Art Beweise über die Gleichheit von Mengenrelationen für endliche vielen Mengen beweisen, indem man das Venn-Diagramm für die linke und die rechte Seite der Gleichung zeichnet. Es handelt sich um einen nicht-verbalen Beweis durch Fallunterscheidung.

Wir ziehen hier verbale Beweise vor.

1.51. Bemerkung: Wegen (1.1) und (1.2) ist das Rechnen mit Vereinigung und Schnitt identisch zum Rechnen mit Booleschen Ausdrücken.

Als erstes Beispiel für einen etwas komplexeren Sachverhalt beweisen wir den folgenden Satz.

1.52 Satz: *Für drei Mengen A, B, C gelten die beiden Beziehungen*

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Beweis: Wir zeigen nur die erste Gleichheit. Um eine Mengengleichheit zu zeigen, müssen wir aufgrund von Satz 1.40 zwei Teilmengenbeziehungen beweisen.

„$\subseteq$“: Sei

$$x \in A \cup (B \cap C). \tag{1.3}$$

„beliebig, aber fest“. Dann ist $x \in A$ oder $x \in (B \cap C)$. Wir unterscheiden diese beiden Fälle.

1. Fall: $x \in A$. Dann ist $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Also

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{1.4}$$

2. Fall: $x \in (B \cap C)$. Dann ist $x \in B$ und $x \in C$. Also $x \in A \cap B$ und $x \in A \cap C$. Folglich haben wir wieder (1.4).

„$\supseteq$“: Es gelte (1.4). Dann ist $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Wieder unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: $x \in A$. Man erhält (1.3).

2. Fall: $x \notin A$. Wegen $x \in A \cup B$ muss dann $x \in B$ sein. Analog muss auch $x \in C$ gelten. Also $x \in B \cap C$. Es folgt wieder (1.3). $\square$

1.53 Aufgabe: Beweisen Sie die zweite Mengengleichheit mit denselben Methoden. Zeichnen Sie für beide Mengengleichheiten Venn-Diagramme der linken und der rechten Seite.

1.54. Definition: Die Differenz zweier Mengen A und B ist die Menge

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

$A \setminus B$ ist offenbar eine Teilmenge von A. Es gilt

$$A = (A \setminus B) \cup B,$$

und diese Vereinigung ist **disjunkt (disjoint)**, das heißt

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset.$$

Disjunkte Vereinigungen werden manchmal mit dem Zeichen „$\dot\cup$“ notiert.

1.55 Aufgabe: Welche der folgenden Aussagen sind allgemein richtig (also Sätze) und welche nicht? Beweisen Sie die richtigen Aussagen, und widerlegen Sie die falschen durch ein Gegenbeispiel. Die richtigen Aussagen beweisen Sie einmal verbal, und ein anderes Mal mit Venn-Diagrammen.

(1) Für alle Mengen A, B, C gilt

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

(2) Für alle Mengen A, B, C gilt

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C).$$

(3) Definiert man für zwei Mengen A, B die symmetrische Differenz

$$\Delta(A, B) := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

so gilt

$$\Delta(A, B) = \Delta(B, A).$$

(4) Es gilt für alle Mengen A, B

$$\Delta(A, B) = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A = B.$$

(5) Für drei Mengen A, B, C gilt

$$\Delta(\Delta(A, B), C) = \Delta(A, \Delta(B, C)).$$

Unendliche Schnitte und Vereinigungen

Schwieriger zu verstehen ist die Vereinigung und der Schnitt über eine Menge von Mengen (die auch unendlich vielen Mengen enthalten kann). Mengen von Mengen nennt man auch **Mengensysteme**. Sei also $\mathcal{A}$ ein Mengensystem. Dann definiert man

$$\bigcup \mathcal{A} := \{x : x \in A \text{ für ein } A \in \mathcal{A}\},$$
$$\bigcap \mathcal{A} := \{x : x \in A \text{ für alle } A \in \mathcal{A}\}.$$

Die Vereinigung existiert per Axiom, der Schnitt ist eine Teilmenge der Vereinigung und kann aus dieser ausgesondert werden. Man schreibt auch

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A, \quad \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

1.56. Beispiel: Seien x, y, z verschiedene Elemente und

$$\mathcal{A} = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}\}.$$

Dann ist

$$\bigcup A = \{x, y, z\}.$$

Es ist sozusagen die Vereinigung über alle drei Mengen in $\mathcal{A}$.

1.57 Satz: *Für ein Mengensystem $\mathcal{A}$ und eine Menge M gilt*

$$M \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (M \setminus A).$$

Beweis: „$\subseteq$“: Sei x Element der linken Seite. Dann ist

$$x \in M, \quad x \notin \bigcup \mathcal{A}.$$

Das bedeutet, nach der Definition von „$\bigcup$“

$$x \notin A, \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Also

$$x \in M \setminus A, \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Daher ist x Element der rechten Seite.

„$\supseteq$“: Sei umgekehrt x Element der rechten Seite, also $x \in M \setminus A$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Es folgt $x \in M$, aber $x \notin A$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Also ist x Element der linken Seite. $\square$

1.58 Aufgabe: Zeigen Sie analog zu diesem Satz

$$M \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (M \setminus A).$$

Zeigen Sie auch

$$\left(\bigcup \mathcal{A}\right) \setminus M = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (A \setminus M).$$

1.3.5 Relationen und Abbildungen

1.59. Definition: Zu je zwei Objekten a und b definieren wir das **Paar**

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Wichtig für uns ist hier lediglich wichtig, wann zwei Paare gleich sind. Es gilt

$$(a, b) = (\tilde{a}, \tilde{b}) \;\Leftrightarrow\; \left(a = \tilde{a} \text{ und } b = \tilde{b}\right). \tag{1.5}$$

Wenn $a \neq b$ ist, ist insbesondere $(a, b) \neq (b, a)$. Man darf das Paar (a,b) also nicht mit der Menge $\{a, b\}$ verwechseln.

1.60. Bemerkung: Um (1.5) zu beweisen, benötigt man ein weiteres Axiom der Mengenlehre, dass pathologische Mengen verhindert. Genauer darf niemals $A \in A$ gelten, oder auch $A \in B$ und $B \in A$ und ähnliche Zyklen. Wir gehen darauf hier nicht weiter ein.

1.61. Definition: Die Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ bezeichnen wir als **Kreuzprodukt** (engl.: product) von A und B, in Zeichen

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Eine Teilmenge R von $A \times B$ bezeichnen wir als **Relation** zwischen A und B. Eine Relation f heißt **Abbildung** (mapping) von A nach B, wenn für alle x genau ein y existiert mit $(x, y) \in f$. Wir schreiben in diesem Fall

$$y = f(x),$$

und, als Zeichen dafür, dass f eine Abbildung von A nach B ist

$$f : A \to B.$$

Gelegentlich schreiben wir auch

$$x \mapsto f(x).$$

Die Schreibweise $f(x)$ macht für Abbildungen Sinn, da ja y mit $(x, y) \in f$ *eindeutig* bestimmt ist, wenn x gegeben ist.

1.62. Bemerkung: Relationen R zwischen einer Menge M und sich selbst nennt man Relationen *auf* M. Man beachte, dass aus $(x, y) \in R$ keineswegs $(y, x) \in R$ folgt!

1.63. Beispiel: Der gerichtete Graph in Abbildung 1.2 kann als eine Relation auf M, wobei M die Menge der dort abgebildeten Punkte ist. $(x, y) \in R$ soll genau dann gelten, wenn ein Pfeil von x nach y geht.

1.64. Beispiel: In Abbildung 1.5 ist eine Abbildung

$$f : A \to B$$

mit Pfeilen dargestellt. Man beachte, dass von jedem $a \in A$ *genau ein* Pfeil ausgeht. Sonst wäre diese Relation keine Abbildung.

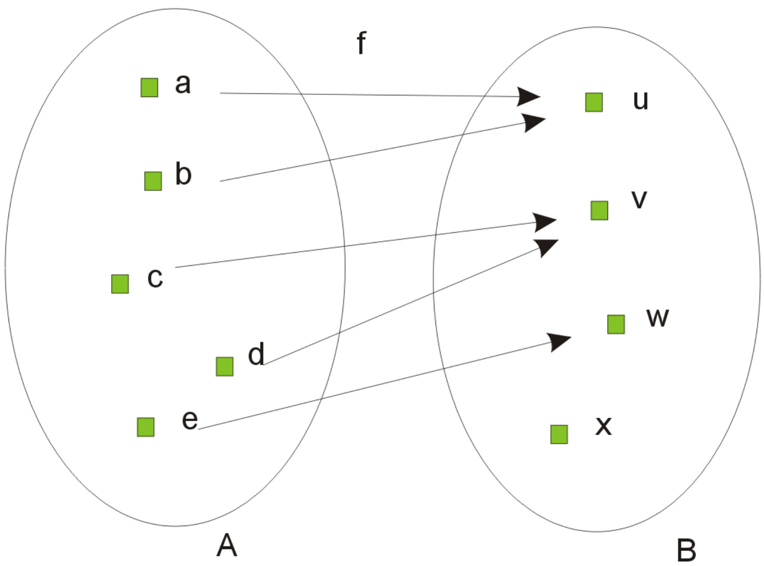

Abbildung 1.5: Eine Abbildung zwischen endlichen Mengen

1.65. Beispiel: Eine typische Relation ist

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq y\}.$$

Natürlich schreiben wir niemals $(x, y) \in R$, sondern einfach $x \leq y$.

1.66. Beispiel: Die Addition in Gruppen kann als Abbildung

$$+ : G \times G \to G$$

gedeutet werden. Dabei ist G die Menge aller Gruppenobjekte. Man schreibt natürlich nicht

$$+(x, y) = z,$$

sondern einfach

$$x + y = z.$$

Man bezeichnet eine solche Abbildung als **Operator** auf G. Dieses Beispiel zeigt, wie universell die Sprache der Mengenlehre ist.

1.67. Bemerkung: Als **Funktionen** (function) bezeichnet man reellwertige Abbildungen, gewöhnlich durch eine Rechenvorschrift festgelegt.

1.68. Beispiel: Die Relation

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 = y\}$$

auf $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Man hat

$$x \mapsto x^2.$$

Die Relation

$$\tilde{R} := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^2 = x\}$$

ist dagegen *keine* Abbildung, weil es zum Beispiel zu $x = 1$ zwei Elemente y gibt mit $(x, y) \in \tilde{R}$, denn

$$(1, -1) \in \tilde{R}, (1, 1) \in \tilde{R}.$$

1.69 Aufgabe: Zeichnen Sie die beiden Relation R und $\tilde{R}$ aus dem Beispiel in ein Koordinatensystem ein.

1.70 Aufgabe: Ist die Relation

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |y| + 2y = x\}$$

eine Abbildung? Beweisen Sie Ihre Entscheidung! Zeichnen Sie diese Relation in ein Koordinatensystem ein.

1.3.6 Bild, Urbild, Umkehrabbildung

1.71. Definition: Bei einer Abbildung

$$f : A \to B$$

nennen wir A den **Definitionsbereich** und B den **Bildbereich**. Schränkt man den Definitionsbereich auf eine Teilmenge $M \subseteq A$ ein, so erhält man die **Einschränkung** (engl.: restriction)

$$f|_M : M \to B.$$

Also

$$f|_M(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in M.$$

Es ist manchmal interessant eine Abbildung $f : M \to B$ von einer Teilmenge $M \subset A$ zu einer **Fortsetzung** (engl.: continuation) $g : A \to B$ auf ganz A fortzusetzen. Es soll also $g|_M = f$ gelten. Meist sollen dabei gewisse Eigenschaften, wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit erhalten bleiben. Die interessante Frage ist immer, ob das möglich ist.

1.72. Beispiel: Seien a, b zwei verschiedene reelle Punkte. Dann lässt sich jede Abbildung

$$f : \{a, b\} \to \mathbb{R}$$

eindeutig zu einer Geraden $g(x) = mx + c$ fortsetzen. Es gilt also für diese Gerade

$$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(b).$$

Es ist interessant zu fragen, wann man die Gleichung

$$f(x) = y$$

nach y auflösen kann, also $y = g(x)$, und wann diese Auflösung eindeutig ist.

1.73. Definition: Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Wenn $f(x) = y$ ist, so heißt x ein „Urbild“ von y.

(1) Wenn jedes $y \in B$ höchstens ein Urbild hat, so nennt man f **injektiv** (engl.: injective, one-to-one).

(2) Wenn jedes $y \in B$ mindestens ein Urbild hat, so nennt man f **surjektiv** (engl.: surjective, mapping onto).

(3) Wenn f injektiv und surjektiv ist, so nennt man f **bijektiv** (engl.: bijectiv, one-to-one and onto).

Bijektive Abbildungen sind also dadurch gekennzeichnet, dass jedes $y \in B$ genau ein Urbild hat.

1.74. Bemerkung: Um nachzuweisen, dass $f : A \to B$ injektiv ist, muss man offenbar für alle $x_1, x_2 \in A$ zeigen

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

Um nachzuweisen, dass f surjektiv ist, muss man zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ finden mit $f(x) = y$.

1.75. Beispiel: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = x^2$$

ist weder injektiv, noch bijektiv. Denn einerseits ist

$$f(-1) = f(1) = 1.$$

Also ist f nicht injektiv. Denn 1 hat zwei Urbilder. Andererseits hat $y = -1$ gar kein Urbild.

1.76 Satz: *Wenn $f : A \to B$ bijektiv ist, dann existiert eine eindeutig bestimmte* ***Umkehrabbildung*** *(engl: inverse mapping) $f^{-1} : B \to A$, so dass gelten*

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{für alle } x \in A,$$

und

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \text{für alle } y \in B.$$

Beweis: Nach unserer Definition ist die bijektive Abbildung f dadurch gekennzeichnet, dass jedes $y \in B$ genau ein Urbild hat. Dieses eindeutig bestimmte Urbild definieren wir als $f^{-1}(y)$. Als Relation geschrieben, können wir f^{-1} übrigens einfach als

$$f^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in f\}.$$

definieren. Mit dieser Definition sind die beiden verlangten Beziehungen offenbar erfüllt. □

1.77. Beispiel: Wir betrachten dieselbe Funktion $f(x) = x^2$ wie im vorigen Beispiel als Abbildung

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty).$$

Wir schränken also den Definitionsbereich und die Bildmenge ein. Dann ist f bijektiv. Die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty).$$

ist

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

1.78 Aufgabe: Geben Sie zwei möglichst große Intervalle ein, auf denen die Funktion

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

injektiv ist. Schränken Sie auf diesen beiden Intervallen den Bildbereich ein, so dass f bijektiv ist, und geben Sie die beiden Umkehrfunktionen an.

1.79 Aufgabe: Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$f(x) = |x| + ax$$

bijektiv? Geben Sie jeweils die Umkehrabbildung an.

1.80. Beispiel: Sei G eine Gruppe und $a \in G$ fest gewählt. Die Umkehrabbildung der Abbildung $f : G \to G$, definiert durch

$$f(x) = x + a,$$

ist offenbar

$$f^{-1}(y) = y - a.$$

Denn

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x + a) = (x + a) - a = x.$$

Außerdem

$$f(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) + a = (y - a) + a = y.$$

1.81. Bemerkung: Es ist ohne Differentialrechnung nicht so leicht zu klären, ob eine Funktion wie

$$f(x) = x + e^x$$

eine Umkehrabbildung hat, oder nicht. Die Frage ist äquivalent damit, die Gleichung

$$y = x + e^x$$

nach x aufzulösen. Mit Hilfe der Differentialrechnung gelingt der Nachweis allerdings sehr leicht, indem man die Monotonie nachprüft und die Grenzwerte in $\pm\infty$. Noch schwieriger wird dies bei Gleichungen, in denen y nur implizit gegeben ist, wie

$$x^y = y^x.$$

1.82 Aufgabe: Finden Sie Mengen A und B, eine Abbildung $f : A \to B$ und eine Abbildung $g : B \to A$, so dass

$$g(f(x)) = x \qquad \text{für alle } x \in A$$

gilt, aber f nicht bijektiv ist. Zeigen Sie, dass f aber injektiv sein muss, wenn diese Bedingung erfüllt ist. Zeigen Sie ebenfalls, dass f surjektiv sein muss, wenn

$$f(g(y)) = y \qquad \text{für alle } y \in A$$

gilt.

1.83. Definition: Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $M \subseteq A$. Dann ist das **Bild** (engl.: image) von M unter der Abbildung f definiert als

$$f(M) = \{f(x) : x \in M\}.$$

Sei umgekehrt $N \subseteq B$. Dann ist das **Urbild** (engl.: preimage) von N unter f die Menge aller Urbilder von Elementen von N, also die Menge

$$f^{-1}(N) = \{x \in A : f(x) \in N\}.$$

1.84. Bemerkung: Verwechseln Sie nicht $f^{-1}(N)$ mit der Umkehrabbildung. Das Urbild von Mengen hat damit nicht viel zu tun. Wenn allerdings f bijektiv ist, so ist das Urbild von N in der Tat das Bild unter der Umkehrabbildung, also $f^{-1}(N)$.

Wir werden uns in der linearen Algebra sehr häufig mit Bildern und Urbildern von Mengen beschäftigen. Es lohnt sich also, sich mit diesen Begriffen genau auseinander zu setzen. Es gilt

$$y \in f(M) \;\Leftrightarrow\; \exists_{x \in M} f(x) = y,$$

und

$$x \in f^{-1}(N) \;\Leftrightarrow\; f(x) \in N,$$

Als Beispiel für die Argumentation mit diesen Begriffen beweisen wir den folgenden Satz.

1.85 Satz: *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $M \subseteq A$. Dann gilt*

$$M \subseteq f^{-1}(f(M)).$$

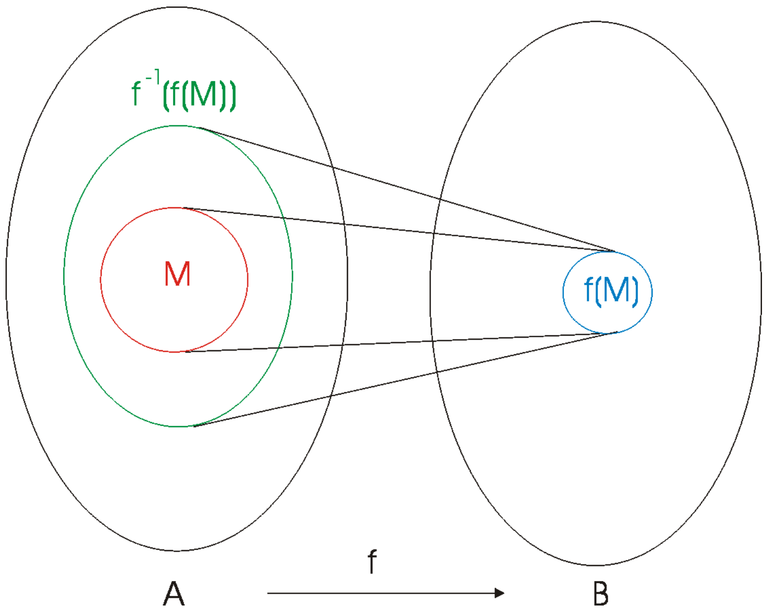

Abbildung 1.6: $f^{-1}(f(M))$

Sei $N \subseteq B$. Dann gilt

$$f(f^{-1}(N)) \subseteq N.$$

.

Beweis: Sei $x \in M$. Dann ist $f(x) \in f(M)$. Also ist x ein Urbild von $f(x) \in f(M)$ und es folgt $x \in f^{-1}(f(M))$. Dies ist die erste Teilmengenrelation.

Sei $y \in f(f^{-1}(N))$. Dann existiert nach Definition ein $x \in f^{-1}(N)$ mit $f(x) = y$. Wenn $x \in f^{-1}(N)$ ist, dann ist nach Definition $f(x) \in N$. Also

$$y = f(x) \in N.$$

□

1.86 Aufgabe: Betrachten Sie wieder die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 + x + 1$. Berechnen Sie $f[-1, 1]$ und $f^{-1}[-1, 1]$.

1.87 Aufgabe: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = x^3 - x.$$

Zeichnen Sie den Graph der Funktion, berechnen Sie die lokalen Extrema mit Ihrem Schulwissen, und lesen Sie am Graph die folgenden Mengen ab.

$$f[1, 2], \quad f[0, 1], \quad f^{-1}[0, 5].$$

1.88 Aufgabe: Geben Sie für die folgenden Funktionen Intervalle $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ an, so dass die Funktionen als Abbildung $f : I_1 \to I_2$ bijektiv sind, und geben Sie jeweils die Umkehrfunktion an.

$$f(x) = x^2 + x, \quad f(x) = |x| + x, \quad f(x) = \sin(x).$$

1.89 Satz: *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $M_1, M_2 \subseteq A$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} f(M_1 \cup M_2) &= f(M_1) \cup f(M_2), \\ f(M_1 \cap M_2) &\subseteq f(M_1) \cap f(M_2). \end{aligned}$$

Sei $N_1, N_2 \in B$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(N_1 \cup N_2) &= f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2), \\ f^{-1}(N_1 \cap N_2) &= f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2). \end{aligned}$$

Beweis: Wir zeigen die erste Gleichheit.

„$\subseteq$“: Sei

$$y \in f(M_1 \cup M_2).$$

Dann gibt es ein $x \in M_1 \cup M_2$ mit $f(x) = y$. Falls $x \in M_1$ ist, so ist

$$y = f(x) \in f(M_1)$$

Also $y \in f(M_1) \cup f(M_2)$. Falls $x \in M_2$ ist, gilt dasselbe.

„$\supseteq$“: Sei

$$y \in f(M_1) \cup f(M_2).$$

Falls $y \in f(M_1)$ ist, so existiert ein $x \in M_1$ mit $f(x) = y$. Also $y \in f(M_1 \cup M_2)$. Falls $y \in f(M_2)$ ist, so gilt dasselbe.

Wir zeigen nun die erste Gleichheit für die Umkehrabbildung

„$\subseteq$“: Sei

$$x \in f^{-1}(N_1 \cup N_2).$$

Dann gilt $f(x) \in N_1 \cup N_2$. Falls $f(x) \in N_1$ ist, so ist $x \in f^{-1}(N_1)$, also

$$x \in f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2).$$

Falls $f(x) \in N_2$ ist, so gilt dasselbe.

„$\supseteq$“: Falls $x \in f^{-1}(N_1)$ ist, so ist $f(x) \in N_1$ und daher $f(x) \in N_1 \cup N_2$. Es folgt

$$x \in f^{-1}(N_1 \cup N_2).$$

Falls $x \in f^{-1}(N_2)$ ist, so gilt dasselbe. □

1.90 Aufgabe: Beweisen Sie auf dieselbe Art und Weise die fehlenden Mengenrelationen. Geben Sie ein Gegenbeispiel dafür an, dass die Gleichheit in der zweiten Relation nicht gilt.

1.91. Definition: Zwei Abbildungen

$$f : A \to B, \quad g : B \to C$$

lassen sich verketten. Man definiert die **Verkettung** (engl.: concetanation) (Hintereinanderausführung) der Abbildungen als die Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C, \\ x &\mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

1.92. Beispiel: Die Verkettung der reellen Funktionen $f(x) = x + 1$ und $g(x) = x^2$ ist

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x + 1)^2.$$

Man beachte, dass diese Abbildung verschieden von

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 1.$$

ist. Die Verkettung ist also nicht kommutativ.

1.93 Aufgabe: Überlegen Sie sich, dass die Verkettung assoziativ ist. Das heißt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

für Abbildungen

$$f : A \to B, \quad g : B \to C, \quad h : C \to D.$$

1.94. Beispiel: Wenn

$$f : A \to A$$

bijektiv ist, so gibt es die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : A \to A.$$

Dann gilt

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}.$$

wobei $\mathrm{id} : A \to A$ die **identische Abbildung** (engl.: identity)

$$\begin{aligned} \mathrm{id} : A &\to A \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

ist. Für diese beiden Abbildungen gilt also das Kommutativgesetz.

1.95 Aufgabe: Zeigen Sie für invertierbare Abbildung $f, g : A \to A$, dass auch $f \circ g$ invertierbar ist, und dass gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

1.96. Beispiel: Betrachtet man die Menge $\mathcal{S}(A)$ aller bijektiven Abbildungen einer Menge A in sich selbst, so ist die Verkettung zweier Elemente in $\mathcal{S}(A)$ wieder in $\mathcal{S}(A)$

Es gilt das Assoziativgesetz und jedes Element $f \in \mathcal{S}(A)$ hat ein inverses Element bezüglich der Multiplikation „$\circ$“. Allerdings gilt das Kommutativgesetz nicht. $\mathcal{S}(A)$ ist das typische Beispiel einer nicht-kommutativen Gruppe.

1.97 Aufgabe: Geben Sie die Mengen

$$\mathcal{S}(\{1\}), \quad \mathcal{S}(\{1,2\}), \quad \mathcal{S}(\{1,2,3\})$$

an.

1.98. Definition: Die **Menge aller Abbildungen** von A nach B bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(A, B)$.

1.99 Aufgabe: Geben Sie die Mengen $\mathcal{A}(A, A)$ an für

$$A = \{1\}, \quad A = \{1,2\}, \quad A = \{1,2,3\}.$$

1.100. Bemerkung: Für eine Menge A ist die Verkettung zweier Abbildungen aus $\mathcal{A}(A, A)$ wieder in $\mathcal{A}(A, A)$. Wir können zwei solche Abbildungen also wieder mit „$\circ$“ multiplizieren. Allerdings hat nicht jedes Element von $\mathcal{A}(A, A)$ ein Inverses. Eine solche Struktur, in der das Assoziativgesetz gilt. bezeichnet man als **Halbgruppe**. In diesem Fall hat unsere Halbgruppe ein neutrale Element id. Das Kommutativgesetz gilt nicht.

1.4 Die natürlichen Zahlen

1.4.1 Induktion

Wir nehmen hier an, dass die natürlichen Zahlen in der Vorlesung über Analysis als Teilmenge der reellen Zahlen eingeführt werden. Uns steht also schon eine Addition „$+$“, eine Multiplikation „$\cdot$“ und eine Ordnung „$\leq$“ zur Verfügung. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der wesentliche Eigenschaft der natürlichen Zahlen, nämlich der Induktion.

Zunächst jedoch geben wir auf einem abstrakten Niveau die **Peano-Axiome** wieder, die die natürlichen Zahlen festlegen. Inspiriert sind diese Axiome durch den Zählprozess

$$1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \ldots$$

der alle natürlichen Zahlen durchlaufen soll, aber keine doppelt.

Die Idee der natürlichen Zahlen ist, dass der Zählprozess alle Zahlen genau einmal durchläuft.

1.101. Definition: Eine **induktive Menge** ist eine Menge $\mathbb{N}$ mit einer Abbildung

$$N : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$
$$n \mapsto N(n)$$

die jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Nachfolger $N(n)$ zuordnet und einem festen Element $1 \in \mathbb{N}$, so dass die folgenden Beziehungen gelten.

(1) Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $N(n) = 1$.

(2) Die Abbildung N ist injektiv, also

$$N(n) = N(m) \;\Rightarrow\; n = m \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}$$

1.102. Definition: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind eine minimale induktive Menge. Das heißt, wenn $M \subset \mathbb{N}$ ebenfalls eine induktive Menge ist mit derselben 1 und der Nachfolgerabbildung, dann ist $M = \mathbb{N}$.

Dies bedeutet, dass alle Teilmengen $M \subset \mathbb{N}$, die 1 enthalten, und für die gilt

$$n \in M \;\Rightarrow\; N(n) \in M \qquad \text{für alle } n \in M$$

gleich $\mathbb{N}$ sind.

1.103. Bemerkung: Die Eigenschaften (1) und (2) stellen sicher, dass kein Element vom Zählprozess doppelt durchlaufen wird. Die Minimalität stellt sicher, dass jede Zahl einmal durchlaufen wird, wenn man mit 1 beginnt.

1.104. Bemerkung: Die reellen Zahlen enthalten, wie jeder andere angeordnete Körper, eine Teilmenge, die die Peano-Axiome erfüllt. Die Nachfolgeabbildung ist dort

$$N(n) = n + 1.$$

Details dazu werden in der Vorlesung über Analysis gegeben. Man kann aber auch umgekehrt die Existenz der natürlichen Zahlen axiomatisch fordern, und daraus die reellen Zahlen konstruieren. Diese Konstruktion gehört in eine Vorlesung „Aufbau des Zahlensystems“.

1.105. Definition: Unser $\mathbb{N}$ enthält die 0 nicht. Man schreibt

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Wir werden im folgenden annehmen, dass wir die natürlichen Zahlen als Teilmenge der reellen Zahlen haben, und schreiben daher $n + 1$ für den Nachfolger von n.

Aus der Minimalität folgt das wichtigste Prinzip in $\mathbb{N}$, die **vollständige Induktion**.

1.106 Satz: *(Vollständige Induktion) Sei $A(n)$ eine beliebige Aussage mit freier Variable n. Es gelte $A(1)$ und*

$$A(n) \;\Rightarrow\; A(n+1) \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Sei

$$M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ gilt}\}.$$

Dann ist M nach Voraussetzung induktiv. Es folgt $M = \mathbb{N}$. □

Man bezeichnet die Aussage $A(1)$ als **Induktionsanfang**. Die Folgerung $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ bezeichnet man als **Induktionsschritt**.

1.107. Beispiel: Wir geben zunächst ein Beispiel aus der Analysis. Es gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \qquad \text{für alle } x \geq -1 \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Dazu fixieren wir $x \geq -1$ und zeigen die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig.

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für $n \in \mathbb{N}$, also

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Wegen $1+x \geq 0$ bleibt diese Ungleichung richtig, wenn man sie mit $1+x$ multipliziert. Es gilt also

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Damit gilt die Behauptung auch für $n+1$.

Nun beweisen wir einige Aussagen von eher technischer Natur mit vollständiger Induktion.

1.108. Beispiel: Als simpelstes Beispiel für vollständige Induktion zeigen wir, dass jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ einen Vorgänger hat. Unsere Aussage $A(n)$ ist also

$$\forall_{n \in \mathbb{N}, n \neq 1} \exists_{m \in \mathbb{N}}\, n = m+1.$$

Man beachte, dass wir die Operation „$-$“ in den reellen Zahlen nicht verwenden wollen. Sie würde uns auch nicht helfen, da zunächst unklar ist, ob $n-1$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist. Das ist nämlich gerade die Aussage, die wir beweisen wollen.

Induktionsanfang: Die Aussage ist für $n = 1$ wahr, denn dort ist die Voraussetzung $n \neq 1$ nicht erfüllt,

Induktionsschritt: Die Aussage gelte für n. Wir müssen zeigen, dass $n+1$ einen Vorgänger hat. Das ist aber offensichtlich richtig, weil n der Vorgänger von $n+1$ ist.

1.109 Aufgabe: Zeigen Sie $n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion.

1.110. Beispiel: Der Nachteil des vorigen Beispiels liegt in seiner Einfachheit. Schwieriger ist schon der folgende Sachverhalt.

Zwischen $n \in \mathbb{N}$ und $n+1$ liegt keine weitere natürliche Zahl. Das heißt, es gibt kein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$n < m < n+1.$$

Nun beweisen wir unsere Aussage durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Angenommen,

$$1 < m < 2 := 1+1$$

für $m \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Aussage des vorigen Beispiels hat m einen Vorgänger $k = m - 1$. Aufgrund der Rechenregeln für angeordnete Körper folgt $k < 1$. Dies widerspricht der obigen Aufgabe.

Induktionsschritt: Angenommen,

$$n + 1 < m < n + 2.$$

für $n, m \in \mathbb{N}$. Dann ist $1 \leq n + 1 < m$, also $1 \neq m$ und m hat daher einen Vorgänger $m - 1 = k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$n < k < n + 1.$$

Dies widerspricht der Induktionsannahme.

Es gibt eine Reihe weiterer Sätze über $\mathbb{N}$, die in ähnlicher Weise anschaulich klar sind. Wir verzichten hier auf eine weitere Diskussion, und werden solche Sachverhalte als gegeben voraussetzen.

Der folgende Satz ist bisweilen nützlich. Er dient als Ersatz für das Induktionsprinzip.

1.111 Satz: *Jede nicht-leere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ enthält ein kleinstes Element. Das heißt, es gibt ein $n \in M$ mit*

$$n \leq m \qquad \text{für alle } m \in M.$$

Beweis: Sei also $M \subseteq \mathbb{N}$ nicht leer. Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Angenommen, M hat kein kleinstes Element. Dann zeigen wir durch vollständige Induktion nach n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n \leq m, \qquad \text{für alle } m \in M.$$

Daraus folgt natürlich sofort der Widerspruch, da dann jedes $n \in M$ minimales Element von M wäre.

Induktionsanfang: Es gilt $1 \leq m$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also insbesondere für alle $m \in M$.

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für $n \in \mathbb{N}$. Da M kein kleinstes Element hat, folgt $n \notin M$. Aus der Behauptung in Beispiel 1.110 folgt

$$n + 1 \leq m \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

$\square$

1.112. Bemerkung: Damit lässt das Induktionsprinzip erweitern. Sei $A(n)$ eine Aussage, die wir für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen wollen.

Wenn man nun zu jedem $n \in \mathbb{N}$, für das die Aussage $A(n)$ nicht gilt, ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ finden kann, so dass $A(m)$ ebenfalls nicht gilt (**unendlicher Abstieg**), dann muss $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

Denn die Menge der Elemente für die $A(n)$ nicht gilt, kann dann kein kleinstes Element enthalten. Sie muss also leer sein.

1.4.2 Rekursive Konstruktion

Wir können mit Hilfe von Induktion nicht nur Aussagen beweisen, sondern auch Objekte konstruieren.

1.113. Definition: Sei M eine beliebige Menge. Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to M$ heißt **Folge** (engl: sequence) in M. Man schreibt

$$a_n := a(n).$$

Für die gesamte Folge schreibt man

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Aufgrund des Zählprinzips ist eine Folge also durch

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

festgelegt.

1.114. Beispiel: Die einfachsten Folgen sind durch eine Rechenvorschrift gegeben. Also etwa

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Wir werden nun Folgen **rekursiv** konstruieren. Dazu legen wir zunächst a_1 fest. Danach legen wir a_{n+1} mit Hilfe von a_n fest. Aufgrund unserer Vorstellung vom Zählprozess, ist damit die Folge vollständig festgelegt.

1.115. Bemerkung: Sei $g : M \to M$ eine Abbildung. Dann existiert zu jedem fest vorgegebenem $a_1 \in M$ genau eine Folge in m mit

$$a_{n+1} = g(a_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Existenz dieser Folge kann mit einer cleveren Mengenkonstruktion bewiesen werden, auf die wir hier nicht eingehen. Für die Folge $a_n = (1/2)^n$ lautet die rekursive Definition

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2}.$$

In den meisten Fällen wird allerdings das Glied a_{n+1} außer von a_n auch von n abhängen, also

$$a_{n+1} = g(a_n, n),$$

wobei g eine Abbildung auf $M \times \mathbb{N}$ ist. Auch in diesem Fall ist die Existenz und die Eindeutigkeit der Folge für jedes gewählte Anfangsglied $a_1 \in M$ gesichert. Man kann sogar Folgen konstruieren, die von mehr als einem oder von allen vorigen Gliedern abhängen, etwa

$$a_{n+1} = g(a_n, a_{n-1})$$

In diesem Fall benötigt man für eine korrekte Definition natürlich 2 Anfangswerte $a_1, a_2 \in M$.

Dieses Konstruktionsprinzip ist sehr mächtig. Wir verwenden es oft in salopper Weise.

1.116. Beispiel: (1) Anstatt etwa die **Fakultät** $n!$ rekursiv durch

$$0! = 1! = 1, \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

zu definieren, schreiben wir einfach

$$0! = 1, \quad n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

(2) Als Beispiel für eine zweigliedrige Folge sei die Fibonacci-Folge genannt, die durch $a_1 = a_2 = 1$ und

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

festgelegt ist.

1.117 Aufgabe: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einer Gruppe G. Definieren Sie die **Summenschreibweise**, bzw. die **Produktschreibweise**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \ldots + a_n$$

$$\prod_{i=0}^{n} a_i := a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

rekursiv.

1.118 Aufgabe: Zeigen Sie durch vollständige Induktion

$$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1.119 Aufgabe: (1) Definieren Sie die Folge q^n für $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ rekursiv.

(2) Schreiben Sie für $q \in \mathbb{R}$ die Folge

$$a_n = 1 + q + \ldots + q^n$$

in der Summenschreibweise und definieren Sie sie rekursiv.

(3) Zeigen Sie für $q \neq 1$ durch vollständige Induktion

$$a_n = \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$$

1.120 Aufgabe: Was ist an folgendem Induktionsbeweis falsch?

Wir zeigen, dass alle natürlichen Zahlen gleich sind, indem wir per Induktion nach n zeigen, dass die Zahlen von 1 bis n gleich sind. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Die Induktionsvoraussetzung besagt, dass $1 = \ldots = n$ ist, insbesondere $n - 1 = n$. Also ist auch $n = n+1$ und wir erhalten $1 = \ldots = n = n+1$, können also den Induktionsschritt durchführen.

1.4.3 Endliche Mengen

1.121. Definition: Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$\{1, \dots, n\} := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$$

definiert. Eine Menge M heißt **endlich** (engl.: finite), wenn es eine bijektive Abbildung

$$\phi : \{1, \dots, n\} \to M$$

gibt, oder wenn $M = \emptyset$ ist. Man nennt

$$|M| = \sharp M = n$$

die **Mächtigkeit** von M.

Natürlich muss man dazu beweisen, dass die Mächtigkeit einer Menge eindeutig bestimmt ist. Dies ist Inhalt des folgenden, sehr intuitiven Satzes.

1.122 Satz: *Es gibt keine bijektive Abbildung*

$$\phi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$$

wenn $n, m \in \mathbb{N}$ und $n \neq m$ ist.

Beweis: Der Beweis ist sehr technisch. Wir zeigen den Satz für $n < m$ durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Angenommen, $n+1 < m$ ist und

$$\phi : \{1, \dots, n+1\} \to \{1, \dots, m\}$$

bijektiv. Die folgende Aufgabe zeigt, dass es dann eine bijektive Abbildung

$$\psi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m-1\}$$

gibt. Dies ist aber nicht nach Induktionsvoraussetzung nicht möglich. $\square$

1.123 Aufgabe: Sei $\phi : \{1, \dots, n+1\} \to M$ bijektiv und $m \in M$. Konstruieren Sie dann eine bijektive Abbildung von $\{1, \dots, n\}$ nach $M \setminus \{m\}$.

1.124 Aufgabe: Wieso folgt aus diesem Satz, dass die Mächtigkeit einer Menge eindeutig bestimmt ist?

1.125 Satz: *Teilmengen von endlichen Mengen sind endlich.*

Beweis: Auch diesen Satz kann man durch Induktion nach $n = |N|$ beweisen, wobei $M \subset N$ und N endlich sei. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Ansonsten sei $|N| = n + 1$. Wenn $M = N$ ist, ist nichts zu zeigen. Sei $m \in M \setminus N$. Aufgrund der obigen Aufgabe ist $M \setminus \{m\}$ endlich mit der Mächtigkeit n. Nach Induktionsvoraussetzung ist M endlich. $\square$

1.126 Aufgabe: (1) Seien M_1, M_2 endliche Mengen, die **disjunkt** (engl.: disjoint) sind, das heißt es gilt

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset.$$

Zeigen Sie, dass dann $M_1 \cup M_2$ endlich ist, und

$$|M_1| + |M_2| = |M_1 \cup M_2|$$

(2) Folgern Sie für alle endlichen Mengen M_1, M_2

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1 \setminus M_2| + |M_2 \setminus M_1| + |M_1 \cap M_2|$$

(3) Folgern Sie für alle endlichen Mengen M_1, M_2

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|$$

1.127 Aufgabe: (1) Sei $|M_1| = |M_2| = 10$ und $|M_1 \cup M_2| = n$. Wie groß darf n höchstens sein um sicher zu stellen, dass M_1 und M_2 nicht disjunkt sein können.

(2) Seien nun drei Mengen der Mächtigkeit 10 gegeben, deren Vereinigung die Mächtigkeit 14 hat. Zeigen Sie, dass dann der Schnitt nicht leer ist.

(3) Konstruieren Sie umgekehrt drei Mengen mit je 10 Elementen, deren Vereinigung 15 Elemente hat, so dass der Schnitt der drei Mengen leer ist.

(4) Seien 10 Mengen der Mächtigkeit 10 gegeben, deren Vereinigung 11 Elemente enthält. Zeigen Sie, dass dann der Schnitt ein Element enthalten muss.

(5) Zeigen Sie, dass dies bei 11 Mengen nicht mehr der Fall zu sein braucht.

1.128 Aufgabe: Seien M_1, M_2 endlich. Zeigen Sie

$$|M_1 \times M_2| = |M_1| \cdot |M_2|.$$

1.129 Aufgabe: Zeigen Sie per Induktion nach $|M|$, dass jede endliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ ein maximales Element haben muss.

1.130. Definition: Eine bijektive Abbildung

$$f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

heißt **Permutation** von $\{1, \ldots, n\}$. Die Menge aller solcher Permutationen wird mit $\mathcal{S}_n$ bezeichnet.

Wir werden uns später mit Permutationen genauer beschäftigen. Hier interessieren uns nur Mächtigkeiten, also Ergebnisse der **Kombinatorik**.

1.131 Satz: *Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$|\mathcal{S}_n| = n!$$

Beweis: Sei $f \in \mathcal{S}_n$. Dann gibt es anschaulich gesehen für $f(1)$ genau n Möglichkeiten, für $f(2)$ noch $n - 1$ etc. Man sollte diese Idee aber auch als induktiven Beweis formulieren können. $\square$

1.132 Aufgabe: Beweisen Sie $\mathcal{S}_n = n$ durch Induktion nach n.

1.133. Definition: Eine **Klassenaufteilung** einer Menge M ist ein System (eine Menge) $S \subseteq \mathcal{P}(M)$ von nicht-leeren Teilmengen von M, so dass je zwei Mengen in S disjunkt sind und

$$\bigcup S = M$$

ist.

1.134 Aufgabe: Zeigen Sie, dass ein System

$$\{S_1, \ldots, S_n\}$$

von nicht-leeren Teilmengen einer endlichen Menge M genau dann eine Klassenaufteilung von M ist, wenn

$$|S_1| + \ldots + |S_n| = |M|$$

ist und die Mengen $S_1, \ldots, S_n$ paarweise disjunkt sind.

1.135. Definition: Für $n \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ ist der **Binomialkoeffizient** definiert als

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1))}{m!}, \qquad \text{für } m \geq 1,$$

und

$$\binom{n}{0} = 1.$$

1.136. Bemerkung: Diese Definition ist auch für $n \notin \mathbb{N}$ geeignet. Sie lautet rekursiv

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{m+1} = \binom{n}{m} \cdot \frac{n-m}{m+1}.$$

Es gilt

$$\binom{n}{m} = 0, \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,\ m \in \mathbb{N},\ m > n$$

Wir definieren außerdem

$$\binom{n}{m} = 0, \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z},\ m < 0$$

1.137. Bemerkung: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$ kann man den Binomialkoeffizienten auch als

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

schreiben.

1.138 Aufgabe: Zeigen Sie per Induktion nach m

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{n+1-m}$$

für alle $n \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \neq n+1$.

1.139 Aufgabe: Zeigen Sie

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

für alle $n \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$. Für $m \geq 1$ verwenden Sie dabei Induktion nach m. Für $m = 0$ und $m < 0$ verwenden Sie die speziellen Festlegungen für diese Werte.

1.140. Definition: Eine bijektive Abbildung

$$x : \{1, \ldots, m\} \to M$$

definierte ein m-**Tupel**

$$(x_1, \ldots, x_m)$$

in M, wobei es üblich ist $x_i = x(i)$ zu schreiben.

1.141 Satz: *Es gibt genau*

$$n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \binom{n}{m} m!$$

m-Tupel ohne Wiederholungen in einer n-elementigen Menge M. Insgesamt gibt es n^m verschiedene m-Tupel, wenn man Wiederholungen zulässt.

Ein Tupel hat genau dann keine Wiederholungen, wenn die zugrunde liegende Abbildung injektiv ist.

Beweis: Der Beweis dieses Satzes ist ganz analog zur Herleitung der Mächtigkeit von S_n. In der Tat ist S_n die Menge aller n-Tupeln ohne Wiederholungen in $\{1, \ldots, n\}$. □

1.142 Satz: *Es gibt genau*

$$\binom{n}{m}$$

verschiedene Teilmengen der Mächtigkeit m in einer n-elementigen Menge M.

Beweis: Wir teilen alle m-Tupel in M in Klassen auf, die dieselben Elemente enthalten. Jede Klasse entspricht eindeutig einer Teilmenge der Mächtigkeit m. Wenn allerdings zwei m-Tupel ohne Wiederholungen

$$(x_1, \ldots, x_m), \quad (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$$

dieselben Elemente enthalten, so gibt es eine bijektive Abbildung mit

$$\begin{gathered} \phi : \{x_1, \ldots, x_m\} \to \{x_1, \ldots, x_m\} \\ \phi(x_i) = \tilde{x}_i \end{gathered}$$

also eine Permutation von $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Umgekehrt führt jede solche Permutation ein Tupel in ein anderes mit denselben Elementen über. Die Größe einer Klasse ist also $m!$. Die Anzahl der Klassen ist der Quotient aus der Gesamtanzahl der Tupel

$$n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

und der Größe jeder Klasse $m!$ nach Aufgabe 1.134. □

Man kann diesen Satz auch anders formulieren. Es gibt genau $\binom{n}{m}$ verschiedene *geordnete* Tupel

$$1 \le x_1 < \ldots < x_m \le n.$$

Bildet man die Differenzen dieser Zahlen, so kann man die folgende Aufgabe lösen.

1.143 Aufgabe: Auf wieviele verschiedene Arten kann man eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ in m Summanden zerlegen? Dabei soll nach der Reihenfolge der Summanden unterschieden werden. In anderen Worten, wieviele verschiedene Tupel

$$(n_1, \ldots, n_m)$$

in $\mathbb{N}$ gibt es, so dass

$$n_1 + \ldots + n_m = n$$

ist.

1.144 Aufgabe: Zeigen Sie für eine endliche Menge M

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}.$$

1.4.4 Abzählbare Mengen

1.145. Definition: Eine Menge M heißt **abzählbar** (engl.: countable), wenn es eine bijektive Abbildung

$$x : \mathbb{N} \to M$$

gibt. Wir schreiben, wie bei Tupeln, $x_i = x(i)$ und

$$M = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}.$$

1.146. Bemerkung: Endliche Mengen sind nicht abzählbar in obigem Sinn. Denn wenn T endlich ist und gleichzeitig abzählbar, dann gibt es bijektive Abbildungen

$$\{1, \ldots, n\} \leftrightarrow T \leftrightarrow \mathbb{N},$$

also eine bijektive Abbildung von $\{1, \ldots, n\}$ to $\mathbb{N}$. Dies ist aber nicht möglich, da das Bild von $\{1, \ldots, n\}$ als endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Maximum haben muss.

Wir fassen die wesentlichen Resultate über abzählbare Mengen in folgenden Satz zusammen, den wir allerdings nur zum Teil beweisen.

1.147 Satz: (1) *Das Bild einer abzählbaren Menge ist abzählbar oder endlich.*

(2) *Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar oder endlich.*

(3) *Das Kreuzprodukt zweier abzählbaren Mengen ist abzählbar.*

(4) *Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist abzählbar.*

Beweis: Wir lassen einige technische Details der Beweise aus. Der Leser ist eingeladen, sich diese Details zu überlegen.

(1) Es genügt zu zeigen, dass M abzählbar ist, wenn

$$\phi : \mathbb{N} \to M$$

surjektiv ist, M aber nicht endlich. Dazu konstruieren wir eine bijektive Abbildung

$$\psi : \mathbb{N} \to M$$

per Induktion. Wir wählen $\psi(1) = \phi(1)$. Wenn $\psi(1), \ldots, \psi(n)$ definiert sind, so setzen wir $\psi(n+1) = \phi(k)$, wobei $k \in \mathbb{N}$ das kleinste Element ist mit

$$\phi(k) \notin \{\psi(1), \ldots, \psi(n)\}$$

Dadurch ist offenbar gewährleistet, dass ψ injektiv ist. ψ ist aber in der Tat auch surjektiv, also bijektiv.

(2) Dies folgt unmittelbar aus (1), weil man leicht eine surjektive Abbildung von einer Menge auf eine Teilmenge angeben kann.

(3) Es gilt

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3),\ldots\}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

(4) Sei $\mathcal{S}$ ein abzählbares Mengensystem von abzählbaren Mengen, etwa

$$\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots\}.$$

Dann gibt es bijektive Abbildungen

$$\phi_i = \mathbb{N} \to S_i.$$

Die Abbildung

$$\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup \mathcal{S}$$

definiert durch

$$\phi(i,j) = \phi_i(j)$$

ist nun aber surjektiv. Daher ist $\bigcup \mathcal{S}$ abzählbar oder endlich. Da es aber zum Beispiel S_1 umfasst, kann es nicht endlich sein. $\square$

1.148 Aufgabe: Begründen Sie exakt, warum es im Beweis von (1) genügt, die Menge $\mathbb{N}$ zu betrachten.

Der folgende Satz zeigt, dass es überabzählbare Mengen geben muss.

1.149 Satz: (1) *Die Menge aller Abbildungen von einer abzählbaren Menge nach* $\{1,2\}$ *ist nicht abzählbar und nicht endlich.*

(2) *Die Menge aller Folgen in einer abzählbaren Menge ist nicht abzählbar und nicht endlich.*

(3) *Die Potenzmenge einer abzählbaren Menge ist nicht abzählbar.*

Beweis: (1) Es genügt, die Aussage für $\mathbb{N}$ zu beweisen. Sei

$$\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{A}(\mathbb{N}, \{1,2\})$$

eine Abbildung. Dann definieren wir

$$\psi : \mathbb{N} \to \{1,2\}$$

durch

$$\psi(n) = \begin{cases} 1, & \phi(n)(n) = 2, \\ 2, & \phi(n)(n) = 1. \end{cases}$$

Es folgt

$$\psi(n) \neq \phi(n)(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also $\psi \neq \phi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist ϕ nicht surjektiv. Man nennt dieses Argument **Cantorsches Diagonalargument**.

(2) Nach (1) lässt sich nicht einmal die Menge der Folgen abzählen, die nur 1 und 2 enthalten, und dies wäre eine Teilmenge der Menge aller Folgen. □

1.150 Aufgabe: Beweisen Sie (3), indem Sie eine bijektive Abbildung

$$\phi : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{A}(M, \{1, 2\})$$

angeben.

1.151. Definition: Zwei Mengen heißen **gleichmächtig**, wenn eine bijektive Abbildung zwischen ihnen existiert.

Also ist eine n-elementige Menge gleichmächtig mit $\{1, \dots, n\}$ und eine abzählbare Menge gleichmächtig mit $\mathbb{N}$.

1.152 Satz: *Keine Menge ist gleichmächtig mit ihrer Potenzmenge.*

Beweis: Angenommen, es gäbe für eine Menge M eine bijektive Abbildung

$$\phi : M \to \mathcal{P}(M).$$

Dann definieren wir

$$N = \{m \in M : m \notin \phi(m)\}.$$

Es muss nun ein $n \in M$ geben mit $\phi(n) = N$. Es folgt

$$n \in \phi(n) \quad \Leftrightarrow \quad n \notin \phi(n).$$

Dies ist ein Widerspruch. □

1.4.5 Das Auswahlaxiom

Ein umstrittenes Axiom der Mengenlehre ist das **Auswahlaxiom**. Es besagt, dass man aus jedem Element eines Mengensystems $\mathcal{S}$ ein Element auswählen kann und daraus eine neue Menge S bilden.

Daraus folgt, dass die Existenz einer Abbildung

$$\phi : \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S}$$

gefordert wird, so dass

$$\phi(S) \in S$$

für alle $S \in \mathcal{S}$ gilt.

Offenbar sichert dieses Axiom die Existenz von vielen Abbildungen, die nicht konstruktiv anzugeben sind. Daher gilt es als problematisch.

1.153. Bemerkung: Das Auswahlaxiom braucht natürlich nicht angewendet zu werden, wenn jedes $S \in \mathcal{S}$ genau ein Element enthält. Es braucht auch dann nicht angewendet zu werden, wenn man für jedes $S \in \mathcal{S}$ ein $s \in S$ eindeutig konstruktiv angeben kann.

1.154. Beispiel: Um zu zeigen, dass es eine Folge von rationalen Zahlen gibt, die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert, kann man konstruktiv oder nicht konstruktiv vorgehen. Eine konstruktive Folge ist etwa die rekursiv durch

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

definierte Folge. Eine nicht-konstruktive Lösung erhält man, indem man zeigt, dass ein $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n > 0$ existiert mit

$$2 - \frac{1}{n} \leq x_n^2 \leq 2 + \frac{1}{n}.$$

Mit Hilfe des Auswahlaxioms erhält man die gewünschte Folge.

1.155. Bemerkung: Für endliche Mengen $\mathcal{S}$ braucht man das Auswahlaxiom nicht. Da man es hier durch Induktion nach $|\mathcal{S}|$ beweisen kann.

1.156. Bemerkung: Das Auswahlaxiom wird gewöhnlich akzeptiert und in der Analysis auch verwendet, wenn $\mathcal{S}$ abzählbar ist, wie es im obigen Beispiel der Fall ist. Wir werden seine Verwendung hier vollständig vermeiden.

Kapitel 2

Vektorräume

In diesem Kapitel lernen wir eine allgemeine Theorie über Vektoren kennen. In der Schule tauchen Vektoren nur als Pfeile in der Zahlenebene oder im Raum auf. Schon dort werden Vektoren addiert und mit reellen Zahlen multipliziert. Vektoren lassen sich aber wesentlich allgemeiner definieren und nutzen.

2.1 Körper

2.1.1 Definition, Eigenschaften und Beispiele

In der Schule betrachtet man Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$, und stellt sie als Pfeile dar. Vektoren kann man addieren, indem man die Pfeile hintereinander hängt.

$$v, w \mapsto v + w.$$

Sie bilden eine Gruppe mit dieser Addition. Zu jedem Vektor v ist außerdem das Vielfache λv definiert, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

$$\lambda, v \mapsto \lambda v.$$

Der Pfeil wird um das λ-fache in seiner Länge gestreckt. Natürlich kann man $\mathbb{R}$ auch durch $\mathbb{Q}$, die Menge der Brüche, ersetzten. Die möglichen Zahlräume, die hier sinnvoll sind, werden in diesem Abschnitt vorgestellt.

2.1. Definition: Eine Menge K, auf der eine Addition

$$\begin{aligned} + : K \times K &\to K \\ x, y &\mapsto x + y \end{aligned}$$

und eine Multiplikation

$$\begin{aligned} * : K \times K &\to K \\ x, y &\mapsto xy \end{aligned}$$

gegeben sind, heißt **Körper** (engl.: field), wenn diese Operationen die folgenden Bedingungen erfüllen.

(1) Es gibt Elemente $0 \in K$ und $1 \in K$ mit $0 \neq 1$.

(2) Für die Addition gilt

$$x + y = y + x \qquad \text{für alle } x, y \in K,$$
$$x + (y + z) = (x + y) + z \qquad \text{für alle } x, y, z \in K,$$
$$x + 0 = x \qquad \text{für alle } x \in K,$$

und zu jedem $x \in K$ existiert ein Inverses Element $-x \in K$ mit

$$x + (-x) = 0.$$

(3) Für die Multiplikation gilt

$$xy = yx \qquad \text{für alle } x, y \in K,$$
$$x(yz) = (xy)z \qquad \text{für alle } x, y, z \in K,$$
$$1x = x \qquad \text{für alle } x \in K,$$

und zu jedem $x \in K$ mit $x \neq 0$ existiert ein Inverses Element $x^{-1} \in K$ mit

$$xx^{-1} = 1.$$

(4) Es gilt

$$x(y + z) = xy + xz \qquad \text{für alle } x, y, z \in K.$$

Die Rechenregel (4) heißt **Distributivgesetz**. Die anderen Rechenregeln haben wir schon bei der Betrachtung von Gruppen kennen gelernt.

2.2. Bemerkung: Jeder Körper K ist eine Gruppe bezüglich der Addition. Die Menge $K \setminus \{0\}$ ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation. Denn die Rechenregeln gelten wörtlich genauso, wenn man „+“ durch „·“ ersetzt. Wie wir gleich sehen werden, kann 0 kein multiplikatives Inverses haben, so dass es explizit ausgenommen werden muss. Wir können also alle Resultate über Gruppen auch in Körpern anwenden.

Wir schreiben für die Multiplikation $xy = x * y = x \cdot y$. Außerdem schreiben wir, wie üblich,

$$x - y := x + (-y)$$
$$\frac{x}{y} := xy^{-1}.$$

Man beachte, dass die Division laut Definition nur für $y \neq 0$ definiert ist.

2.3 Satz: *Das neutrale Element und das Inverse der Addition sind eindeutig festgelegt. In $K \setminus \{0\}$ ist das neutrale Element und das Inverse der Multiplikation eindeutig festgelegt. Es gilt*

$$x + y = x + \tilde{y} \;\Rightarrow\; x = y \qquad \textit{für alle } x, y, \tilde{y} \in K$$

und

$$xy = x\tilde{y} \;\Rightarrow\; x = y \qquad \textit{für alle } x, y, \tilde{y} \in K,\ x \neq 0.$$

Es gilt

$$-(x+y) = (-x) + (-y) \qquad \textit{für alle } x, y \in K$$
$$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \qquad \textit{für alle } x, y \in K \setminus \{0\}$$

Weiter gilt

$$0x = 0 \qquad \textit{für alle } x \in K.$$

Beweis: Die meisten Behauptungen und die Eindeutigkeiten haben wir schon im Rahmen von Gruppen bewiesen. Aufgrund des Distributivgesetzes gilt

$$0x + 0 = 0x = (0+0)x = 0x + 0x.$$

Es folgt $0x = 0$. □

Man beachte, dass aus $xy = x$ nur dann $y = 1$ folgt, wenn $x \neq 0$ ist. Im Fall $x = 0$, gilt die Gleichheit für jedes $y \in K$. Aufgrund des Satzes hat 0 kein Inverses Element bezüglich der Multiplikation.

2.4 Aufgabe: Beweisen Sie die folgenden bekannten Rechenregeln für Brüche.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bc} \qquad \text{für alle } a,\ c \text{ und } b \neq 0,\ d \neq 0,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \qquad \text{für alle } a \neq 0,\ b \neq 0,$$
$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \qquad \text{für alle } a \text{ und } b \neq 0,\ c \neq 0,$$
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} \qquad \text{für alle } a,\ c \text{ und } b \neq 0,\ d \neq 0,$$

2.5 Aufgabe: Zeigen Sie

$$(-x)y = -xy \qquad \text{für alle } x, y,$$
$$(-x)(-y) = xy \qquad \text{für alle } x, y,$$
$$(-x)^{-1} = -x^{-1} \qquad \text{für alle } x \neq 0$$

2.6. Beispiel: Die wichtigsten Beispiele sind natürlich die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen. Wir verweisen für diese Körper auf die Vorlesung in Analysis. Die komplexen Zahlen werden im nächsten Abschnitt behandelt.

2.7. Beispiel: Der kleinste Körper ist der Körper, der nur aus den Elementen 0 und 1 besteht, $K = \{0, 1\}$. Die Addition und die Multiplikation lässt sich hier per Aufzählung definieren.

$$0+0 = 1+1 = 0, \quad 0+1 = 1+0 = 0,$$
$$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Man rechnet nach, dass diese Operationen die KörperAxiome erfüllen. Dieser Körper ist interessant, weil man 0 als „falsch“ und 1 als „wahr“ interpretieren kann. Die Operation „+“ ist dann als „entweder, oder“ zu lesen, und die Operation „·“ entspricht „und“.

2.8 Aufgabe: Rechnen Sie nach, dass $K = \{0, 1\}$ mit diesen Operationen tatsächlich ein Körper ist.

2.9. Beispiel: Eine Erweiterung des vorherigen Beispiels sind die **Restklassenkörper**. Für eine Primzahl p definieren wir

$$K := \{0, \ldots, p-1\}$$

und definieren die Addition „$+_K$“ und die Multiplikation „$\cdot_K$“ durch

$$\begin{aligned} x +_K y &= x + y \mod p, \\ x \cdot_K y &= xy \mod p. \end{aligned}$$

Das bedeutet, wir berechnen die gewöhnliche Summe, und das gewöhnliche Produkt in $\mathbb{Z}$ und nehmen für das Ergebnis den Rest modulo p. Man zeigt, dass auch diese Rechenoperationen einen Körper definieren.

2.10. Beispiel: In der Algebra sind Körper der Form

$$K = \{a + b\sqrt{2} : a, b, \in \mathbb{Q}\}$$

interessant. Es gilt

$$\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}.$$

K erfüllt natürlich die Rechengesetze, die auch $\mathbb{R}$ erfüllt. Man muss aber $0 \in K$, $1 \in K$ sowie

$$x + y \in K, \quad xy \in K \qquad \text{für alle } x, y \in K$$

und

$$\begin{aligned} x \in K &\;\Rightarrow\; -x \in K, \\ x \in K \setminus \{0\} &\;\Rightarrow\; x^{-1} \in K \end{aligned}$$

zeigen.

2.11 Aufgabe: Zeigen Sie, dass K tatsächlich ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist.

2.1.2 Die komplexen Zahlen

Löst man die quadratische Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ nach x auf, so entstehen die beiden Lösungen

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Damit reelle Lösungen existieren, muss $a^2/4 \geq b$ sein. Die komplexen Zahlen sind nun ein Zahlkörper $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, in dem diese Gleichung immer Lösungen hat. Es genügt dazu, die Lösung

$$i = \sqrt{-1}$$

der Gleichung $x^2 = -1$ zu den reellen Zahlen „dazu zu nehmen". Wie dies genau geschehen kann, wird in der folgenden Definition ausgeführt.

2.12. Definition: Wir führen auf dem $\mathbb{R}^2$ eine Addition und eine Multiplikation ein. Dazu setzen wir.

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &= (a+c, b+d), \\ (a,b) \cdot (c,d) &= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Es wird sich herausstellen, dass $\mathbb{R}^2$ mit diesen Operationen ein Körper ist, den wir den Körper der **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ nennen.

2.13. Bemerkung: Mit Hilfe der bijektiven Abbildung

$$x \in \mathbb{R} \mapsto (x,0) \in \mathbb{C}$$

identifizieren wir $\mathbb{R}$ mit der Teilmenge

$$\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\},$$

die wir ebenfalls mit $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ bezeichnen. Man beachte, dass tatsächlich

$$\begin{aligned} x + y &\mapsto (x+y, 0) = (x,0) + (y,0), \\ xy &\mapsto (xy, 0) = (x,0) \cdot (y,0). \end{aligned}$$

Daher kann man ebensogut in $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ rechnen wie in $\mathbb{R}$. Außerdem definieren wir

$$i = (0,1).$$

Es gilt dann

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0,-1) = -1.$$

Es folgt für $a, b \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

$$a + ib = (a,0) + (0,1) \cdot (b,0) = (a,b).$$

Wir schreiben im folgenden die komplexen Zahlen nur noch in dieser Form, also

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

a heißt **Realteil** und b **Imaginärteil** von $a + ib$.

2.14. Bemerkung: Nun erklärt sich auch die seltsame Definition der Multiplikation. Wenn $\mathbb{C}$ ein Körper ist, so muss nach den Rechengesetzen für Körper gelten

$$(a+ib)(c+id) = ac + i^2 bd + i(ad+bc) = ac - bd + i(ad+bc).$$

Dies entspricht genau unserer Definition.

2.15 Aufgabe: Rechnen Sie nach, dass $\mathbb{C}$ tatsächlich ein Körper ist. Verwenden Sie

$$(a+ib)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i.$$

2.16. Definition: Für komplexe Zahlen definiert man

$$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2},$$
$$\overline{a+ib} = a - ib.$$

2.17. Bemerkung: Trägt man die komplexen Zahlen in der Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ auf, so dass der Realteil auf der x-Achse und der Imaginärteil auf der y-Achse abgetragen wird, so ist

- $|z|$ der Abstand von z zu 0,
- $\overline{z}$ die Spiegelung von z an der x-Achse,
- Die Addition $z+w$ die normale Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$.

Mit Hilfe von Mitteln der Analysis wird sich herausstellen, dass die Multiplikation zw die Winkel von z und w zur positiven x-Achse addiert und die Beträge multipliziert.

2.18 Aufgabe: Zeigen Sie

$$|zw| = |z|\,|w|.$$

und

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

2.19 Aufgabe: Zeigen Sie für $z \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

2.2 Vektorräume

2.2.1 Definition

2.20. Definition: Eine Menge V heißt **Vektorraum** (engl.: vector space) über einem Körper K, wenn es eine Addition

$$+ : V \times V \to V,$$
$$v, w \in V \mapsto v + w \in V$$

auf V gibt, die die Axiome einer Gruppe erfüllt, und eine Multiplikation

$$* : K \times V \to V,$$
$$\lambda \in K, v \in V \mapsto \lambda v \in V,$$

für die gelten

(1)
$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v) \qquad \text{für alle } \lambda, \mu \in K,\ v \in V,$$

(2)
$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \qquad \text{für alle } \lambda, \mu \in K,\ v \in V,$$

(3)
$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \qquad \text{für alle } \lambda \in K,\ v, w \in V,$$

(4)
$$1v = v \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Wir schreiben natürlich wieder $\lambda \cdot v = \lambda * v = \lambda v$. *Niemals* schreiben wir $v\lambda$. Manchmal schreibt man

$$\frac{v}{\lambda} := \frac{1}{\lambda} v.$$

Wir werden diese Schreibweise hier vermeiden.

2.21 Satz: *Die Addition erfüllt alle für Gruppen bisher gezeigten Rechengesetze. Insbesondere ist* 0 *und* $-v$ *für alle* $v \in V$ *eindeutig bestimmt, und es gilt* $-(-v) = v$. *Außerdem gilt in Vektorräumen V*

$$0 \cdot v = 0 \qquad \text{für alle } v \in V,$$

und

$$(-1) \cdot v = -v \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Man beachte, dass in $0 \cdot v = 0$ auf der linken Seite die Null des Körpers gemeint ist, und auf der rechten Seite die Null des Vektorraums. Derartige Schreibweisen sind üblich. Man vermeidet sie nur durch eine Indizierung

$$0_K \cdot v = 0_V,$$

die wir aber nicht verwenden wollen.

Beweis: Der Beweis der ersten Gleichung ist ganz analog dem Beweis von $0x = 0$ in Körpern. Also

$$0v + 0 = 0v = (0 + 0)v = 0v + 0v.$$

In Gruppen folgt daraus $0 = 0v$. Die zweite Gleichung gilt wegen

$$0 = 0v = (1 + (-1))v = 1v + (-1)v = v + (-1)v.$$

Addiert man $-v$ auf beiden Seiten, so erhält man $-v = (-1)v$. $\square$

2.2.2 Beispiele

2.22. Beispiel: Das „kanonische“ Beispiel für einen Vektorraum über K ist der K^n. Dieser Raum besteht aus allen Spaltenvektoren der Länge n, $n \in \mathbb{N}$, mit Einträgen aus K.

$$K^n := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \ldots, x_n \in K \}.$$

Mengentheoretisch ist jeder Vektor ein n-Tupel aus K. Ob man das Tupel als Spalte oder Zeile darstellt, scheint im Moment egal zu sein. Später werden wir jedoch einen Unterschied machen. Manchmal wird der Raum der Zeilenvektoren als

$$K_n := \{ \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} : x_1, \ldots, x_n \in K \}.$$

definiert. Wir werden diese Notation hier vermeiden. Die Addition definiert man als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix},$$

die Multiplikation als

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

2.23 Aufgabe: Zeigen Sie, dass der K^n mit dieser Addition und Multiplikation ein Vektorraum über K ist.

2.24. Beispiel: Der für uns wichtigste Vektorraum ist natürlich der $\mathbb{R}^n$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Solange keine Wurzeln auftreten, werden wir sogar meist im $\mathbb{Q}^n$ bleiben. Im Zusammenhang mit Eigenwerten tritt häufig der $\mathbb{C}^n$ auf.

Wie man in der Schule lernt, kann man die Vektoren im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ als gerichtete Pfeile interpretieren. Die Addition ist dann geometrisch das Hintereinanderhängen von Pfeilen, die Multiplikation das Strecken von Pfeilen um den Faktor λ. In Abbildung 2.1 ist dies dargestellt. Man beachte dass für $\lambda < 0$ die Richtung des Pfeiles umgedreht wird.

2.25. Bemerkung: Den K^1 identifizieren wir mit K. Der K^0 ist der Vektorraum, der nur aus der 0 besteht. Auch dieser **Nullraum** ist ein Vektorraum über K, wie man sich leicht überlegt.

2.26. Beispiel: Sei $K = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen. Sei

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$$

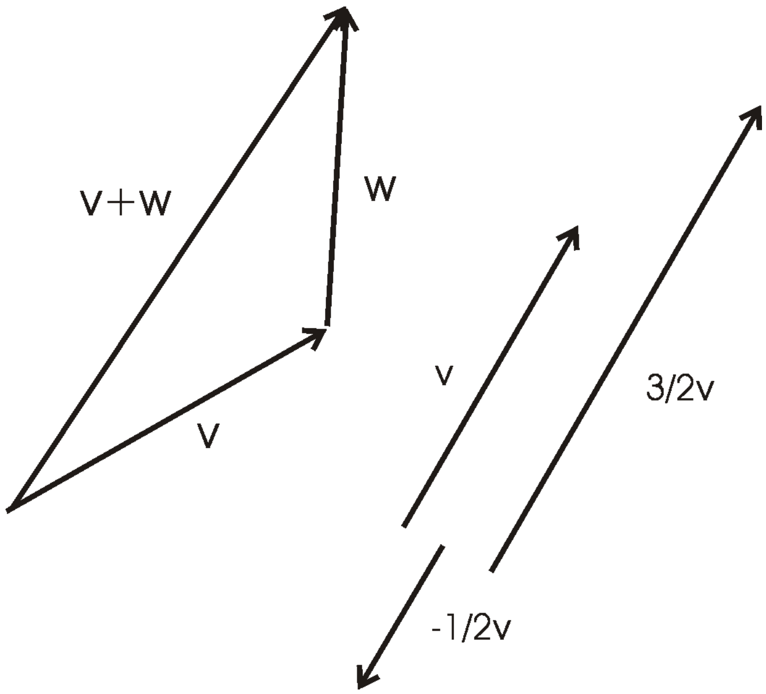

Abbildung 2.1: Vektoraddition und -Multiplikation im $\mathbb{R}^2$

ein Vektor, der die Zustände von n Lampen enthält. Dabei steht 0 für „aus" und 1 für „ein". Der Vektor

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in K^n$$

werde als ein Vektor mit Schaltern interpretiert, wobei 1 für „schalten" und 0 für „nicht schalten" stehe. Dann ist $w+v = v+w$ der Vektor der Lampenzustände, wenn die Schaltvorgänge von w auf die Lampenzustände von v angewendet werden.

2.27. Beispiel: Ein wichtiger Raum ist der Raum aller Abbildungen einer Menge M in einen Körper K also die Menge $\mathcal{A}(M,K)$. Auf diesem **Abbildungsraum** ist die Addition zweier Abbildungen $f, g : M \to K$ ist **punktweise** definiert. Also

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{für alle } x \in M.$$

Genauso ist die Multiplikation definiert, also

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

für alle $x \in M$.

2.28. Beispiel: Als wichtigen Spezialfall denke man an die Menge aller reellwertigen Funktionen auf einem reellen Intervall. Die Summe zweier Funktionen wird einfach punktweise berechnet. Wenn etwa

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 1$$

zwei Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind, so folgt für die Funktion $2f + g$

$$(2f + g)(x) = 2x^2 + 1.$$

2.29 Aufgabe: Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}(M, K)$ mit diesen Operationen ein Vektorraum über K ist.

2.30. Beispiel: Noch allgemeiner sei V ein Vektorraum über K. Dann ist die Menge aller Abbildungen von $\mathcal{A}(M, V)$ von M nach V ein Vektorraum über K, wenn die Addition und die Multiplikation wieder punktweise definiert sind.

2.31. Bemerkung: Da jeder Vektor in K^n ein Tupel ist, also eine Abbildung von $\{1, \ldots, n\}$ nach K, können wir den K^n mit dem Abbildungsraum

$$K^n = \mathcal{A}(\{1, \ldots, n\}, K^n).$$

identifizieren. Der K^n4 ist also nur ein Spezialfall eines Abbildungsraums.

2.32 Aufgabe: Machen Sie die Menge der Folgen in $\mathbb{R}$ zu einem Vektorraum. Schreiben Sie diesen Raum als Abbildungsraum und definieren Sie die Addition und die Multiplikation explizit.

2.2.3 Unterräume

2.33. Definition: Sei V ein Vektorraum über K und $U \subseteq V$. Dann heißt U ein **Unterraum** (engl.: subspace) von V, wenn U mit der in V definierten Addition und Multiplikation selbst ein Vektorraum über K ist.

Es ist klar, dass dann $v+w \in U$ für alle $v, w \in U$ sein muss. Man sagt, U muss **abgeschlossen** bezüglich der Addition sein. Dasselbe gilt für die Multiplikation. In der Tat sind diese Bedingungen hinreichend dafür, dass U ein Unterraum von V ist.

2.34 Satz: *Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Dann ist $U \subseteq V$ genau dann ein Unterraum von V, wenn für alle v, w, λ gelten*

$$\begin{aligned} v, w \in U &\;\Rightarrow\; v + w \in U, \\ \lambda \in K, v \in U &\;\Rightarrow\; \lambda v \in U. \end{aligned}$$

Beweis: Es ist klar, dass diese Bedingungen notwendig sind. Sonst sind „+“ und „·“ nicht richtig auf U definiert. Wenn umgekehrt diese Bedingungen gelten, dann sind die Abbildungen wohldefiniert. Es ist

$$0 = 0 \cdot v \in U \qquad \text{für alle } v \in V,$$

und

$$-v = (-1) \cdot v \in U \qquad \text{für alle } v \in U.$$

Also erfüllt die Addition die Gruppenaxiome auf U. Auch die Axiome für die Multiplikation sind in U erfüllt. $\square$

2.35. Beispiel: Jeder Vektorraum V enthält die trivialen Unterräume $\{0\}$ (den Nullraum) und V.

2.36. Beispiel: Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, $v \in V$. Dann ist

$$U := \{\lambda v : \lambda \in K\}$$

ein Unterraum von V. Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ ist U die Gerade die durch 0 geht in Richtung v.

2.37. Beispiel: Es gibt zahlreiche interessante Unterräume von $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ein typisches Beispiel ist die Menge aller stetigen Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$C(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ ist stetig auf } \mathbb{R}\}$$

Nach einem Satz der Analysis sind Summen und Vielfache von stetigen Funktionen wieder stetig. Analog ist $C[a, b]$ ein Unterraum von $\mathcal{A}([a, b], \mathbb{R})$.

2.38. Beispiel: Ebenso gibt es zahlreiche interessante Unterräume des Folgenraums auf $\mathbb{R}$. Beispiele sind

$$\begin{aligned} l_\infty &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n) \text{ ist beschränkt}\}, \\ l_1 &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \textstyle\sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty\}, \\ l_c &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \text{Nur endlich viele } x_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

2.39. Beispiel: Ein anderes Beispiel ist der Raum aller Polynome vom Grad n, $n \in \mathbb{N}_0$, den wir mit $\mathcal{P}_n$ bezeichnen. Dies ist der Unterraum aller Funktionen mit einer Darstellung

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ Koeffizienten sind. Wir können die Polynome als Funktionen in $C(\mathbb{R})$ betrachten und erhalten einen Unterraum

$$\mathcal{P}_n \subset C(\mathbb{R}).$$

Wir werden später aber Polynome auch als abstrakte Ausdrücke betrachten, mit denen man dennoch rechnen kann.

2.40 Aufgabe: Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^n$? Begründen Sie die Entscheidung! Zeichnen Sie diese Mengen für $n = 2$ in ein Koordinatensystem. Skizzieren Sie die Mengen für $n = 3$.

$$\begin{gathered} \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n = 1\}, \\ \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1\}, \\ \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2\}. \end{gathered}$$

(Hier wird immer implizit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ gesetzt).

2.2.4 Aufgespannter Unterraum

2.41. Definition: Sei V ein Vektorraum über K und $M \subseteq V$. Dann heißt der kleinste Unterraum U, der M enthält, der von M **aufgespannte Unterraum** (spanned subspace)

$$\operatorname{span}(M).$$

Das heißt, $\operatorname{span}(M)$ ist ein Unterraum mit der Eigenschaft, dass jeder Unterraum, der M enthält auch $\operatorname{span}(M)$ enthalten muss.

$$U \text{ Unterraum mit } M \subseteq U \;\Rightarrow\; \operatorname{span}(M) \subseteq U.$$

Die Frage ist, ob dieser Raum existiert. Dies ergibt sich aber aus dem folgenden Satz, in dem wir $\operatorname{span}(M)$ konstruktiv angeben. Wir benötigen zunächst eine Definition.

2.42. Definition: Seien $v_1, \ldots, v_n$ Elemente eines Vektorraums V über K und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Man nennt einen Ausdruck der Form

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

eine **Linearkombination** von $v_1, \ldots, v_n$.

2.43 Satz: *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Dann ist der aufgespannte Unterraum gleich der Menge aller Linearkombinationen aus M, also*

$$\operatorname{span}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i : v_1, \ldots, v_n \in V,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Beweis: Sei U der Raum aller Linearkombinationen. Dann ist U ein Unterraum, weil Summe und Vielfache von Linearkombinationen offenbar wieder Linearkombinationen sind. Andererseits muss jeder Unterraum, der M enthält auch alle Linearkombinationen aus M enthalten. Also ist der Raum aller Linearkombinationen der gesuchte aufgespannte Unterraum. □

Dieser Beweis der Existenz von $\operatorname{span}(M)$ war konstruktiv. Es gibt aber auch eine direkte Möglichkeit, die in vielen ähnlichen Situationen funktioniert, etwa bei der aufgespannten Untergruppe, oder beim aufgespannten Unterkörper. Dazu halten wir zunächst ein Hilfsresultat fest

2.44 Satz: *Der Durchschnitt eines Systems von Unterräumen eines Vektorraums V ist ein Unterraum.*

2.45 Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz.

2.46 Aufgabe: Gilt dies auch für die Vereinigung von Unterräumen?

2.47 Satz: *Sei V ein Vektorraum über K und $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Dann sei $\mathcal{U}$ die Menge der Unterräume, die M enthalten, also*

$$\mathcal{U} := \{U \subseteq V : U \textit{ Unterraum von } V \textit{ mit } M \subseteq U\}.$$

Es gilt dann

$$\operatorname{span}(M) = \bigcap \mathcal{U}.$$

Beweis: Wir setzen

$$D := \bigcap \mathcal{U}.$$

Wir wissen, dass D wieder ein Unterraum ist. Dann gilt für jeden Unterraum U mit $M \subseteq U$, dass $U \in \mathcal{U}$ ist, und daher $D \subseteq U$. □

2.48. Bemerkung: Der Nullraum wird offenbar entweder von der leeren Menge erzeugt. Denn er ist offenbar der kleinster Unterraum, der die leere Menge enthält. Der obige Satz ist auch in diesem Fall richtig.

2.49. Beispiel: Wenn

$$M = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

eine endliche Teilmenge von V ist, so ist

$$\operatorname{span}(M) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}.$$

Dies folgt unmittelbar aus Satz 2.43.

2.50. Beispiel: Für $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, $n = 2, 3$, ist

$$\operatorname{span}\{v\} = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

die von v aufgespannte Gerade durch 0. Für $v, w \in \mathbb{R}^3$, $v, w \neq 0$, ist

$$\operatorname{span}\{v, w\} = \{\lambda v + \mu w : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

die Ebene durch 0, die die Geraden $\operatorname{span}\{v\}$ und $\operatorname{span}\{w\}$ enthält, wenn die beiden Vektoren nicht in dieselbe Richtung zeigen.

2.51 Aufgabe: Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2$ die folgenden Mengen und die davon aufgespannten Unterräume.

$$\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\},$$

2.52 Aufgabe: Sei V ein Vektorraum über K, und $M_1, M_2 \subseteq V$ mit

$$M_1 \subseteq M_2.$$

Zeigen Sie

$$\operatorname{span}(M_1) \subseteq \operatorname{span}(M_2).$$

2.53. Beispiel: Betrachtet man die Funktionen

$$f_i(x) = x^i, \qquad i = 0, \ldots, n,$$

wobei x^0 für die Funktion 1 steht, so sind diese Funktionen Elemente von $C(\mathbb{R})$. Offenbar gilt

$$\operatorname{span}\{f_0, \ldots, f_n\} = \mathcal{P}_n.$$

Es gilt nämlich

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i\right)(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i.$$

2.2.5 Basen

2.54. Definition: Wenn ein Vektorraum V von einer Menge $M \subseteq V$ aufgespannt wird, so nennt man M ein **Erzeugendensystem** von V. Ein Erzeugendensystem heißt **Basis**, wenn es minimal ist. Das heißt, jede echte Teilmenge

$$\tilde{M} \subseteq M, \quad \tilde{M} \neq M$$

ist *kein* Erzeugendensystem von V mehr.

Eine Basis eines Vektorraums ist ein minimales Erzeugendensystem des Vektorraums.

Wir interessieren uns hier hauptsächlich, aber nicht ausschließlich, für Vektorräume und Untervektorräume, die ein endliches Erzeugendensystem haben. Man nennt solche Vektorräume **endlich erzeugt**.

2.55. Definition: Eine Teilmenge M eines Vektorraums V heißt **linear unabhängig**, wenn kein Element von M Linearkombination von anderen Vektoren in M ist. Das heißt

$$v \notin \operatorname{span}(M \setminus \{v\})$$

für alle $v \in M$.

2.56 Aufgabe: Sei

$$M = \{v_1, v_2\} \subset V.$$

Zeigen Sie, dass dann M genau dann linear unabhängig ist, wenn $v_1 \neq 0$ ist und v_2 kein Vielfaches von v_1 ist.

2.57. Bemerkung: Offenbar ist jede Teilmenge eines linear unabhängigen Systems wieder linear unabhängig.

2.58. Bemerkung: Ein linear unabhängige Menge von Vektoren kann die 0 nicht enthalten, weil

$$0 \in \{0\} = \operatorname{span} \emptyset$$

ist. Insbesondere ist die Menge $\{0\}$ nicht linear unabhängig. Aber die leere Menge $\emptyset$ ist linear unabhängig und daher Basis des Nullraums.

Wir charakterisieren nun linear unabhängige Systeme auf eine äquivalente Art und Weise, die manchmal als Definition für lineare Unabhängigkeit verwendet wird.

2.59 Satz: *Eine Teilmenge M eines Vektorraums V, $M \neq \emptyset$, $M \neq \{0\}$. Dann sind äquivalent:*

(1) *M ist linear unabhängig.*

(2) *Für je endlich viele paarweise verschiedene $v_1, \ldots, v_n \in M$ und beliebige $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gilt*

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

(3) *Jedes $v \in \mathrm{span}\,(M) \setminus \{0\}$ lässt sich eindeutig (bis auf die Reihenfolge) als Linearkombination*

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$ und paarweise verschiedenen $v_1, \ldots, v_n \in M$ darstellen.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Sei M linear unabhängig. Seien dann $v_1, \ldots, v_n \in M$ paarweise verschieden und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0.$$

Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Angenommen $\lambda_1 \neq 0$. Dann kann man schreiben

$$v_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \ldots + \frac{-\lambda_n}{\lambda_1} v_n.$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass M linear unabhängig ist. Also muss $\lambda_1 = 0$ sein. Analog zeigt man $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Angenommen v sei auf zweierlei Arten als Linearkombination darstellbar. Dann können wir annehmen, dass

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \\ &= \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \end{aligned}$$

mit paarweise verschiedenen $v_1, \ldots, v_n \in M$ ist und die beiden Darstellungen voneinander verschieden sind. (Dazu sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ die Vereinigung der Vektoren, die in beiden, verschiedenen Darstellungen vorkommen.) Es folgt

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n.$$

Nach Voraussetzung erhält man $\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_n = \mu_n$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass v auf zwei verschiedene Arten darstellbar sein soll.

(3) $\Rightarrow$ (1): Wieder führen wir den Beweis durch Widerspruch. Angenommen, M ist nicht linear unabhängig. Dann gibt es ein $v \in M$, das von den übrigen linear abhängig ist. Also

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

mit $v_1, \ldots, v_n \in M \setminus \{v\}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Aber wir haben in dieser Gleichung offenbar zwei verschiedene Darstellungen des Vektors v vorliegen. Dies ist ein Widerspruch zu (3). □

2.60. Bemerkung: Für endliche Systeme $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$ spricht man einfach von linearer Unabhängigkeit der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$, oder auch von Tupeln von Vektoren

$$\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n).$$

Um linear unabhängig sein zu können, müssen die Vektoren dann paarweise verschieden sein. Nach dem eben bewiesenen Satz muss außerdem für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gelten

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Äquivalent müssen die Darstellungen als Linearkombination eindeutig sein. Also

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \;\Rightarrow\; \lambda_i = \mu_i \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Die Bedingung (2) ist nur ein Spezialfall davon.

Der folgende Satz dient uns zum Generieren von Basen. Wir streichen aus einem System solange linear abhängige Vektoren, bis dies nicht mehr geht.

2.61 Satz: *Sei M ein Erzeugendensystem von V, und $v \in M$ von den übrigen Vektoren in M linear abhängig, also*

$$v \in \operatorname{span}(M \setminus \{v\}).$$

Dann ist $M \setminus \{v\}$ ebenfalls ein Erzeugendensystem von V.

Beweis: Wenn $v = 0$ ist, so ist $M \setminus \{v\}$ in jedem Fall ebenfalls ein Erzeugendensystem von V (auch wenn V der Nullraum ist). Sonst gibt es nach Voraussetzung $v_1, \ldots, v_n \in M \setminus \{v\}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

Wir müssen zeigen, dass $M \setminus \{v\}$ dann auch ein Erzeugendensystem von V ist. Sei also $w \in V$ und

$$w = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_k w_k$$

mit paarweise verschiedenen $w_1, \ldots, w_k \in V$ und Koeffizienten $\mu_1, \ldots, \mu_k \in K$. Dann müssen wir w als Linearkombination aus $M \setminus \{v\}$ darstellen. Wenn v unter den Vektoren $w_1, \ldots, w_k$ nicht vorkommt, so sind wir fertig. Wenn etwa $v = w_1$ ist, so gilt

$$w = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_1 \lambda_n v_n + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_k w_k \in \operatorname{span}(M \setminus \{v\})$$

Analog für $v = w_2$ etc. $\square$

Den nächsten Satz formulieren wir hier nur für endliche Systeme. Für unendliche Systeme benötigt man das Auswahlaxiom. Darauf gehen wir hier nicht weiter ein.

2.62 Satz: *Sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V. Dann gibt es ein Teilsystem, das eine Basis von V ist. Also ist jeder endlich erzeugte Vektorraum endlich-dimensional.*

Beweis: Gemäß dem vorigen Satz streichen wir solange Vektoren aus diesem Erzeugendensystem, bis wir ein linear unabhängiges System erhalten, das aber immer noch Erzeugendensystem ist. Dieses Erzeugendensystem ist minimal, weil kein Vektor mit Hilfe der übrigen darstellbar ist. □

2.63 Aufgabe: Sei M linear unabhängig in V und $M \cup \{v\}$ linear abhängig. Zeigen Sie, dass dann

$$v \in \operatorname{span}(M)$$

sein muss.

Es folgt ein wichtiger Satz, mit dem wir Basen, also minimale Erzeugendensysteme, mit Hilfe von linearer Unabhängigkeit charakterisieren können.

2.64 Satz: *Sei M eine Teilmenge eines Vektorraums V. Dann sind äquivalent:*

(1) *M ist ein minimales Erzeugendensystem von V (also eine Basis).*

(2) *M ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.*

(3) *M ist ein maximales linear unabhängiges System in V. (Das heißt, jede echte Obermenge von M ist nicht mehr linear unabhängig.)*

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Sei M eine Basis. Es muss nur gezeigt werden, dass M linear unabhängig ist. Dies folgt aber unmittelbar aus Satz 2.61.

(2) $\Rightarrow$ (3): Diesen Beweis führen wir durch Widerspruch. Sei also M ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Angenommen $\tilde{M}$ ist eine echte Obermenge von M, die linear unabhängig ist. Sei $v \in \tilde{M} \setminus M$. Dann ist $M \cup \{v\}$ also als Teilmenge einer linear unabhängigen Menge selbst linear unabhängig. Es folgt

$$v \notin \operatorname{span}(M).$$

Also wäre M kein Erzeugendensystem. Dies ist ein Widerspruch.

(3) $\Rightarrow$ (1): Sei M ein maximales linear unabhängiges System in V. Dann lässt sich jedes $v \in V$ als Linearkombination aus M darstellen, weil sonst $M \cup \{v\}$ nach Aufgabe 2.63 linear unabhängig wäre. Also ist M ein Erzeugendensystem. Kein $w \in M$ lässt sich als Linearkombination von anderen Elementen in M darstellen, weil M linear unabhängig ist. Also ist M ein minimales Erzeugendensystem. □

Jedes linear unabhängige Erzeugendensystem ist ein minimales Erzeugendensystem und ein maximales System von linear unabhängigen Vektoren

Wir halten noch den folgenden Sachverhalt fest, der sich unmittelbar aus den obigen Sätzen ergibt.

2.65 Satz: *Eine Teilmenge*

$$\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$$

von Vektoren aus V ist genau dann eine Basis von V, wenn sich jedes $v \in V$ eindeutig als Linearkombination

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n$$

schreiben lässt.

Beweis: Nach Voraussetzung ist V ein Erzeugendensystem. Nach 2.59 oder der nachfolgenden Bemerkung ist V linear unabhängig. Nach Satz 2.64 ist V eine Basis. $\square$

2.2.6 Endlich-Dimensionale Vektorräume

2.66. Definition: Wenn $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist, so heißt n die **Dimension** von V. Man schreibt

$$\dim V = n.$$

In diesem Fall nennt man V **endlich-dimensional**.

2.67. Bemerkung: Der Nullraum $\{0\}$ hat vereinbarungsgemäß die Dimension 0. Man muss aber bei Beweisen über Dimensionen diesen Sonderfall stets im Auge behalten.

Die Definition von Erzeugendensystem, Basis und Dimension gilt natürlich auch für Unterräume, die ja selber Vektorräume sind. Wir müssen noch zeigen, dass die Dimension eine eindeutig bestimmte Zahl ist. Zuvor jedoch ein paar Beispiele.

2.68. Beispiel: Die Vektoren

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind eine Basis des K^n. Denn jedes Element wird eindeutig als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

dargestellt. Man nennt die Basis die **kanonische Basis** des K^n und die Vektoren die **Einheitsvektoren**. Es gilt also

$$\dim K^n = n.$$

2.69. Beispiel: Zwei Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ spannen genau dann eine Ebene auf, wenn sie linear unabhängig sind. Die Dimension dieser Ebenen ist dann 2. Sonst gilt entweder $v_1 = v_2 = 0$, und die Vektoren spannen den Nullraum mit Dimension 0 auf, oder ein Vektor ist Vielfaches des anderen, und die Vektoren spannen eine Gerade mit Dimension 1 auf.

2.70. Beispiel: Der Nachweis der linearen Unabhängigkeit, ebenso wie die Berechnung einer Linearkombination im K^n erfordert das Aufstellen und Lösen eines linearen Gleichungssystems.

2.71 Aufgabe: Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$. Stellen Sie den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 dar, und weisen Sie nach, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind. Verwenden Sie dazu jeweils ein lineares Gleichungssystem mit 3 Unbekannten und drei Gleichungen.

2.72. Beispiel: Wir betrachten wieder den Raum aller Polynome n-ten Grades

$$\mathcal{P}_n \subset C(\mathbb{R}).$$

Wir zeigen, dass die Funktionen

$$f_i(x) = x^i, \qquad i = 0, \ldots, n$$

eine Basis von $\mathcal{P}_n$ bilden. Diese Funktionen sind ein Erzeugendensystem, wie wir schon gesehen haben. Wir zeigen, dass die Funktionen linear unabhängig sind. Sei

$$p := \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0,$$

wobei mit 0 die Nullfunktion gemeint ist, die auf ganz $\mathbb{R}$ identisch 0 ist. Wir müssen zeigen, dass alle $\lambda_i = 0$ sind. Es folgt also

$$p(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere

$$p(0) = \lambda_0 = 0.$$

Da p identisch 0 ist, folgt durch k-faches Ableiten auch

$$p^{(k})(0) = k!\lambda_k = 0,$$

für $k = 1, \ldots, n$. In der Tat folgt also

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Wir zeigen nun, dass die Längen aller Basen eines endlich-dimensionalen Vektorraums gleich sind. Die Dimension ist also wohlbestimmt.

2.73 Satz: *(Steinerscher* ***Austauschsatz****) Sei V ein Vektorraum, $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V und $w_1, \ldots, w_k$ linear unabhängig. Dann gilt*

$$k \leq n$$

und man kann k Vektoren der $v_1, \ldots, v_n$ durch $w_1, \ldots, w_k$ ersetzen, so dass man wieder ein Erzeugendensystem erhält.

Beweis: Wir setzen induktiv einen Vektor w_i nach dem anderen in das Erzeugendensystem ein. Sei zunächst

$$w_1 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit ist $w_1 \neq 0$. Also zum Beispiel $\lambda_1 \neq 0$. Dann ersetzen wir v_1 durch w_1. Wir müssen nun zeigen, dass

$$w_1, v_2, \ldots, v_n$$

noch immer ein Erzeugendensystem von V ist. Klar ist, dass

$$w_1, v_1, v_2, \ldots, v_n$$

ein Erzeugendensystem ist. Es gilt aber

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n.$$

Nach Satz 2.61 kann man daher v_1 streichen und erhält immer noch ein Erzeugendensystem.

Wenn wir $w_1, \ldots, w_m$, $m < k$ ersetzt haben, so können wir nach Umnummerierung der v_i annehmen, dass ein Erzeugendensystem

$$w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$$

entstanden ist. Sei nun

$$w_{m+1} = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_m w_m + \lambda_{m+1} v_{m+1} + \ldots + \lambda_n v_n.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der w_i muss einer der Koeffizienten

$$\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$$

ungleich 0 sein. Insbesondere muss $m < n$ sein. Wenn zum Beispiel $\lambda_{m+1} \neq 0$ ist, so können wir mit demselben Argument wie oben w_{m+1} gegen v_{m+1} tauschen.

Wir setzen den Austausch fort, bis alle w_i eingetauscht sind. □

Der folgende Satz besagt, dass die Dimension eines endlich erzeugten Vektorraums eine wohldefinierte Größe ist.

2.74 Satz: *Alle Basen eines endlich-dimensionalen Vektorraums haben die gleiche Länge.*

Beweis: Für den Nullraum ist diese Aussage klar. Ansonsten seien $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$ zwei Basen. Nach dem Austauschsatz ist $m \leq n$ und $n \leq m$. □

Wir geben nun noch zwei Sätze über endlich-dimensionale Vektorräume an, die sehr nützlich sein werden.

2.75 Satz: *In einem n-dimensionalen Vektorraum ist jedes Erzeugendensystem der Länge n eine Basis. Es gibt kein System mit mehr als n linear unabhängigen Vektoren.*

Beweis: Sein $w_1, \ldots, w_n$ ein Erzeugendensystem, und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis, also insbesondere linear unabhängig. Dann ist $w_1, \ldots, w_n$ ein minimales Erzeugendensystem, weil man sonst einen Widerspruch zum Austauschsatz erhält. Die zweite Aussage ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Austauschsatz. □

2.76 Satz: *Jedes linear unabhängige System eines endlich dimensionalen Vektorraums lässt sich zu einer Basis ergänzen.*

Beweis: Für die leere Menge stimmt der Satz. Sei $w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängig und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Nach dem Steinerschen Austauschsatz ist $m \leq n$, und man kann die w_i in die Basis eintauschen, so dass man ein Erzeugendensystem der Länge n erhält, das die Vektoren $w_1, \ldots, w_m$ umfasst. Dies ist nach dem letzten Satz eine Basis von V. □

Den folgenden, nicht trivialen Satz erhalten wir nunmehr leicht aus dem bisherigen Sätzen. Der Satz erlaubt es, Unterräume mit ihrer Dimension zu charakterisieren.

2.77 Satz: *Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und U ein Unterraum. Dann ist auch U endlich-dimensional und*

$$\dim U \leq \dim V$$

Außerdem gilt

$$U = V \;\Leftrightarrow\; \dim U = \dim V$$

Beweis: Jede Basis von V ist natürlich ein Erzeugendensystem von U. Also ist U endlich erzeugt und damit endlich-dimensional. In V, und damit erst recht in U, kann es allerdings kein System von mehr als $\dim V$ linear unabhängigen Vektoren geben. Also $\dim U \leq \dim V$.

Sei nun $\dim U = \dim V$. Dann ist jede Basis von U ein linear unabhängiges System in V der Länge $\dim V$. Nach dem vorigen Satz ist jede Basis von U also auch Basis von V. Es folgt $U = V$. □

2.78. Beispiel: Im $\mathbb{R}^2$ gibt es einen Unterraum der Dimension 0, nämlich $\{0\}$, Unterräume der Dimension 1, nämlich Geraden durch 0, und einen Unterraum der Dimension 2, nämlich den $\mathbb{R}^2$.

2.79 Aufgabe: Sei $U \subset \mathcal{P}_n$ der Raum der Polynome mit $p(0) = 0$. Zeigen Sie, dass dies ein Unterraum von $\mathcal{P}_n$ ist und geben Sie eine Basis für diesen Raum an.

2.2.7 Summen von Unterräumen

2.80. Beispiel: Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Es gibt dann eine Ebene durch 0, die die Geraden

$$G_1 = \operatorname{span}\{v_1\}, \quad G_2 = \operatorname{span}\{v_2\}$$

enthält, nämlich

$$E = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}.$$

Da v_1, v_2 linear unabhängig sind, lässt sich jedes $v \in E$ eindeutig als

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = w_1 + w_2$$

mit $w_1 \in G_1$ und $w_2 \in G_2$ schreiben. Man kann also E als die Summe der Geraden auffassen

$$E = G_1 + G_2 := \{w_1 + w_2 : w_1 \in G_1,\ w_2 \in G_2\}.$$

2.81. Definition: Seien U_1, U_2 Unterräume eines Vektorraums V. Dann definieren wir die **Summe der Unterräume** U_1, U_2 als

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}.$$

Wenn jedes $u \in U_1 + U_2$ eine eindeutige Summendarstellung hat, so heißt $U_1 + U_2$ **direkte Summe** der Vektorräume und man schreibt für die Summe in diesem Fall

$$U_1 \oplus U_2.$$

Für den folgenden Satz erinnern wir uns, dass der Durchschnitt zweier Unterräume wieder ein Unterraum ist.

2.82 Satz: *(Dimensionsformel) Es gilt für zwei Unterräume U_1, U_2 eines endlich-dimensionalen Vektorraums*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Beweis: $U_1 \cap U_2$ ist ein Unterraum von U_1. Falls einer der beteiligten Unterräume die Dimension 0 hat, so wird dieser Sonderfall in der folgenden Aufgabe behandelt. Ansonsten wählen wir eine Basis $v_1, \ldots, v_k$ von $U_1 \cap U_2$ und ergänzen diese Basis zu einer Basis

$$v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n$$

von U_1. Analog ergänzen wir diese Basis zu einer Basis

$$v_1, \ldots, v_k, s_{k+1}, \ldots, s_m$$

von U_2. Unmittelbar aus der Definition der Summe $U_1 + U_2$ folgt dann, dass

$$v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n, s_{k+1}, \ldots, s_m$$

ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$ ist. Wir zeigen nun, dass dieses System linear unabhängig ist. Sei dazu

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \mu_i w_i + \sum_{i=k+1}^{m} \eta_i s_i.$$

Da $v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind, genügt es zu zeigen dass alle Koeffizienten $\eta_{k+1}, \ldots, \eta_m$ gleich 0 sind. Es gilt aber aufgrund der obigen Darstellung

$$h := \sum_{i=k+1}^{m} \eta_i s_i \in U_1 \cap U_2.$$

Also ist h als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_k$ darstellbar. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_k, s_{k+1}, \ldots, s_m$ ist aber h eindeutig mit diesem Koeffizienten darstellbar. Es folgt $h = 0$ und

$$\eta_{k+1} = \ldots = \eta_m = 0.$$

□

2.83 Aufgabe: Überlegen Sie sich, dass die Dimensionsformel auch für die Sonderfälle

$$\dim U_1 = 0, \quad \dim U_2 = 0, \quad \dim(U_1 \cap U_2) = 0$$

korrekt ist.

2.84 Satz: *Genau dann ist $U_1 + U_2$ direkte Summe von U_1, U_2 wenn*

$$U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

ist. In diesem Fall ist

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Beweis: Sei $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Es gebe zwei Darstellungen

$$v = u_1 + u_2 = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$$

mit $u_1, \tilde{u}_1 \in U_1$ und $u_2, \tilde{u}_2 \in U_2$. Dann folgt

$$u_1 - \tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 - u_2 \in U_1 \cap U_2.$$

Also nach Voraussetzung $u_1 = \tilde{u}_1$ und $u_2 = \tilde{u}_2$.

Sei umgekehrt die Darstellung immer eindeutig, und $v \in U_1 \cap U_2$. Dann sind

$$v + 0 = 0 + v$$

zwei Darstellungen von v als Summe aus U_1 und U_2. Da diese Darstellungen gleich sein sollen, muss $v = 0$ sein. □

2.85 Aufgabe: Sei V endlich-dimensional und $U_1 \subseteq V$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass es einen Unterraum $U_2 \subseteq V$ gibt, so dass

$$V = U_1 \oplus U_2$$

ist.

2.3 Analytische Geometrie

Als „analytische Geometrie“ bezeichnet man Geometrie, die Koordinaten verwendet. Studiert werden geometrische Objekte und Beziehungen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. In diesem Abschnitt studieren wir lediglich Geraden, Ebenen und Strecken im Raum.

Im Gegensatz zur analytischen Geometrie steht die „synthetische Geometrie“, die geometrische Objekte axiomatisch festlegt. Wir betrieben diese Geometrie, die auf die Griechen zurück geht und jahrtausende lang eine wichtige Säule der Mathematik war, hier nicht.

2.3.1 Affine Unterräume

2.86. Definition: Sei V ein Vektorraum über K und U ein Unterraum von V. Zu $a \in V$ bezeichnet man dann die Menge

$$a + U := \{a + u : u \in U\}$$

als **affinen Unterraum** (affine subspace) von V. Die Dimension des affinen Unterraums ist die Dimension von U.

Die Summe oder Differenz von Mengen oder eines Vektors mit einer Menge ist eine nützliche Notation. Sie muss aber mit Vorsicht benutzt werden. So gilt etwa für jeden Unterraum U

$$U - U := \{u_1 - u_2 : u_1, u_2 \in U\} = U.$$

2.87. Beispiel: Man kann in beliebigen Vektorräumen Geraden als 1-dimensionale affine Unterräume definieren. Eine Gerade ist damit von der Form

$$G = \{a + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

mit $a, v \in V$ und $v \neq 0$ (siehe Abbildung 2.2). Im $\mathbb{R}^3$ werden wir außerdem Ebenen als 2-dimensionale affine Unterräume charakterisieren (siehe Abbildung 2.3).

Die Dimension eines affinen Unterraums scheint von der konkreten Darstellung abzuhängen. Die folgende Aufgabe zeigt, das das nicht so ist.

2.88 Aufgabe: Sei

$$E = a + U$$

ein affiner Unterraum und $b \in E$. Zeigen Sie

$$E = b + U.$$

2.89. Bemerkung: Aufgrund dieser Aufgabe ist der Unterraum U, der zu einem affinen Unterraum E gehört, eindeutig durch

$$U = E - a$$

gegeben, wobei $a \in A$ beliebig gewählt werden kann.

2.90 Satz: *Der Schnitt von zwei affinen Unterräumen*

$$E_1 = a_1 + U_1, \quad E_2 = a_2 + U_2$$

ist entweder leer, oder

$$E_1 \cap E_2 = b + (U_1 \cap U_2).$$

mit einem beliebigen $b \in E_1 \cap E_2$.

Beweis: Wenn der Schnitt nicht leer ist, so wählen wir ein beliebiges $b \in E_1 \cap E_2$. Aufgrund von Aufgabe 2.88 ist

$$E_1 = b + U_1, \quad E_2 = b + U_2.$$

„$\subseteq$“: Sei nun $c \in E_1 \cap E_2$. Dann ist

$$c = b + u_1 = b + u_2$$

mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$. Es folgt $u_1 = u_2$, also

$$c \in b + (U_1 \cap U_2).$$

„$\supseteq$“ Sei umgekehrt $c = b + u$ mit $u \in U_1 \cap U_2$. Dann ist offenbar $c \in E_1 \cap E_2$.
$\square$

2.91 Aufgabe: Seien

$$A_1 = a_1 + U_1, \quad A_2 = a_2 + U_2$$

zwei affine Unterräume.

(1) Zeigen Sie, dass genau dann $A_1 \subseteq A_2$ gilt, wenn $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ ist und $U_1 \subseteq U_2$.

(2) Folgern Sie, dass genau dann $A_1 = A_2$ gilt, wenn $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ ist und $U_1 = U_2$.

2.92 Satz: *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, wobei wir $n = \infty$ zulassen, $k \leq n$ und*

$$a_1, \ldots, a_{k+1} \in V$$

Punkte, die in keinem $k-1$-dimensionalen affinen Unterraum liegen. Dann gibt es genau einen affinen Raum der Dimension k, der alle diese Punkte enthält.

Beweis: Existenz: Die Existenz ist sehr einfach zu zeigen. Dazu setzen wir

$$a = a_1, v_1 = a_2 - a_1, \ldots, v_k = a_{k+1} - a_1.$$

und setzen

$$E = a + \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}.$$

Wegen

$$a_1 = a + 0, a_2 = a + v_1, \ldots, a_{k+1} = a + v_k$$

enthält E alle Punkte $a_1, \ldots, a_{k+1}$. Offenbar gilt

$$\dim E = \dim \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\} \leq k$$

Aufgrund der Annahme folgt $\dim E = k$.

Eindeutigkeit: Nehmen wir an, dass H ein zweiter affiner Unterraum der Dimension k ist, der die Punkte enthält. Dann gilt also $a = a_1 \in E \cap H$. Es gilt

$$v_1, \ldots, v_k \in H - a$$

Also

$$E - a = \text{span}\,\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq H - a.$$

Andererseits haben diese Unterräume dieselbe Dimension k. Also sind sie nach Satz 2.77 gleich. Aus Teil (2) von Aufgabe 2.91 folgt $E = H$. □

2.93. Definition: Ein affiner Unterraum $E_1 = a_1 + U_1$ verläuft **parallel** zu einem anderen affinen Unterraum $E_2 = a_2 + U_2$, wenn sich E_1 und E_2 nicht schneiden und $U_1 \subseteq U_2$ ist. Die affinen Unterräume heißen parallel, wenn sie sich nicht schneiden und $U_1 = U_2$ ist.

Eine Gerade kann also parallel zu einer Ebene verlaufen, aber nur affine Unterräume gleicher Dimension können zueinander parallel sein.

2.3.2 Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Ein 0-dimensionaler affiner Unterraum ist nur ein Punkt. Der erste interessante affine Unterraum hat die Dimension 1.

2.94. Definition: Eine **Gerade** im $\mathbb{R}^n$ ist definiert als eine 1-dimensionaler affiner Unterraum, also

$$G = \{a + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

wobei $a \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt ist, und $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, der Richtungsvektor.

Wir haben also

$$G = a + \text{span}\,\{v\}.$$

$\text{span}\,\{v\}$ ist ein eindimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$, nämlich eine Gerade durch 0.

2.95. Beispiel: Im Bild 2.2 ist die Gerade

$$G = a + \text{span}\,\{v\}$$

eingezeichnet. Setzt man die Wert für a und v ein, so ergibt sich

$$G = \{\begin{pmatrix} 0.2 + 0.4\lambda \\ 0.7 + 0.2\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Nach Satz 2.92 gibt es im $\mathbb{R}^n$ genau eine Gerade durch zwei verschiedene Punkte. Denn zwei verschiedene Punkte können nicht gemeinsam in einem 0-dimensionalen affinen Unterraum von $\mathbb{R}$ liegen. Wie im Beweis von Satz 2.92 festgestellt wurde, ist die Gerade durch a und b die Menge

$$G := \{a + \lambda(b - a) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

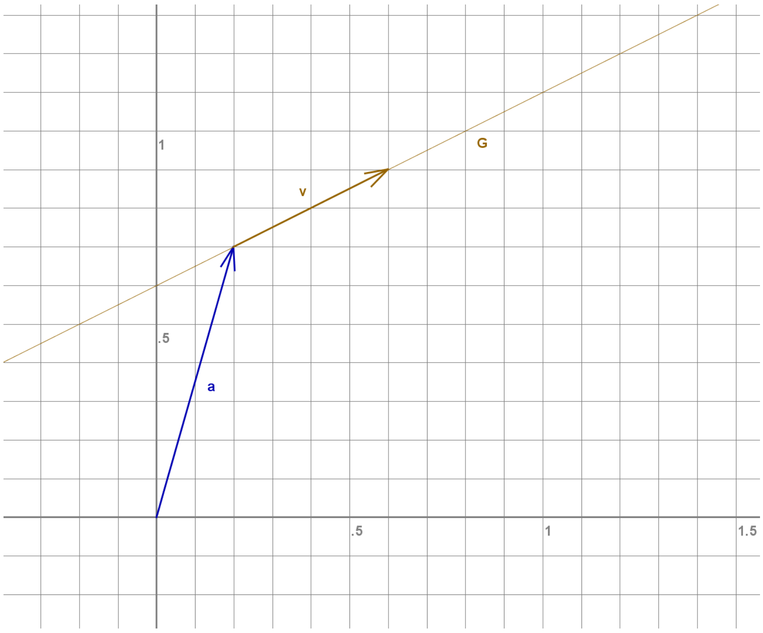

Abbildung 2.2: Eine Gerade G im $\mathbb{R}^2$

2.96. Definition: Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist ein 2-dimensionaler affiner Unterraum, also

$$E = a + \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$$

mit linear unabhängigen Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, und $a \in \mathbb{R}^3$.

Als Beispiel für die Art von Sachverhalten, die man mit Hilfe der Dimension beweisen kann, geben wir folgenden Satz an.

2.97 Satz: *Der Schnitt zweier Ebenen im $\mathbb{R}^3$ ist leer, eine Gerade oder beide Ebenen sind gleich.*

Beweis: Wenn der Schnitt der Ebenen nicht leer ist, so haben beide Ebenen eine Darstellung

$$E_1 = b + U_1, \quad E_2 = b + U_2$$

(siehe dazu den Beweis von Satz 2.90) mit

$$\dim U_1 = \dim U_2 = 2.$$

Es gilt dann

$$E_1 \cap E_2 = b + (U_1 \cap U_2).$$

Die Frage ist, welche Dimensionen $U_1 \cap U_2$ haben kann. Nach Satz 2.82 gilt

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = 4 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Andererseits gilt nach Satz 2.77

$$\dim(U_1 + U_2) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3.$$

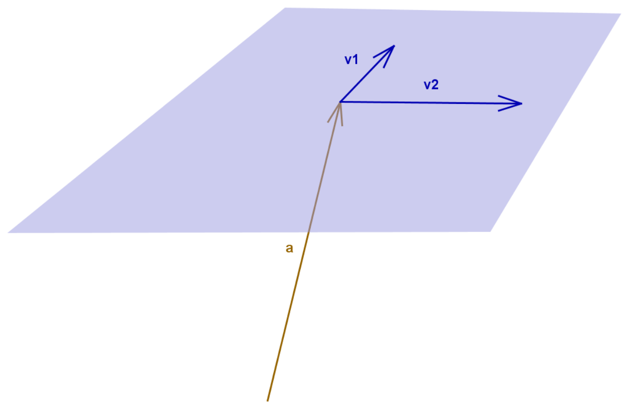

Abbildung 2.3: Ebene im $\mathbb{R}^3$

Also

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq 1.$$

Falls diese Dimension gleich 1 ist, so ist der Schnitt also eine Gerade. Falls sie gleich 2 ist, so folgt wegen $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$, wieder aus Satz 2.77, dass $U_1 \cap U_2 = U_1 = U_2$ ist. Also sind die Ebenen in diesem Fall gleich. $\square$

2.98 Aufgabe: Sei G eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ und $b \in \mathbb{R}^2$, $b \notin G$. Zeigen Sie, dass es genau eine zu G parallele Gerade durch b gibt.

2.99 Aufgabe: Sei E eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ und $b \in \mathbb{R}^3$, $b \notin E$.

(1) Zeigen Sie, dass es unendliche viele Geraden durch b gibt, die parallel zu E verlaufen.

(2) Zeigen Sie, dass jede Gerade durch b entweder parallel zu E verläuft oder E schneidet.

2.3.3 Strecken und konvexe Mengen

Bei der Definition von Strecken nutzen wir zum ersten Mal die Anordnung der reellen Zahlen. Aus diesem Grund werden Strecken und konvexe Mengen auch als Teilgebiet der Analysis betrachtet. Sie sind aber ein wichtiger Bestandteil in der analytischen Geometrie. Daher behandeln wir die Grundlagen hier.

Wir reden in diesem Abschnitt zunächst über beliebige Vektorräume über dem Körper $\mathbb{R}$, die wir „reelle Vektorräume" nennen.

2.100. Definition: Eine **Strecke** (engl.: line segment) in einem reellen Vektorraum ist eine Menge der Form

$$S = \{a + \lambda(b - a) : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

a und b heißen die Endpunkte der Strecke. Wir schreiben für die Strecke mit Endpunkten a und b in diesem Abschnitt einfach $S(a, b)$.

2.101 Aufgabe: Zeigen Sie

$$S(a, b) = S(b, a).$$

Der folgende, erstaunlich umständlich zu beweisende Satz zeigt, dass zwei Strecken nur dann gleich sein können, wenn sie dieselben Endpunkte haben.

2.102 Satz: *Seien*

$$S(a, b) = S(\tilde{a}, \tilde{b})$$

zwei gleiche Strecken. Dann ist $(a, b) = (\tilde{a}, \tilde{b})$ *oder* $(a, b) = (\tilde{b}, \tilde{a})$.

Beweis: Wenn $a = b$ ist, so degeneriert die Strecke zu einem Punkt. Es muss dann offenbar $a = b = \tilde{a} = \tilde{b}$ gelten. Sei also $a \neq b$, und $v = b - a$. Dann ist

$$S(\tilde{a}, \tilde{b}) = S(a, b) \subset a + \text{span}\,\{v\}.$$

Also gibt es λ_a und λ_b mit

$$\tilde{a} = a + \lambda_a v, \quad \tilde{b} = a + \lambda_b v.$$

Aufgrund der obigen Aufgabe können wir $\lambda_a < \lambda_b$ annehmen. Wir zeigen $\lambda_a = 0$ und $\lambda_b = 1$, woraus die Behauptung folgt. Zunächst sei festgehalten, dass $S(a, b)$ genau die Punkte

$$a + \lambda v, \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

enthält. Wegen $\tilde{a}, \tilde{b} \in S(a, b)$ folgt $\lambda_a \geq 0$ und $\lambda_b \leq 1$. Wenn aber $\lambda_a > 0$ wäre, so könnte $S(\tilde{a}, \tilde{b})$ den Punkt a nicht enthalten. Analog widerlegt man $\lambda_b < 1$.
$\square$

2.103. Definition: Eine Teilmenge M eines reellen Vektorraums heißt **konvex**, wenn gilt

$$S(a, b) \subseteq M \qquad \text{für alle } a, b \in M.$$

2.104 Aufgabe: Zeigen Sie, dass jede Strecke $S(a, b)$ konvex ist.

2.105 Aufgabe: Zeigen Sie dass der Durchschnitt von konvexen Mengen konvex ist.

2.106 Aufgabe: Zeigen sie, dass jeder affine Unterraum eines reellen Vektorraums konvex ist.

Abbildung 2.4: Konvexe Menge und nicht konvexe Menge

2.107. Definition: Zu einer Menge M eines reellen Vektorraums V definieren wir die **konvexe Hülle** von M als die kleinste konvexe Menge, die M enthält. Für diese Menge schreiben wir

$$\operatorname{conv}(M).$$

Diese Definition macht natürlich nur Sinn, wenn die konvexe Hülle existiert. Wie bei der Definition des aufgespannten Unterraums gibt es einen konstruktiven und einen weniger konstruktiven Weg, die Existenz nachzuweisen. Der weniger konstruktive benutzt

$$\operatorname{conv}(M) = \bigcap \{K \subset V : M \subseteq K \text{ und } K \text{ konvex}\}.$$

Auf der rechten Seite steht nach der obigen Aufgabe eine konvexe Menge. Diese konvexe Menge ist dann in allen konvexen Mengen enthalten, die M umfassen. Man beachte, dass V selbst konvex ist, so dass der Schnitt nicht leer ist.

Es ist nützlich, zunächst mit endlichen Mengen M zu beginnen. Man nennt einen Ausdruck der Form

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ und $\sum \lambda_i = 1$ eine **Konvexkombination** der Punkte $x_1, \ldots, x_k$.

2.108 Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Strecke $S(a,b)$ die Menge alle Konvexkombinationen von a und b ist.

2.109 Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Menge aller Konvexkombinationen der Punkte $x_1, \ldots, x_k$ konvex ist.

2.110 Satz: *Sei $x_1, \ldots, x_k$ Elemente eines reellen Vektorraums V. Dann ist* $\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}$ *die Menge aller Konvexkombinationen der Punkte $x_1, \ldots, x_k$.*

Beweis: Aufgrund der obigen Aufgabe müssen wir nur noch zeigen, dass alle Konvexkombinationen in der konvexen Hülle liegen müssen. Dies zeigen wir durch Induktion nach k. Für $k = 1$ ist die Aussage klar, da dort $x_1 = 1 \cdot x_1$ die einzige Konvexkombination ist, und die konvexe Hülle eines Punktes dieser Punkt ist. Sei

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i$$

eine Konvexkombination. Wenn $\lambda_k = 1$ ist, so ist $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{k-1} = 0$ und $x = x_k$. Der Punkt x_k muss natürlich in der konvexen Hülle der Punkte $\{x_1, \ldots, x_k\}$ sein. Wenn $\lambda_k \neq 1$ ist, so schreiben wir

$$x = (1 - \lambda_k)\tilde{x} + \lambda_k x_k$$

mit

$$\tilde{x} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} x_i.$$

Wegen

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_k} = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i}{1 - \lambda_k} = 1$$

ist $\tilde{x}$ eine Konvexkombination von $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt

$$\tilde{x} \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{k-1}\} \subseteq \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Aufgrund unserer Darstellung ist

$$x \in S_{\tilde{x}, x_k}.$$

Für die konvexe Hülle der Punkte muss aber gelten

$$S_{\tilde{x}, x_k} \subseteq \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}.$$

□

2.111 Satz: *Sei M Teilmenge eines reellen Vektorraums. Dann ist* $\operatorname{conv}(M)$ *die Vereinigung aller konvexen Hüllen von je endlich vielen Punkten aus M. Also*

$$\operatorname{conv}(M) = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0,\ \sum \lambda_i = 1,\ x_1, \ldots, x_k \in M,\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

Beweis: Es genügt nun zu zeigen, dass die Vereinigung aller Konvexkombinationen konvex ist. Es ist aber nicht schwer nachzuprüfen, dass die Konvexkombination zweier Konvexkombinationen von zwei endlichen Teilmengen aus M selbst wieder Konvexkombination ist. □

Die bisherigen Resultate über konvexe Mengen gelten in beliebigen reellen Vektorräumen. Wenn wir uns aber auf den $\mathbb{R}^n$ zurück ziehen, kann man mehr aussagen.

2.112 Satz: *(Caratheodory) Die konvexe Hülle einer Teilmenge M eines n-dimensionalen reellen Vektorraums V ist die Vereinigung der konvexen Hüllen aller höchstens $n+1$-elementigen Teilmengen von M. Also*

$$\operatorname{conv}(M) = \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i x_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0,\ \sum \lambda_i = 1,\ x_1, \ldots, x_{n+1} \in M \right\}$$

Beweis: Wir müssen nur noch zeigen, dass wir eine Konvexkombination

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

als Konvexkombination einer echten Teilmenge der Punkte

$$\{x_1, \ldots, x_k\}$$

schreiben können, solange $k > n+1$ ist. Wir können also $\lambda_i > 0$ für $i = 1, \ldots, k$ annehmen. Weil in V höchstens Systeme mit n Vektoren linear unabhängig sein können, sind für $k > n+1$ die $k-1$ Vektoren

$$x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1$$

linear abhängig. Angenommen

$$\sum_{i=2}^{k} \mu_i (x_i - x_1) = 0,$$

wobei nicht alle Koeffizienten μ_i gleich 0 sind. Addiert man dann das c-fache dieser Gleichung zu x, so folgt

$$x = (\lambda_1 - c \sum_{i=2}^{k} \mu_i) x_1 + \sum_{i=2}^{k} (\lambda_i + c\mu_i) x_i$$

Wir stellen zunächst fest, dass die Summe der Koeffizienten dieser Darstellung

$$(\lambda_1 - c \sum_{i=2}^{k} \mu_i) + \sum_{i=2}^{k} (\lambda_i + c\mu_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

ist. Für $c = 0$ sind die Koeffizienten positiv. Wir wählen nun gemäß Aufgabe 2.113 ein c, so dass einer dieser Koeffizienten 0 wird, die anderen aber immer noch nicht-negativ sind. Damit haben wir x als Konvexkombination einer echten Teilmenge der Punkte dargestellt. □

2.113 Aufgabe: Seien

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$$

reelle Zahlen und
$$\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$$
nicht alle gleich 0. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass
$$\lambda_1 + c\mu_1, \ldots, \lambda_m + c\mu_m \geq 0$$
ist, und mindestens eine dieser Zahlen gleich 0 wird.

2.114. Beispiel: Im $\mathbb{R}^2$ ist ein Dreieck die Konvexkombination der drei Eckpunkte. Nach dem Satz von Caratheodory ist die konvexe Hülle einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ die Vereinigung aller Dreiecke mit Ecken in M.

Im $\mathbb{R}^3$ hat man Tetraeder statt Dreiecke zu betrachten.

Kapitel 3

Lineare Abbildungen

3.1 Lineare Abbildungen

3.1.1 Eigenschaften

3.1. Definition: Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Dann heißt eine Abbildung $\phi : V \to W$ **linear**, wenn die folgenden Identitäten gelten.

(1)
$$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2) \qquad \text{für alle } v_1, v_2 \in V,$$

(2)
$$\phi(\lambda v) = \lambda \phi(v) \qquad \text{für alle } v \in V,\ \lambda \in K.$$

3.2. Beispiel: Die identische Abbildung $\mathrm{id} : V \to W$ ist linear, ebenso wie die Nullabbildung 0, die konstant gleich 0 ist.

3.3 Aufgabe: Zeigen Sie, dass im $\mathbb{R}^n$ die Streckung $t_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$t_c(x) = a + cx \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

genau dann linear ist, wenn $a = 0$ ist. Welches sind die Fixpunkte der Streckung, also die Punkte mit $t_c(x) = x$, in Abhängigkeit von a und c.

3.4. Bemerkung: Für eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ gilt

$$\phi(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \phi(v_1) + \ldots + \lambda_n \phi(v_n),$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$ seien. Dies folgt aus den Bedinungungen (1) und (2) der Linearität per Induktion.

3.5 Aufgabe: Zeigen Sie $\phi(0) = 0$ für alle lineare Abbildungen $\phi : V \to W$.

3.6. Beispiel: In Abbildung 3.1 ist eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dargestellt. Eingezeichnet sind die Einheitsvektoren e_1, e_2 (in blau) und deren Bilder

$$\phi(e_1) = w_1 = \begin{pmatrix} 0.9 \\ -0.2 \end{pmatrix}, \quad \phi(e_2) = w_2 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

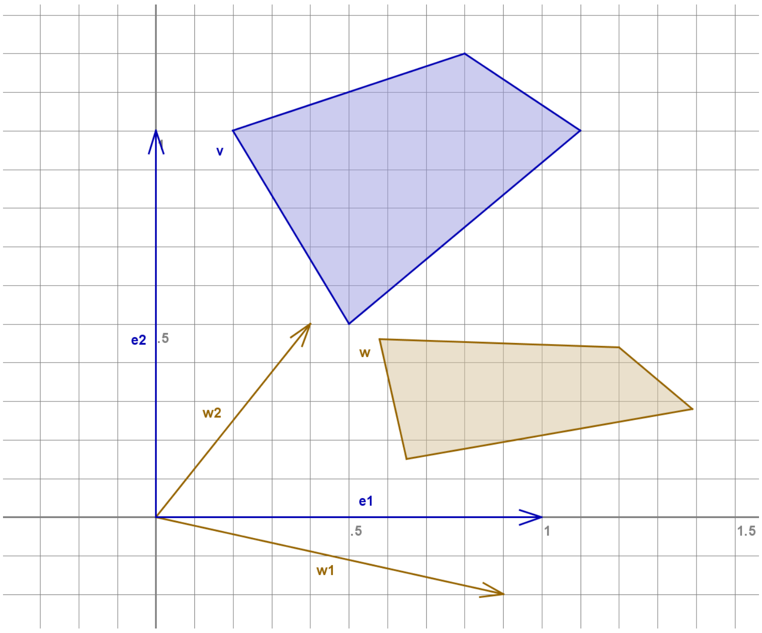

Abbildung 3.1: Lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

(in braun). Man kann dann für jeden Punkt

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

das Bild

$$\phi(v) = \lambda_1 \phi(e_1) + \lambda_2 \phi(e_2)$$

berechnen. Beispielsweise ist

$$v = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\phi(v) = 0.2 w_1 + 1 w_2 = \begin{pmatrix} 0.2 \cdot 0.9 + 0.4 \\ 0.2 \cdot (-0.2) + 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.58 \\ 0.46 \end{pmatrix}.$$

Macht man dasselbe für die vier anderen Ecken des Viereck (in blau), so entsteht das eingezeichnete Bildviereck (in braun).

3.7. Bemerkung: Lineare Abbildungen machen nur dann Sinn, wenn Definitionsbereich und Bildraum Vektorräume über demselben Körper sind.

3.8. Bemerkung: Eine lineare Abbildung $\phi : V \to K$ bezeichnet man als **Funktional** auf V. Dabei identifizieren wir $K = K^1$, damit K ein Vektorraum über K wird.

3.9. Beispiel: Lineare Gleichungen, die zwischen Urbildern erfüllt sind, sind auch zwischen den Bildern erfüllt. Seien beispielsweise $a, b \in V$ zwei Punkte und

$$m = \frac{1}{2}(a + b)$$

die Mitte zwischen diesen beiden Punkten. Sei $\phi : V \to W$ linear. Dann ist $\phi(m)$ die Mitte zwischen $\phi(a)$ und $\phi(b)$. Denn

$$\phi(m) = \frac{1}{2}(\phi(a) + \phi(b))$$

aufgrund der Bedingungen (1) und (2). Allgemeiner erhält eine lineare Abbildung im $\mathbb{R}^n$ Verhältnisse, etwa Konvexkombinationen

$$\phi(\lambda a + \mu b) = \lambda\phi(a) + \mu\phi(b)$$

für jede Konvexkombination $\lambda + \mu = 1$.

3.10 Satz: *Sei $\phi : V \to W$ linear.*

(1) *Wenn $U \subseteq V$ ein Unterraum von V ist, dann ist das Bild $\phi(U)$ dieses Unterraums ein Unterraum von W.*

(2) *Wenn $U \subseteq W$ ein Unterraum von W ist, dann ist das Urbild $\phi^{-1}(U)$ ein Unterraum von V.*

Beweis: (1) Sei w_1, w_2 in $\phi(U)$. Dann gibt es $v_1, v_2 \in U$ mit

$$\phi(v_1) = w_1, \quad \phi(v_2) = w_2.$$

Es folgt

$$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2) = w_1 + w_2.$$

Also $w_1 + w_2 \in \phi(U)$. Ganz analog zeigt man die Bedingung (2) für Unterräume.

(2) Bleibt dem Leser als Aufgabe überlassen. □

3.11 Aufgabe: Zeigen Sie (2) in dem obigen Satz.

3.12. Definition: Sei $\phi : V \to W$ linear. Dann bezeichnet man den Unterraum

$$\phi^{-1}\{0\} = \{x \in V : \phi(x) = 0\}$$

als **Kern** (engl.: kernel) von ϕ. Wir schreiben dafür $\text{Kern}(\phi)$. Außerdem bezeichnet man den Unterraum

$$\phi(V) = \{\phi(x) : x \in V\}$$

als **Bild** (engl.: image) von ϕ. Wir schreiben dafür $\text{Bild}(\phi)$.

3.13. Beispiel: Wenn $\phi : V \to W$ die Nullabbildung ist, dann ist $\text{Kern}(\phi) = V$. Wenn $\phi : V \to V$ injektiv ist, dann ist $\text{Kern}(\phi) = \{0\}$. Dies ist etwa im Beispiel 3.6 der Fall.

Wenn $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung ist, so kann es natürlich durchaus sein, dass ϕ nicht surjektiv ist und ein $y \in W$ kein Urbild hat. Das gilt natürlich für alle

$$y \in W \setminus \text{Bild}(\phi).$$

Im folgenden Satz zeigen wir, dass die Menge aller Urbilder von y ein affiner Unterraum von V ist, wenn sie nicht leer ist.

3.14 Satz: *Sei $\phi : V \to W$ linear und $\phi(x) = y$. Dann gilt*

$$\phi^{-1}\{y\} = x + \text{Kern}\,(\phi).$$

Die Abbildung ϕ ist also genau injektiv, wenn es einen Punkt gibt, der genau ein Urbild hat, insbesondere, wenn $\text{Kern}\,(\phi) = \{0\}$ *ist.*

Beweis: „$\subseteq$": Wenn $\tilde{x} \in \phi^{-1}\{y\}$ ist, dann ist

$$\phi(\tilde{x}) = y = \phi(x).$$

Es folgt

$$\phi(\tilde{x} - x) = \phi(\tilde{x}) - \phi(x) = 0.$$

Also $\tilde{x} - x \in \text{Kern}\,(\phi)$. Also

$$\tilde{x} \in x + \text{Kern}\,(\phi).$$

„$\supseteq$": Die Argumentation ist dieselbe, nur umgekehrt. $\square$

Will man also alle Urbilder von $y \in W$ berechnen, so genügt es den Kern (ϕ) zu bestimmen und ein spezielles Urbild von y. Die Urbildmengen aller y sehen also im Prinzip gleich aus, wenn sie nicht leer sind.

3.15 Aufgabe: Sei $\phi : K^2 \to K$ die Abbildung

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2.$$

Zeichnen Sie Kern (ϕ) in ein Koordinatensystem, sowie $\phi^{-1}(a)$ für $a = -2, -1, 0, 1, 2$.

3.16 Aufgabe: Sie $\phi : V \to W$ linear. Zeigen Sie, dass zwei Mengen $\phi^{-1}(y_1)$, $\phi^{-1}(y_2)$ für $y_1, y_2 \in W$ entweder gleich oder disjunkt sind. Zeigen Sie darüber hinaus

$$V = \bigcup \{\phi^{-1}(y) : y \in W\}.$$

3.17 Satz: *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Sei W ein Vektorraum über K und $w_1, \ldots, w_n \in W$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\phi : V \to W$ mit*

$$\phi(v_i) = w_i \qquad \textit{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Beweis: Da sich jedes $v \in V$ *eindeutig* als Linearkombination

$$v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$$

der Basis darstellen lässt, muss gelten

$$\phi(v) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \phi(v_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i w_i.$$

Definiert man ϕ auf diese Art und Weise, so ist $\phi(v)$ festgelegt. Man rechnet nach, dass ϕ linear ist. Umgekehrt muss ϕ auf diese Art definiert sein, so dass ϕ also eindeutig bestimmt ist. □

Lineare Abbildungen sind durch die Bilder eine Basis eindeutig bestimmt.

3.1.2 Dimensionsformel

Wir beweisen nun eine weitere wichtige **Dimensionsformel**.

3.18 Satz: *Sei* $\phi : V \to W$ *linear und* V *endlich-dimensional. Dann ist* Bild (ϕ) *ebenfalls endlich-dimensional und es gilt*

$$\dim \operatorname{Kern}(\phi) + \dim \operatorname{Bild}(\phi) = \dim V.$$

Beweis: Als Unterraum von V ist Kern (ϕ) endlich-dimensional. Sei

$$v_1, \ldots, v_k$$

eine Basis von Kern (ϕ). Nach Satz 2.76 kann man dieses linear unabhängige System zu einer Basis

$$v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$$

von V ergänzen. Wir behaupten, dass

$$\phi(v_{k+1}), \ldots, \phi(v_n) \tag{3.1}$$

eine Basis von Bild (ϕ) ist. Dann gilt nämlich in der Tat

$$\dim \operatorname{Kern}(\phi) + \dim \operatorname{Bild}(\phi) = k + (n-k) = n = \dim V.$$

Sei $y \in$ Bild (ϕ). Dann existiert ein $x \in V$ mit $\phi(x) = y$. Sei

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i.$$

Dann folgt

$$y = \phi(x) = \phi(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \phi(v_i) = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \phi(v_i).$$

Damit haben wir bewiesen, dass Bild (ϕ) von den Vektoren in (3.1) aufgespannt wird. Wir müssen noch die lineare Unabhängigkeit zeigen. Sei

$$0 = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \phi(v_i) = \phi(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i)$$

Also

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i \in \operatorname{Kern}(\phi).$$

Es muss also auch

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

mit gewissen λ_i, $i = 1, \ldots, k$, sein. Da aber $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0.$$

□

3.19 Aufgabe: Überlegen Sie sich, dass der Beweis auch in den Extremalfällen

$$\dim \mathrm{Kern}\,(\phi) = 0, \qquad \dim \mathrm{Bild}\,(\phi) = 0$$

richtig ist.

3.20 Satz: *Seien $\phi : V \to W$ linear und $\dim V = \dim W$, V, W endlich dimensional. Dann sind äquivalent*

(1) *ϕ ist bijektiv.*

(2) *ϕ ist surjektiv.*

(3) *ϕ ist injektiv.*

Beweis: Es genügt offenbar zu zeigen, dass (2) und (3) äquivalent sind.

(2) $\Rightarrow$ (3): Wenn ϕ surjektiv ist, dann ist

$$\dim W = \dim \mathrm{Bild}\,(\phi) = \dim V - \dim \mathrm{Kern}\,(\phi)$$

nach der Dimensionsformel. Also $\dim \mathrm{Kern}\,(\phi) = 0$. Es folgt, dass $\mathrm{Kern}\,(\phi) = \{0\}$ ist und daher ϕ injektiv nach Satz 3.14.

(3) $\Rightarrow$ (2): Wenn ϕ injektiv ist, ist $\mathrm{Kern}\,(\phi) = \{0\}$ nach Satz 3.14. Aus der Dimensionsformel folgt die Behauptung. □

3.21 Satz: *Sei $\phi : V \to W$ linear.*

(1) *Wenn V endlich dimensional ist, dann kann ϕ nur dann surjektiv sein, wenn W endlich dimensional ist und*

$$\dim V \geq \dim W.$$

(2) *Wenn W endlich dimensional ist, dann kann ϕ nur dann injektiv sein, wenn V endlich dimensional sein, wenn*

$$\dim V \leq \dim W.$$

Wenn einer der Räume endlich dimensional ist, kann folglich ϕ nur bijektiv sein, wenn es der andere auch ist und die Dimensionen gleich sind.

3.22 Aufgabe: Beweisen Sie Satz 3.21.

3.23 Aufgabe: Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und $\phi : V \to W$ linear. Zeigen Sie, dass dann das System

$$\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)$$

genau dann linear unabhängig ist, wenn ϕ injektiv ist.

3.24 Aufgabe: Sei V endlich dimensional. Welche Dimension kann der Kern eines Funktionals $\phi : V \to K$ haben?

3.25 Aufgabe: Betrachten Sie das Funktional $\phi : K^n \to K$ definiert durch

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 + \ldots + x_n.$$

Geben Sie eine Basis des Kerns von ϕ an.

3.26 Satz: *Für zwei lineare Abbildungen*

$$\phi : V \to W, \quad \psi : W \to H$$

ist die Verkettung $\psi \circ \phi$ wieder linear ist. Zu jeder invertierbaren linearen Abbildung $\phi : V \to W$ ist die Umkehrabbildung ϕ^{-1} linear ist.

3.27 Aufgabe: Zeigen Sie Satz 3.26.

3.28. Definition: Eine bijektive lineare Abbildung $\phi : V \to W$ heißt **Isomorphismus** (isomorphism) (oder Isomorphie, genauer Vektorraum-Isomorphie). Zwei Vektorräume V, W über einem Körper K hießen **isomorph**, wenn es eine Isomorphie zwischen diesen Vektorräumen gibt.

3.29. Bemerkung: Wir können von Isomorphismus *zwischen* den Vektorräumen reden, weil ja auch die Umkehrabbildung eines Isomorphismus wieder eine Isomorphismus ist. Isomorphien kann man auf ganz analoge Weise auch für andere algebraische Strukturen, wie Gruppen oder Körper, definieren. Wichtig ist, dass sie bijektiv sind und sich die Rechengesetze übertragen.

3.30 Aufgabe: Definieren Sie, wann eine lineare Abbildung $f : K \to Q$ für zwei Körper K und Q eine Isomorphie ist.

3.31 Satz: *Wenn V eine endlich-dimensionaler Vektorraum über K ist, und $\phi : V \to W$ ein Isomorphismus, dann ist auch W endlich dimensional und* $\dim V = \dim W$*. Wenn umgekehrt V, W endlich dimensionale Vektorräume über K mit gleicher Dimension sind, dann ist V isomorph zu W.*

Isomorphe Vektorräume haben die gleiche Dimension. Jeder n-dimensionale Vektorraum über K ist isomorph zu K^n.

Beweis: Dass isomorphe Vektorräume die gleiche Dimension haben, folgt aus der Dimensionsformel, insbesondere aus Aufgabe 3.21. Wenn umgekehrt V und W dieselbe Dimension haben, so wählen wir eine Basis

$$v_1, \ldots, v_n$$

von V und eine Basis

$$w_1, \dots, w_n$$

von W. Nach Satz 3.17 gibt es eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ mit

$$\phi(v_1) = w_1, \quad \dots, \quad \phi(v_n) = w_n.$$

Nach Aufgabe 3.23 ist ϕ injektiv und damit bijektiv nach Satz 3.20. □

Wir geben zum Ende dieses Abschnittes einige abstrakte Definitionen an, die algebraische Strukturen auf dem Raum der linearen Abbildungen zwischen zwei Vektorräumen einführen.

3.32. Definition: Eine lineare Abbildung $\phi : V \to V$ nennt man auch einen **Endomorphismus** auf V. Bisweilen findet man auch die Bezeichnung **linearer Operator** auf V. Einen injektiven Endomorphismus nennt man auch **Monomorphismus**. Ein surjektiver Monomorphismus ist ein Isomorphimus.

3.33. Definition: Wenn V und W Vektorräume über K sind, so definieren wir $\mathcal{L}(V, W)$ als die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W.

$$\mathcal{L}(V, W) := \{\phi : V \to W : \phi \text{ linear}\}.$$

Da man auf W eine Vektorraumstruktur hat, kann man lineare Abbildungen punktweise addieren und multiplizieren. Also

$$(\phi_1 + \phi_2)(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x)$$
$$(\lambda\phi)(x) = \lambda\phi(x)$$

für alle $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ und $\lambda \in K$.

3.34 Aufgabe: Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(V, W)$ mit diesen Operationen ein Vektorraum über K wird.

3.35. Bemerkung: Zwei Elemente in $\mathcal{L}(V, V)$ kann man darüber hinaus multiplizieren, indem man die Abbildungen hintereinander ausführt. Aufgrund der Rechengesetze aus der folgenden Aufgabe wird $\mathcal{L}(V, V)$ mit diesen Operationen eine **assoziative Algebra** über K.

3.36 Aufgabe: Zeigen Sie

$$(\lambda\phi_1) \circ \phi_2 = \phi_1 \circ (\lambda\phi_2) = \lambda(\phi_1 \circ \phi_2)$$

für alle $\lambda \in K$, $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{L}(V, V)$.

3.37 Aufgabe: Zeigen Sie

$$\phi_1 \circ (\phi_2 + \phi_3) = \phi_1 \circ \phi_2 + \phi_1 \circ \phi_3$$
$$(\phi_1 + \phi_2) \circ \phi_3 = \phi_1 \circ \phi_3 + \phi_2 \circ \phi_3$$

für alle $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \mathcal{L}(V, V)$.

3.38 Aufgabe: Man gebe Endomorphismen $\phi \in \mathcal{L}(K^2, K^2)$ an, so dass gilt

$$\phi_1 \circ \phi_2 \neq \phi_2 \circ \phi_1.$$

K sei dabei ein beliebiger Körper. Man gebe zwei andere, von einander verschiedene Endomorphismen an, so dass gilt

$$\phi_1 \circ \phi_2 = \phi_2 \circ \phi_1.$$

3.39. Bemerkung: Die Multiplikation „$\circ$" auf dem Raum der Isomorphismen von V auf sich selbst ist also nicht kommutativ. Sie erfüllt aber dennoch die übrigen Gruppenaxiome. Es gilt also

$$\begin{aligned} \phi_1 \circ (\phi_2 \circ \phi_3) &= (\phi_1 \circ \phi_2) \circ \phi_3 \\ \phi \circ \mathrm{id} &= \phi \\ \phi \circ \phi^{-1} &= \mathrm{id} \end{aligned}$$

für alle Isomorphismen $\phi, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ von V auf sich selbst. Man spricht von der **Gruppe der Ismorphismen** von V auf sich selbst.

3.1.3 Matrizen

3.40. Definition: Sei K ein Körper. Ein Rechteckschema der Form

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

mit $a_{i,j} \in K$ für $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ bezeichnet man als $m \times n$-**Matrix** über dem Körper K. Die Matrix besteht also aus n Spalten $a_1, \dots, a_n$, die als Vektoren im K^m gedeutet werden können. Wir schreiben deswegen auch

$$A = (a_1, \dots, a_n).$$

Wir schreiben auch

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m \in K_m$ die Zeilen von A bezeichnen. Die Einträge $a_{i,j}$ nennt man **Koeffizienten** der Matrix. Die Menge aller $m \times n$-Matrizen bezeichnen wir mit $K^{m \times n}$.

3.41. Bemerkung: Mengentheoretisch ist eine Matrix A eine Abbildung

$$\begin{aligned} a : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} &\to K, \\ (i, j) &\mapsto a_{i,j}. \end{aligned}$$

Die Unterscheidung von Zeilen und Spalten dient aber der Veranschaulichung.

3.42. Bemerkung: Gelegentlich werden wir hier auch Matrizen über anderen Mengen betrachten, also mit Koeffizienten in einer Menge M. Da wir aber mit Matrizen rechnen wollen, sollte auf M wenigstens eine Addition und eine Multiplikation definiert sein.

3.43. Definition: Das Produkt einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ und eines Vektors $x \in K^n$ ist definiert als

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben $Ax = A \cdot x$. Wenn $y = Ax$ ist, so ergibt sich der i-te Koeffizient von y als

$$y_i = \sum_{k=0}^{n} a_{i,j}x_j \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, m$$

3.44. Bemerkung: Man beachte, dass das Produkt nur definiert ist, wenn die Spaltenzahl von A und die Zeilenzahl von x übereinstimmen.

3.45. Bemerkung: Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Spalten von A und $x \in K^n$, sowie $y = Ax$. Dann gilt

$$y = Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} x_i a_i.$$

Ax ist also eine Linearkombination der Spalten von A.

Produkte von Matrizen mit Vektoren, sowie die später definierten Produkte von Matrizen sind nützlich, weil sich lineare Abbildungen mit Matrixprodukten komfortabel schreiben lassen.

3.46 Satz: *Jede lineare Abbildung $\phi : K^n \to K^m$ lässt sich in der Form*

$$\phi(x) = Ax$$

schreiben. Dabei ist $A \in K^{m \times n}$ durch ϕ eindeutig bestimmt, und die Spalten von A enthalten die Bilder der Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n \in K^n$, also

$$A = (\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)).$$

Beweis: Wenn die Spalten von A die Bilder der Einheitsvektoren enthalten, so gilt

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \phi \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i) = Ax.$$

Wenn umgekehrt $\phi(x) = Ax$ ist und $a_1, \ldots, a_n$ die Spalten von A sind, so rechnet man nach, dass

$$\phi(e_i) = Ae_i = a_i$$

sein muss. $\square$

3.47. Definition: Wir definieren für eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ die Abbildung

$$\phi_A : K^n \to K^m$$
$$\phi_A(x) = Ax.$$

Wie haben gerade bewiesen, dass sich jede Abbildung $\phi : K^n \to K^m$ als $\phi = \phi_A$ schreiben lässt, und dass A dabei eindeutig bestimmt ist. Das heißt

$$\phi_A = \phi_B \;\Leftrightarrow\; A = B.$$

Das Studium von linearen Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen ist damit gleichbedeutend mit dem Studium von Matrizen. Man nennt A die **darstellende Matrix** von ϕ_A.

Zu jeder linearen Abbildung von K^n nach K^m gehört eine eindeutig bestimmte darstellende Matrix in $K^{m \times n}$ und umgekehrt.

3.48. Beispiel: Die im Beispiel 3.6 angegebene Abbildung

$$\phi(e_1) = w_1 = \begin{pmatrix} 0.9 \\ -0.2 \end{pmatrix}, \quad \phi(e_2) = w_2 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

schreibt sich in Matrixdarstellung als

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ -0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

3.49. Beispiel: Das in Aufgabe 3.25 angegebene Funktional

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 + \ldots x_n$$

lässt sich in Matrixschreibweise als

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

schreiben. Die Matrix hat hier nur eine Zeile.

3.50. Beispiel: Die Nullabbildung schreibt sich mit einer Matrix, die nur 0 enthält.

3.51. Beispiel: Zwei Produkte P_1 und P_2 bestehen aus je drei Komponenten K_1, K_2 und K_3 in den Zusammensetzungen

	K_1	K_2	K_3
P_1 besteht aus	3	1	0
P_2 besteht aus	1	1	1

Wenn die entsprechenden Mengen mit Kleinbuchstaben bezeichnet werden, so gilt die Beziehung

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

3.52. Beispiel: Die identische Abbildung $\mathrm{id} : K^n \to K^n$ schreibt sich in der Form

$$x = \mathrm{id}(x) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot x.$$

Die Matrix hat 1 als Diagonalelemente und ist 0 überall sonst.

3.53. Definition: Die Matrix I_n mit Spalten $e_1, \ldots, e_n$ heißt **Einheitsmatrix** (engl.: identity matrix).

3.54. Definition: Da sich Matrizen und lineare Abbildungen entsprechen, schreiben wir

$$\text{Bild } A = \text{Bild } \phi_A, \quad \text{Kern } A = \text{Kern } \phi_A$$

3.55 Satz: *Sei $A \in K^{m \times n}$ mit den Spalten*

$$A = (a_1, \ldots, a_n).$$

Dann gilt

$$\text{Bild } A = \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$$

3.56 Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz.

Wir werden nun das Produkt von Matrizen A, B so definieren, dass

$$\phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B$$

gilt.

Dem Produkt von Matrizen entspricht die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen.

3.57. Definition: Sei $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times k}$. Bezeichnen dann $b_1, \ldots, b_k$ die Spalten von B, so definieren wir das Produkt als Matrix mit den Spalten $Ab_1, \ldots, Ab_k$

$$A \cdot B := (Ab_1, \ldots, Ab_k)$$

Wir schreiben wieder $AB = A \cdot B$.

3.58. Bemerkung: Es gilt also $AB \in K^{m \times k}$ und für die Koeffizienten der Matrix $C = AB$ gilt

$$c_{i,j} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i,\nu} b_{\nu,j},$$

für $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k$. Denn $c_{i,j}$ ist die i-te Komponente des Vektors Ab_j und

$$\begin{pmatrix} c_{1,j} \\ \vdots \\ c_{m,j} \end{pmatrix} = Ab_j = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,j} + \ldots + a_{1,n}b_{n,j} \\ \vdots \\ a_{m,1}b_{1,j} + \ldots + a_{m,n}b_{n,j} \end{pmatrix}$$

für $j = 1, \ldots, k$. Es gilt also

$$c_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}.$$

Sei $C = AB$. Dann entsteht $c_{i,j}$ durch Multiplikation der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B.

Man kann die Matrizen-Multiplikation mit folgendem Schema organisieren

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & \cdots & b_{1,j} & \cdots \\ & & & & \vdots & \\ & & & \cdots & b_{n,j} & \cdots \\ \hline \vdots & & \vdots & & \downarrow & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} & \rightarrow & c_{i,j} & \\ \vdots & & \vdots & & & \end{array}$$

Zur dieser Rechnung benötigt man mnk Multiplikationen und $m(n-1)k$ Additionen.

3.59. Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

3.60 Satz: *$A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times k}$. Dann gilt*

$$\phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B.$$

Beweis: Nach Satz 3.26 ist

$$\phi_A \circ \phi_B : K^k \rightarrow K^n$$

linear. Nach Satz 3.46 enthält die darstellende Matrix C dieser Abbildung die Bilder der Einheitsvektoren in den Spalten, also

$$\begin{aligned} C &= (\phi_A(\phi_B(e_1), \ldots, \phi_A(\phi_B(e_k))) \\ &= (\phi_A(b_1), \ldots, \phi_A(b_k)) \\ &= (Ab_1, \ldots, Ab_k) \\ &= AB \end{aligned}$$

nach der Definition der Matrizen-Multiplikation. Dabei seien $b_1, \ldots, b_k$ die Spalten von B. □

3.61 Satz: *Sei*

$$A \in K^{n \times m}, \quad B \in K^{m \times k}, \quad C \in K^{k \times l}.$$

Dann gilt

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Beweis: Für die zugehörige lineare Abbildung

$$\phi_A \circ \phi_B \circ \phi_C$$

gilt das Assoziativgesetz nach Aufgabe 1.93. Also

$$\begin{aligned}
\phi_{(AB)C} &= \phi_{AB} \circ \phi_C \\
&= (\phi_A \circ \phi_B) \circ \phi_C \\
&= \phi_A \circ (\phi_B \circ \phi_C) \\
&= \phi_A \circ (\phi_{BC}) \\
&= \phi_{A(BC)}.
\end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit der Matrixdarstellung von linearen Abbildungen folgt die Behauptung. □

3.62. Bemerkung: Das Assoziativgesetz für die Matrizen-Multplikation kann man auch direkt nachrechnen. Man erhält für die Koeffizienten von $D = (AB)C$

$$d_{i,j} = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\sum_{\mu=1}^{n} a_{i,\mu} b_{\mu,\nu} \right) c_{\nu,j}$$

und für die Koeffizienten von $D = A(BC)$

$$d_{i,j} = \sum_{\mu=1}^{n} \left(a_{i,\mu} \sum_{\nu=1}^{k} b_{\mu,\nu} c_{\nu,j} \right).$$

Beide Doppelsummen sind jedoch gleich und können als

$$d_{i,j} = \sum_{\substack{\nu=1,\ldots,k \\ \mu=1,\ldots,n}} a_{i,\mu} b_{\mu,\nu} c_{\nu,j}$$

gedeutet werden. Das heißt, die Summe ist über alle möglichen μ, ν zu nehmen, die in diesen Zahlbereichen liegen.

3.63. Bemerkung: Wir können auch die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor als Matrizen-Multiplikation auffassen, indem wir den Vektor $x \in K^k$ als Matrix $x \in K^{k \times 1}$ interpretieren. Es gilt dann nach dem obigen Satz

$$\phi_{AB}(x) = (AB)x = A(Bx) = \phi_A(\phi_B(x)) \qquad \text{für alle } x \in K^k.$$

Also erhalten wir nochmals

$$\phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B.$$

3.64. Beispiel: Wir setzen Beispiel 3.51 fort. Verpackt man P_1 und P_2 in zwei Versionen V_1 und V_2 mit

	P_1	P_2
V_1 enthält	2	2
V_2 enthält	1	3

so gilt für die Mengen

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Also insgesamt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit kann man also berechnen, welche Mengen der Komponenten K_1, K_2 und K_3 man benötigt, wenn man eine gewünschte Anzahl von Packungen V_1 und V_2 herstellen will.

3.65. Definition: Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ nennt man **quadratische Matrix**. Dann ist also $\phi_A : K^n \to K^n$ ein Endomorphismus. Eine quadratische Matrix heißt **invertierbare Matrix**, wenn es eine Matrix A^{-1} gibt, für die gilt

$$A \cdot A^{-1} = I_n.$$

Wir wir im folgenden Satz sehen werden, folgt aus $AA^{-1} = I_n$ automatisch $A^{-1}A = I_n$. Für Abbildungen ist dies gemäß Aufgabe 1.82 nicht analog der Fall.

3.66 Satz: *Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn die Abbildung ϕ_A invertierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\phi_{A^{-1}} = \phi_A^{-1}.$$

Außerdem gilt

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Beweis: Sei A invertierbar, also $AA^{-1} = I_n$. Dann folgt aus Satz 3.60

$$\phi_A \circ \phi_{A^{-1}} = \phi_{I_n} = \mathrm{id}.$$

Deswegen muss ϕ_A surjektiv sein. Nach Satz 3.20 ist ϕ_A damit bijektiv. Daher muss

$$\phi_A^{-1} = \phi_{A^{-1}}$$

sein. Außerdem gilt

$$\mathrm{id} = \phi_A^{-1} \circ \phi_A = \phi_{A^{-1}} \circ \phi_A.$$

Wieder nach Satz 3.60 folgt

$$I_n = A^{-1}A.$$

Wenn umgekehrt ϕ_A invertierbar ist, und B die darstellende Matrix von ϕ_A^{-1}, dann gilt

$$\phi_{AB} = \mathrm{id} = \phi_{BA},$$

also $AB = I_n = BA$. A ist also tatsächlich invertierbar. □

3.67. Bemerkung: Wir haben in diesem Satz gezeigt, dass aus $AB = I_n$ folgt, dass A und B invertierbar sind, und dass $BA = I_n$ gilt.

3.1.4 Matrizenrechnung

Neben dem Produkt von Matrizen führen wir hier noch weitere nützliche Rechenoperationen ein.

3.68. Definition: Die Summe von gleichgroßen Matrizen $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{m\times n}$ ist **elementweise** definiert. Also

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & \dots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Das Produkt eines $\lambda \in K$ mit einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist ebenfalls elementweise definiert. Also

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

3.69 Aufgabe: Zeigen Sie, dass der Raum der Matrizen $K^{m\times n}$ mit diesen Operationen zu einem Vektorraum über K wird. Zeigen Sie, dass dieser Vektorraum isomorph zum Vektorraum K^{mn} ist.

3.70 Satz:

$$\begin{aligned} A(B+C) &= AB + AC \qquad &&\textit{für alle } A \in K^{m\times n},\ B, C \in K^{n\times k} \\ (A+B)C &= AC + AC \qquad &&\textit{für alle } A, B \in K^{m\times n},\ C \in K^{n\times k} \end{aligned}$$

3.71 Aufgabe: Beweisen Sie diese Distributivgesetze.

3.72. Bemerkung: Es gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$

$$AB \neq BA.$$

Wir haben aber auch schon festgestellt, dass manche Matrizen miteinander kommutieren, wie zum Beispiel

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

3.73. Definition: Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann definieren wir

$$A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ mal}}.$$

Also, induktiv

$$A^1 = A, \quad A^{n+1} = A^n \cdot A.$$

Außerdem

$$A^0 = I_n.$$

Für invertierbare Matrizen definieren wir außerdem

$$A^{-n} = (A^{-1})^n.$$

3.74 Satz: *Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt*

$$A^n A^m = A^{n+m} = A^m A^n \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Falls A invertierbar ist, so gilt auch

$$A^n A^m = A^{n+m} = A^m A^n \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Dieser Satz ist aufgrund der Definitionen einleuchtend und kann durch elementare Überlegungen bewiesen werden. Es gilt zum Beispiel

$$A^n A^m = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ mal}}\underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ mal}} = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n+m \text{ mal}} = A^{n+m}.$$

Etwas schwieriger ist $n, m \in \mathbb{Z}$. Man muss hier verschiedene Fälle unterscheiden. Wir beschränken uns auf den Fall $n > 0$, $m < 0$.

$$A^n A^m = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ mal}}\underbrace{A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{|m| \text{ mal}}.$$

Nun heben sich $|m|$ der A^{-1} gegen genauso viele A auf und es bleiben $n - |m| = n + m$ Faktoren A über. Es folgt die Behauptung.

Für einen exakteren Beweis sollte man jedoch vollständige Induktion verwenden. Für $n, m \in \mathbb{N}$ ist das auch nicht schwer. Wir verwenden Induktion nach m. Für $m = 1$ gilt

$$A^n A^1 = A^n A = A^{n+1}$$

gemäß der induktiven Definition von A^n. Die Behauptung gelte für m. Dann gilt

$$A^n A^{m+1} = A^n(A^m A) = (A^n A^m)A = A^{n+m}A = A^{n+m+1}$$

nach Definition von A^m, Satz 3.61 und der Induktionsannahme. □

3.75 Aufgabe: Sie $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie mit lediglich 3 Matrizen-Multiplikationen die Matrix A^8. Wie viele Matrizen-Multiplikationen benötigt man für die Matrix A^7? Können Sie einen Algorithmus angeben, der A^n für alle $n \in \mathbb{N}$ mit möglichst wenigen Matrizen-Multiplikationen berechnet?

3.76 Satz: *Wenn A invertierbar ist, so ist auch A^{-1} invertierbar und es gilt*

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

Beweis: Der Satz folgt unmittelbar aus Satz 3.66. □

3.77. Definition: Sei $A \in K^{m\times n}$. Dann ist die **transponierte Matrix** $A^T \in K^{n\times m}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{m,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Das heißt, für die Matrix $B = A^T$ gilt

$$b_{i,j} = a_{j,i} \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m.$$

Transponierte Matrizen werden später im Zusammenhang mit Skalarprodukten sehr wichtig.

3.78 Satz: *Es gelten folgende Rechenregeln.*

(1)

$$\left(A^T\right)^T = A$$
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

für alle $A, B \in K^{m\times n}$, $\lambda \in K$.

(2) *Außerdem*

$$(AB)^T = B^T A^T$$

für alle $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times k}$.

(3) *Für invertierbare Matrizen $A \in K^{n \times n}$ ist A^T invertierbar, und es gilt*

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Beweis: (1) ist eine Übungsaufgabe.

(2) Sei $C = AB$. Dann gilt

$$c_{i,j} = \sum_{\nu=1}^{k} a_{i,\nu} b_{\nu,j} \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

Wenn $\tilde{c}_{i,j}$ die Koeffizienten von $B^T A^T$ sind, $\tilde{a}_{i,j}$ die Koeffizienten von A^T und $\tilde{b}_{i,j}$ die Koeffizienten von B^T, dann gilt also

$$c_{j,i} = \sum_{\nu=1}^{k} \tilde{b}_{i,\nu} \tilde{a}_{\nu,j}. = \tilde{c}_{i,j}$$

für $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$. Es folgt $(AB)^T = B^T A^T$.

(3) Wegen (2)

$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n.$$

Es folgt

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

□

Wir definieren natürlich x^T für $x \in K^n$ als Zeilenvektor mit denselben Koeffizienten wie x, also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht der Philosophie, $K^n = K^{n \times 1}$ zu setzen. Man beachte $x^T = x$ für alle $x \in K = K^1$.

3.79 Aufgabe: Sei $A \in K^{n \times n}$ und $x \in K^1$. Zeigen Sie

$$x^T A x \in K = K^1.$$

Berechnen Sie $x^T A x$. Zeigen Sie

$$x^T A x = x^T A^T x.$$

3.2 Gleichungssysteme

3.2.1 Gaußscher Algorithmus

3.80. Definition: Ein **lineares Gleichungssystem** ist ein System von n linearen Gleichungen mit Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ der Form

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise also

$$Ax = b$$

mit $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$. Gesucht ist $x \in K^n$. Die **Lösungsmenge** des linearen Gleichungssystems ist

$$\mathbb{L} := \{x \in K^n : Ax = b\}.$$

3.81. Bemerkung: Offenbar ist für die Lösungsmenge nach Satz 3.14 ein affiner Unterraum

$$\mathbb{L} = \phi_A^{-1}\{b\} = v_0 + \text{Kern } \phi_A$$

oder leer. Es genügt also, eine **spezielle Lösung** x_0 mit

$$Av_0 = b$$

zu bestimmen und alle Lösungen von

$$Av = 0$$

zu addieren. Ein Gleichungssystem heißt **homogenens Gleichungssystem**, wenn die rechte Seite $b = 0$ ist. $Ax = 0$ nennt man das zugehörige homogene Gleichungssystem.

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ist leer oder die Summe einer speziellen Lösung und aller Lösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

Der **Gauß-Algorithmus** ist nun ein Verfahren, die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des Gleichungssystems in parametrisierter Form anzugeben. Eine **Parametrisierung** von $\mathbb{L}$ ist etwa

$$\mathbb{L} = \{v_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K\},$$

mit festen $v_0, v_1, \ldots, v_k \in K^n$. Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sind dann die Parameter der Lösungen.

Da der Lösungsraum $\mathbb{L}$ eines linearen Gleichungssystems ein affiner Unterraum von K^n ist, lässt sich $\mathbb{L}$ immer auf diese Art schreiben. Der Gauß-Algorithmus erreicht außerdem, dass

$$v_1, \ldots, v_k$$

eine Basis des Unterraums $\mathbb{L} - v_0$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass die Parameterzahl k minimal ist. Denn jede Basis ist ein *minimales* Erzeugendensystem nach Satz 2.64.

Wir beginnen den Gauß-Algorithmus damit, dass wir das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ in ein Schema

$$\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{array} \tag{3.2}$$

schreiben.

3.82. Definition: Eine **zulässige Zeilenoperation** ist eine der folgenden Operationen in den m Zeilen des Schemas (3.2).

(1) Multiplikation einer Zeile mit einem $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$.

(2) Vertauschung von zwei Zeilen.

(3) Addition des λ-fachen einer Zeilen zu einer anderen Zeile mit beliebigem $\lambda \in K$.

3.83 Satz: *Zulässige Zeilenoperationen ändern die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem nicht.*

3.84 Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz, indem Sie zeigen, dass jede Lösung x vor vor einer zulässigen Zeilenoperation auch Lösung danach ist, und indem Sie zusätzlich zeigen, dass zulässige Zeilenoperationen mit zulässigen Zeilenoperationen rückgängig gemacht werden können.

Ziel des Algorithmus ist, eine Zeilenstufenform zu erreichen. Wir werden sehen, dass man dann die Lösungsmenge in parametrisierter Form ablesen kann.

3.85. Definition: Das Schema (3.2) hat **Zeilenstufenform**, wenn es folgende Form hat

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & * & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & * & \tilde{b}_1 \\
0 & \cdots & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & * & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & * & \tilde{b}_2 \\
0 & \cdots & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & & \mathbf{0} & * & \tilde{b}_3 \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & \vdots & * & \vdots \\
 & & & & & & & & & \mathbf{1} & * & \tilde{b}_k \\
\hline
0 & & & & & & & & \cdots & & 0 & \tilde{b}_{k+1} \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & & & & & & & & \cdots & & 0 & \tilde{b}_m
\end{array}$$

Die Sterne „$*$“ stehen hier für eine beliebige Anzahl von Spalten.

Die wesentliche Eigenschaft der Zeilenstufenform ist, dass es k Spalten gibt, in denen die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_k$ stehen, und dass unterhalb der k-ten Zeile nur 0 steht.

Die Zeilenstufenform macht darüber hinaus weitere Einschränkungen über die Spalten, in denen keine Einheitsvektoren stehen. Diese Einschränkungen sind aber für die Lösung nicht notwendig.

3.86 Satz: *Man kann jedes Schema durch zulässige Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform bringen.*

Beweis: Der Beweis wird mit Induktion nach n, der Anzahl der Spalten des Schemas (auf der linken Seite von „|") geführt.

Für $n = 1$ gibt es zwei Fälle. Wenn die Spalte nur 0 enthält so sind wir fertig. In diesem Fall ist dann $k = 0$. Ansonsten kann man zwei Zeilen vertauschen, so dass der erste Koeffizient verschieden von 0 ist. Durch eine Operation vom Typ (1) kann dieser Koeffizient zu 1 gemacht werden. Durch Operationen vom Typ (3) verschwinden die anderen Koeffizienten. In diesem Fall ist $k = 1$.

Ansonsten können wir per Induktion die ersten $n-1$ Spalten auf Zeilenstufenform bringen. Der letzte auftretende Einheitsvektor sei e_l. Wenn nun unterhalb der l-ten Zeile nur 0 steht, so sind wir fertig. In diesem Fall ist $k = l$. Ansonsten kann mit Hilfe von zulässigen Zeilenoperationen erreicht werden, dass in der letzten Spalte e_{l+1} steht, ohne die vorigen Spalten zu ändern. In diesem Fall ist $k = l + 1$. □

Bevor wir jetzt allgemein angeben, wie man aus der Zeilenstufenform die Lösung abliest, hier einige Beispiele.

3.87. Beispiel: Wir lösen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y &= 3, \\ x - y &= 1. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Schema lautet

$$\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}$$

Zur Erinnerung haben wir hier die Variablennamen über die Spalten geschrieben. Subtraktion der ersten von der zweiten Spalte ergibt

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}$$

Division der zweiten Zeile durch -2 und Subtraktion von der ersten ergibt schließlich

$$\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Dies ist eine Zeilenstufenform mit zwei Einheitsvektoren ($k = 2$) ohne „$*$". Dieses äquivalente System liest sich als

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Das ist die eindeutig bestimmte Lösung. Man prüft die Lösung durch Einsetzen nach.

3.88. Beispiel: Wir wollen das reelle System

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 15 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 24 \end{array}$$

lösen. Das Gauß-Schema ist

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \end{array}$$

Abziehen des 4-fachen der ersten von der zweiten und des 7-fachen der ersten zur dritten ergibt.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & -6 & -12 & -18 \end{array}$$

Nun dividieren wir die zweite Zeile durch -3, ziehen das 2-fache von der zweiten von der ersten ab, und addieren das 6-fache der zweiten zur dritten. Wir erhalten

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dies ist schon eine Zeilenstufenform mit $k = 2$. Die Einheitsvektoren e_1, e_2 stehen in den ersten beiden Spalten. Wir schreiben nun dieses System in der folgenden Art und Weise.

$$\begin{aligned} x &= z, \\ y &= 3 - 2z, \end{aligned}$$

indem wir die Variable z auf die rechte Seite bringen. Offenbar sind nun x, y durch z festgelegt und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \{ \begin{pmatrix} z \\ 3-2z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\lambda = z$ umbenannt. Dies ist die gesuchte parametrisierte Darstellung von $\mathbb{L}$. $\mathbb{L}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^3$

3.89. Beispiel: Gegeben sei das Gleichungssystem mit der einen Gleichung

$$x + y + z = 1$$

mit drei Unbekannten. Das Gauß-Schema

$$1 \quad 1 \quad 1 \mid 1$$

ist schon in Zeilenstufenform. Es ist $k = 1$ und e_1 taucht in der ersten Spalte auf. Wir bringen y, z auf die andere Seite und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \{ \begin{pmatrix} 1 - y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\lambda_1 = y$, $\lambda_2 = z$ umbenannt. Dies ist ein affiner Unterraum der Dimension 2, also eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Wir können alternativ die spezielle Lösung sofort ablesen, indem wir $y = z = 0$ setzen. Es ergibt sich $x = 1$ und damit die spezielle Lösung

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Danach berechnen wir eine Basis des homogenen Lösungsraums, indem wir die rechte Seite gleich 0 setzen. Der erste Basisvektor ergibt sich mit $y = 1$ und $z = 0$. Daraus folgt $x = -1$, also

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Basisvektor ergibt sich mit $y = 0$ und $z = 1$. Also

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da x mit durch die Wahl von y, z festgelegt ist, können wir damit alle Lösungen des homogenen Systems erreichen.

3.90. Bemerkung: Sei ein Schema in Zeilenstufenform gegeben. Die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_k$ sollen in Spalten mit Indizes

$$J = \{j_1, \ldots, j_k\}$$

auftauchen, wobei

$$1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$$

sei. Die anderen Spalten sollen Indizes aus einer Menge I haben. Nach Konstruktion haben diese Spalten keine Koeffizienten ungleich 0 unterhalb der k-ten Zeile, sind also in

$$\text{span}\,\{e_1, \ldots, e_k\}.$$

Die rechte Seite sei $\tilde{b}$.

(1) Wenn dann nicht

$$\tilde{b}_{k+1} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$$

ist, so hat das Gleichungssystem offenbar keine Lösung.

(2) Andernfalls finden wir eine spezielle Lösung, indem wir die Variablen in den Spalten I gleich 0 setzen. Die anderen Variablen lassen sich mit

$$x_{j_1} = \tilde{b}_1, \ldots, x_{j_k} = \tilde{b}_k$$

ablesen.

(3) Außerdem finden wir eine Basis des Lösungsraums des homogenen Systems, indem wir die rechte Seite 0 setzen, und dann jede Variable in I gleich 1, die anderen gleich 0. Es ergeben sich $n - k$ linear unabhängige Vektoren, die das homogene Gleichungssystem lösen.

Wir fassen noch einmal unsere Erkenntnisse in einem Satz zusammen.

3.91 Satz: *Das lineare Gleichungssystem*

$$Ax = b, \quad A \in K^{m \times n}, \quad b \in K^n,$$

werde durch zulässige Zeilenoperationen in das äquivalente System

$$\tilde{A}x = \tilde{b}$$

überführt, wobei die Matrix $\tilde{A}$ in k Spalten die Einheitsvektoren

$$e_1, \ldots, e_k \in K^m$$

enthalte und in den anderen Spalten Vektoren aus

$$\text{span}\,\{e_1, \ldots, e_k\}.$$

Wenn dann

$$\tilde{b} \in \text{span}\,\{e_1, \ldots, e_k\}$$

ist, so hat das Gleichungssystem einen $(n-k)$-dimensionalen affinen Unterraum von K^n als Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

Wenn

$$\tilde{b} \notin \text{span}\,\{e_1, \ldots, e_k\}$$

ist, dann hat $Ax = b$ keine Lösung.

Beweis: Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ wird durch dieselben Zeilenoperationen in das System $\tilde{A}x = 0$ überführt.

Es ist offensichtlich, dass jede Lösung durch die Werte in den Spalten, die keine Einheitsvektoren sind, festgelegt ist. Setzt man die Variablen in diesen

Spalten einzeln gleich 1, die anderen gleich 0, so erhält man $n-k$ linear unabhängige Vektoren, die eine Basis von Kern(A) bilden.

Eine spezielle Lösung erhält man, indem man alle diese Variablen gleich 0 setzt.

Nach Satz 3.14 ist der Lösungsraum $\mathbb{L}$ von $Ax = b$ also ein affiner Unterraum von K^m der Dimension $n-k$. □

3.92 Aufgabe: Überlegen Sie sich, dass die $n-k$ gewonnen Lösungen von $Ax = 0$ tatsächlich linear unabhängig sind.

3.93. Bemerkung: Man macht die Probe, indem man die spezielle Lösung und die Basis des Kerns in Ax einsetzt.

3.94. Bemerkung: Wenn $\tilde{A}$ nur aus den Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ besteht, so ist die Lösung von $Ax = b$ eindeutig und gleich

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix}.$$

3.95. Bemerkung: Es lassen sich offenbar auf dieselbe Art auch $n+1$ spezielle Lösungen von $Ax = b$ finden, die den affinen Lösungsraum nach Satz 2.92 aufspannen. Im Beispiel

$$x + y + z = 1$$

erhalten wir die drei Punkte durch

$$\begin{aligned} y = z = 0 &\Rightarrow x = 1, \\ y = 1,\ z = 0 &\Rightarrow x = 0, \\ y = 0,\ z = 1 &\Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also die Ebene durch die drei Einheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$.

3.96 Aufgabe: Berechnen Sie eine Basis des Kerns von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.97 Aufgabe: Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c \end{pmatrix}$$

lösbar und wie lautet dann die Lösung?

3.98 Aufgabe: Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lösbar und wie lautet dann die Lösung?

3.2.2 Berechnung von Basen

Nach Satz 2.62 kann man aus den Spalten einer Matrix A linear unabhängige Spalten auswählen. Wie findet man diese Spalten?

3.99 Satz: *Sei die Zeilenstufenform $\tilde{A}$ aus A durch zulässige Zeilenoperationen entstanden. $\tilde{A}$ enthalte die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_k$ in den Spalten $j_1, \ldots, j_k$. Dann bilden die Spalten von A mit diesen Indizes eine Basis des von den Spalten erzeugten Unterraums von A, also nach Satz 3.55 von* Bild A.

Beweis: Sei $b \in \text{Bild } A$, also $Ax = b$ lösbar. Das Schema $A|b$ gehe durch die Zeilenoperationen in $\tilde{A}|\tilde{b}$ über. Wir können nun das Gleichungssystem $\tilde{A}x = \tilde{b}$ durch einen Vektor x lösen, der nur in den Zeilen $j_1, \ldots, j_k$ Elemente ungleich 0 hat. Diese Lösung erfüllt auch $Ax = b$. Also spannen die Spalten $j_1, \ldots, j_k$ von A den Vektor b auf.

Wir haben noch die lineare Unabhängigkeit dieser Spalten zu zeigen. Angenommen eine Linearkombination dieser Spalten ist 0. Sei also $Ax = 0$ für ein $x \in K^m$, das nur Elemente ungleich 0 in den Zeilen $j_1, \ldots, j_k$ enthält. Dann ist auch $\tilde{A}x = 0$. Dort sieht man aber sehr leicht $x = 0$. □

3.100 Aufgabe: Wählen Sie aus den Spalten von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von Bild A aus.

3.101 Satz: *Sei die Zeilenstufenform $\tilde{A}$ aus A durch zulässige Zeilenoperationen entstanden (mit k Einheitsvektoren). Dann enthalten die ersten k Zeilen von $\tilde{A}$ eine Basis des von den Zeilen von A erzeugten Unterraums von K_n.*

Beweis: Es ist leicht zu sehen, dass die ersten k Zeilen von $\tilde{A}$ linear unabhängig sind, wenn man diese Zeilen in des Spalten betrachtet, in denen die Einheitsvektoren stehen.

Wir müssen nun noch zeigen, dass zulässige Zeilenoperationen den von den Zeilen erzeugten Unterraum nicht ändern. Dies ist aber für jede einzelne Operation leicht nachzuprüfen (Übungsaufgabe). □

3.102 Aufgabe: Sei V ein Vektorraum über K: Zeigen Sie für $v_1, \ldots, v_n \in V$, $\lambda \in K$

$$\text{span}\,\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \text{span}\,\{v_1, v_2 + \lambda v_1, \ldots, v_n\}.$$

3.103. Bemerkung: Wir können also eine Basis von

$$\text{span}\,\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq K^m$$

auf zwei Arten ermitteln.

(1) Wir führen zulässige Zeilenoperationen an der Matrix

$$A = (v_1, \ldots, v_n) \in K^{m \times n}$$

durch. Wenn $j_1, \ldots, j_k$ die Spalten mit den Einheitsvektoren sind, so ist

$$v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}$$

die gesuchte Basis.

(2) Wir führen zulässige Zeilenoperationen an der Matrix A^T durch und erhalten in den ersten k Zeilen eine gesuchte Basis. Alternativ kann man dieselben Operationen an den Spalten von A durchführen, und eine Spaltenstufenform erreichen.

3.104 Aufgabe: Führen Sie Methode (2) durch, um eine Basis des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

aufgespannten Unterraums zu finden.

3.2.3 Rang

3.105. Definition: Als **Spaltenrang** einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ bezeichnen wir die Dimension des von den Spalten von A aufgespannten Unterraums von K^n. Nach Satz 55 also

$$\text{Spaltenrang}\, A = \dim \text{Bild}\, \phi_A.$$

Als **Zeilenrang** bezeichnen wir den Spaltenrang von A^T, also die Dimension des von den Zeilen aufgespannten Unterraums des K_m.

Der folgende Satz zeigt, dass der Zeilenrang immer gleich dem Spaltenrang ist. Wir sprechen daher einfach vom **Rang** einer Matrix.

3.106 Satz: *Der Zeilenrang einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist gleich dem Spaltenrang dieser Matrix.*

Beweis: Sei A durch zulässige Zeilenumformungen in die Matrix $\tilde{A}$ überführt, die k Einheitsvektoren besitze. Nach Satz 3.99 ist k der Spaltenrang von A. Nach Satz 3.101 ist k auch der Zeilenrang von A. $\square$

3.107 Satz: *Ein Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn*

$$\text{Rang}\,(A|b) = \text{Rang}\,(A)$$

ist. Dabei sei $A|b$ die Matrix, die aus den Spalten von A und b besteht.

Beweis: Offenbar ist die Bedingung äquivalent dazu, dass b linear abhängig von den Spalten von A ist. $\square$

3.2.4 Berechnung der inversen Matrix

Der Gauß-Algorithmus kann auch **simultan** für mehrere rechte Seiten angewendet werden. Zur Lösung von

$$Av_1 = b_1, \ldots, Av_k = b_k$$

wenden wir zulässige Zeilenoperationen auf

$$A|b_1, \ldots, b_k$$

an, bis A in eine Zeilenstufenform $\tilde{A}$ umgewandelt wird. Dann lassen sich spezielle Lösungen der Gleichungssysteme leicht ablesen.

3.108 Satz: *Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann ist A genau dann invertierbar, wenn sich A durch zulässige Zeilenoperationen in I_n umformen lässt. Sei nun*

$$(A|I_n) \to (I_n|B)$$

mit Hilfe von zulässigen Zeilenoperationen umgewandelt. Dann gilt $B = A^{-1}$.

Beweis: Wenn sich A in I_n umwandeln lässt, dann ist Rang (A) gleich n. Also ist A invertierbar nach Satz 3.20. Wenn umgekehrt A invertierbar ist, dann ist Rang $(A) = n$ und daher $k = n$ in der Zeilenstufenform.

Die Inverse ist die Matrix B mit $AB = I_n$. Sie löst also simultan die Gleichungssystem

$$Ab_1 = e_1, \ldots, Ab_n = e_n.$$

Die speziellen Lösungen $b_1, \ldots, b_n$ dieser Gleichungssysteme lassen sich in der Tat aus dem Schema $(I_n|B)$ ablesen. $\square$

3.109 Aufgabe: Ermitteln Sie die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Führen Sie die Rechnung möglichst lange ohne Brüche durch!

3.110 Aufgabe: Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

invertierbar? Wie lautet in diesem Fall die inverse Matrix?

3.111 Aufgabe: Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ x & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & 1 \end{pmatrix},$$

wobei alle nicht aufgeführten Elemente der Matrix gleich 0 seien.

3.2.5 Basiswechsel

3.112. Definition: Sei V ein m-dimensionaler Vektorraum über K mit einer Basis

$$\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$$

Dann definieren wir die lineare Abbildung

$$\phi_{\mathcal{A}} : K^n \to V$$

durch die Bilder der Einheitsvektoren gemäß

$$\phi_{\mathcal{A}}(e_i) = v_i \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Es gilt also

$$\phi_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Nach Aufgabe 3.23 ist $\phi_{\mathcal{A}}$ ein Isomorphismus. Wir haben diesen Isomorphismus schon benutzt um zu zeigen, dass jeder n-dimensionale Vektorraum über K isomorph zum K^n ist.

3.113. Bemerkung: Die Abbildung $\phi_{\mathcal{A}}^{-1}$ berechnet die Basisdarstellung zu einem Vektor v. Das heißt, sie ermittelt die Abbildung

$$\sum_{i=0} \lambda_i v_i \mapsto \lambda.$$

3.114. Beispiel: Sei $\mathcal{E}$ die kanonische Einheitsmatrix von K^m. Dann ist $\phi_{\mathcal{E}}$ die identische Abbildung. Denn

$$\phi_{\mathcal{E}}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \lambda.$$

3.115. Definition: Seien V ein n-dimensionaler und W ein m-dimensionaler Vektorraum über K, $\phi : V \to W$ linear. Die Basisdarstellung von ϕ bezüglich einer Basis $\mathcal{A}$ von V und einer Basis $\mathcal{B}$ von W ist die darstellende Matrix der Abbildung

$$\phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \phi \circ \phi_{\mathcal{A}} : K^n \to K^m.$$

Wir bezeichnen diese Matrix als

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\phi).$$

Diese etwas unübersichtliche Situation lässt sich zunächst in folgendem Diagramm darstellen.

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{B}}^{-1}\circ\phi\circ\phi_{\mathcal{A}}} & K^m \\ \downarrow \phi_{\mathcal{A}} & & \downarrow \phi_{\mathcal{B}} \\ V & \xrightarrow{\phi} & W \end{array}$$

Ein solches Diagramm heißt **kommutierendes Diagramm**. Es ist gleichgültig, auf welchen Wegen zwischen zwei man den Pfeilen folgt. Immer entsteht dieselbe Abbildung.

Da jede lineare Abbildung zwischen K^n und K^m eindeutig durch eine Matrix darstellbar ist, ist

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\phi) \in K^{m \times n}$$

wohlbestimmt.

Rechnerisch ergibt sich folgendes Bild. Sei

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (v_1, \ldots, v_n),\\ \mathcal{B} &= (w_1, \ldots, w_m).\end{aligned}$$

Wenn dann

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \in V$$

ist, und

$$\phi(v) = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m \in W,$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\phi) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation mit der darstellenden Matrix berechnet die Basisdarstellung des Bildes aus der Basisdarstellung des Urbilds.

3.116. Bemerkung: Hat man zwei Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ eines Vektorraums V, so kann man mit Hilfe der Matrix

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\mathrm{id})$$

einen **Basiswechsel** durchführen. Denn sei

$$\lambda = \phi_{\mathcal{A}}^{-1}(x)$$

die Basisdarstellung bezüglich $\mathcal{A}$ und

$$\mu = \phi_{\mathcal{B}}^{-1}(x)$$

die Basisdarstellung bezüglich $\mathcal{B}$, dann gilt

$$\mu = \mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot \lambda.$$

Interessant sind insbesondere Basisdarstellung mit derselben Quell- und Zielbasis $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

3.117. Beispiel: Sei $\mathcal{E}$ die kanonische Einheitsmatrix von K^n und $\mathcal{A}$ eine andere Basis von K^n. Trägt man die Basis

$$\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n),$$

als Spalten einer Matrix

$$A = (v_1, \ldots, v_n) \in K^{n \times n}$$

ein, so gilt

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = A.$$

Denn

$$x = \phi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\Rightarrow\; x = A\lambda = \phi_{\mathcal{E}}(A\lambda).$$

Wenn also λ die Basisdarstellung bezüglich $\mathcal{A}$ ist, dann ist $A\lambda$ die Basisdarstellung bezüglich $\mathcal{E}$. Umgekehrt berechnet man die Basisdarstellung λ bezüglich $\mathcal{A}$ aus der kanonischem Basisdarstellung μ durch

$$\lambda = A^{-1}\mu.$$

3.118. Bemerkung: Mit Hilfe der darstellenden Matrizen kann man auch lineare Abbildungen $\phi_M : K^n \to K^m$ mit $M \in K^{m \times n}$ bezügliche *anderer* Basen als der kanonischen Einheitsbasis darstellen. Bezeichnet man die kanonischen Basen mit $\mathcal{E}_n$ bzw. $\mathcal{E}_m$, so gilt natürlich

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_m}(\phi_M) = M$$

Sei $\mathcal{A}$ eine Basis von K^m, deren Vektoren wir in eine Matrix A eintragen, sowie $\mathcal{B}$ eine Basis von K^n, deren Vektoren wir in eine Matrix B eintragen. Dann gilt

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\phi) = B^{-1}MA$$

Denn, angenommen wir haben eine Darstellung λ von $x \in K^m$ bezüglich $\mathcal{A}$, also

$$x = A\lambda$$

Dann ist

$$\mu := B^{-1}MA\lambda = B^{-1}Mx = B^{-1}\phi(x)$$

eine Darstellung von $\phi(x)$ bezüglich $\mathcal{B}$. Mit $M = I_n$ kann man insbesondere zwei Basisdarstellungen des K^n ineinander umrechnen.

3.119. Beispiel: Wir stellen die Abbildung $\phi_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{A}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dar. Dazu haben wir zu berechnen

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{A}}(\phi_M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Als Beispiel berechnen wir das Bild des Punktes

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

in beiden Darstellungen. Zunächst gilt

$$\phi_M(x) = Mx = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Stellen wir x bezüglich $\mathcal{A}$ dar, so erhalten wir

$$\lambda = A^{-1}x = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Zur Probe rechnet man nach, dass in der Tat

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 5/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist. Nun berechnen wir die Basisdarstellung μ von Mx in der Basis $\mathcal{A}$ durch Multiplikation mit der darstellenden Matrix

$$\mu = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zurückrechnen in die kanonische Basis ergibt in der Tat dasselbe Ergebnis für Mx.

$$A\mu = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = Mx.$$

In Abbildung 3.2 ist die Basis v_1, v_2 und deren Bilder

$$w_1 = Mv_1, \quad w_2 = Mv_2$$

eingezeichnet. Man erkennt

$$\begin{aligned} w_1 &= 3/2v_1 + 1/2v_2 \\ w_2 &= 1/2v_1 - 1/2v_2 \end{aligned}$$

In der Tat ist also die Basisdarstellung von $w_1 = Mv_1$ der Vektor

$$\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{A}}(\phi_M) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.120 Aufgabe: Berechnen Sie die Basisdarstellung bezüglich der obigen Basis für die Abbildung

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie wieder die Basis und die Bilder der Basis in ein Koordinatensystem und stellen Sie die Bilder bezüglich der alternativen Basis dar.

3.121. Beispiel: Wir wissen bereits, dass die Funktionen

$$1, x, \ldots, x^n$$

eine Basis des Polynomraums $\mathcal{P}_n \subset C(\mathbb{R})$ sind, die wir mit $\mathcal{A}$ bezeichnen. Für eine Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

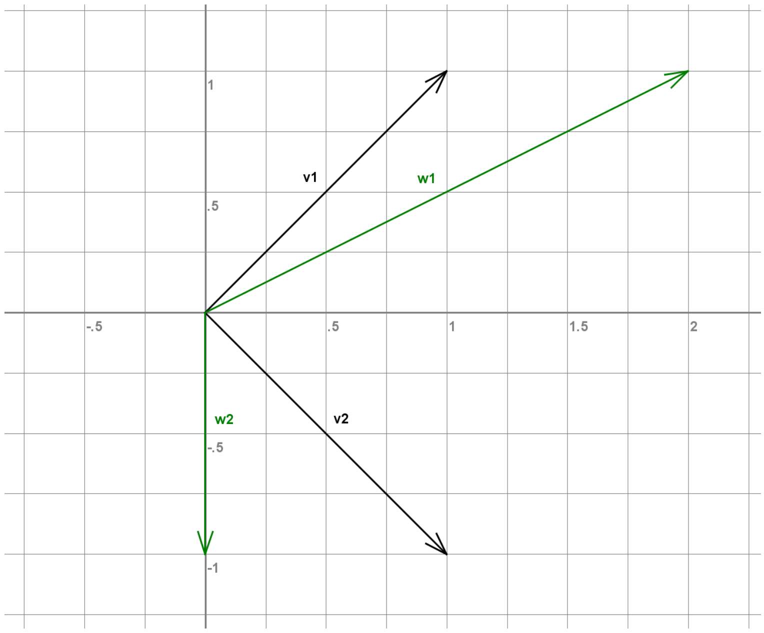

Abbildung 3.2: Basis und Bilder der Basis

definieren wir die Ableitung als Bild der Abbildung

$$\phi(p) = p'.$$

ϕ ist aufgrund der Rechengesetze für Ableitungen linear. Es gilt

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{A}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Denn offenbar gilt dann

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{A}}(\phi) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ \vdots \\ na_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In der Tat

$$\phi(p)(x) = p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1}.$$

3.122 Aufgabe: (1) Sei $\phi : V \to W$ linear, und $\psi : W \to H$ linear, $\mathcal{A}$ eine Basis von V, $\mathcal{B}$ eine Basis von W und $\mathcal{C}$ eine Basis von H. Zeigen Sie

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{C}}(\psi \circ \phi) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\phi).$$

(2) Sei $\phi : V \to V$ bijektiv und $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Basen von V. Zeigen Sie

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{A}}(\phi^{-1}) = \mathcal{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\phi)^{-1}.$$

3.3 Anwendungen

3.3.1 Analytische Geometrie

Der folgende Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus den Überlegungen zum Gaußschen Algorithmus.

3.123 Satz: *Sei $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^n$. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ ist ein affiner Unterraum der Dimension $n - \text{Rang}\,(A)$.*

3.124. Definition: Ein affiner Unterraum des K^n mit Dimension $n-1$ heißt **Hyperebene**.

3.125 Aufgabe: Zeigen Sie: Wenn wir ein lineares Gleichungssystem mit einer Gleichung

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b$$

auf dem K^n haben und nicht alle a_i gleich 0 sind, so ist der Lösungsraum eine Hyperebene. Geben Sie eine Basis dieser Hyperebene an.

3.126 Satz: *$E \subset K^n$ ist genau dann ein affiner Unterraum der Dimension k, wenn E die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems*

$$Ax = b, \quad A \in K^{(n-k) \times n},$$

aber nicht Lösungsmenge eines Gleichungssystems mit weniger als $n - k$ Gleichungen ist.

Insbesondere ist jede Hyperebene Lösungsmenge eines Gleichungssystems mit nur einer Gleichung, deren Koeffizienten nicht alle 0 sind.

Beweis: Sei E ein affiner Unterraum der Dimension k, also

$$E = a + U$$

mit $\dim U = k$. Sei $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von U. Wir lösen das Gleichungssystem

$$u_1^T x = 0, \ldots u_k^T x = 0,$$

Also $Ux = 0$, wobei U die Zeilen $u_1^T, \ldots, u_k^T$ habe. Der Zeilenrang von U ist k, also auch der Spaltenrang. Nach der Dimensionsformel in Satz 3.18 hat der Lösungsraum Kern U die Dimension $n - k$. Es gibt also linear unabhängige Vektoren

$$v_1, \ldots v_{n-k}$$

mit

$$u_i^T v_j = 0, \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, n-k.$$

Es folgt

$$v_j^T u_i = 0 \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, n-k,$$

also

$$v_j^T u = 0 \qquad \text{für alle } u \in U,\ j = 1, \ldots, n-k.$$

Setzt man $v_1^T, \ldots, v_{n-k}^T$ in die Spalten einer Matrix $V \in K^{(n-k)\times n}$ ein , so entsteht ein Gleichungssystem

$$Vu = 0.$$

Dieses System von $n-k$ Gleichungen hat also einen Lösungsraum $\mathbb{L}$ mit

$$U \subseteq \mathbb{L}.$$

Nach der Dimensionsformel kann der Lösungsraum dieser $n-k$ Gleichungen höchstens die Dimension

$$n - (n-k) = k$$

haben. Wegen $\dim U = k$ folgt also $U = \mathbb{L}$. Weniger als $n-k$ Gleichungen hätten aber einen Lösungsraum mit einer Dimension größer als k. E ist dann Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$Vu = Va.$$

Umgekehrt wissen wir schon, dass der Lösungsraum jedes Gleichungssystems

$$Vu = 0, \qquad V \in K^{(n-k)\times n}$$

ein affiner Unterraum der Dimension $n - \text{Rang } V$ ist. Wenn weniger Gleichungen nicht denselben Lösungsraum haben, so muss V vollen Rang haben, also $\text{Rang } V = n-k$ sein. Der Lösungsraum hat dann die Dimension $n-(n-k) = k$.
$\square$

Die im Beweis verwendete Methode ist konstruktiv. Sie kann daher zur Ermittlung der gesuchten Gleichungen herangezogen werden.

3.127 Aufgabe: (1) Berechnen Sie mit der Methode im Beweis des obigen Satzes eine Gleichung für die Ebene durch die Punkte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$.

(2) Berechnen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgerade dieser Ebene mit der Ebene mit der Gleichung

$$x + y + z = 1.$$

3.3.2 Affine Abbildungen

3.128. Definition: Seien V, W Vektorräume über K. Dann heißt

$$\psi : V \to W$$

affine Abbildung, wenn sie die Form

$$\psi(x) = \phi(x) + b$$

hat, wobei $\phi : V \to W$ linear ist und $b \in W$.

3.129 Aufgabe: Zeigen Sie dass zwei affine Abbildungen

$$\psi(x) = \phi(x) + b, \quad \tilde{\psi}(x) = \tilde{\phi}(x) + \tilde{b}$$

genau dann gleich sind, wenn $\phi = \tilde{\phi}$ ist und

$$b - \tilde{b} \in \text{Kern } \phi$$

3.130 Satz: *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{R}$. Dann ist $\psi : V \to W$ genau dann affin, wenn es Streckenverhältnisse erhält. D.h. für alle $c, d \in V$ und $0 \leq \lambda \leq 1$, $\mu = 1 - \lambda$ gilt*

$$\psi(\lambda c + \mu d) = \lambda \psi(c) + \mu \psi(d).$$

Beweis: Zu $\psi : V \to W$ setzen wir

$$\phi(x) = \psi(x) - \psi(0).$$

Wenn ψ affin ist, dann ist ϕ linear. Man hat

$$\begin{aligned} \psi(\lambda c + \mu d) &= \phi(\lambda c + \mu d) + \psi(0) \\ &= \lambda \phi(c) + \mu \phi(d) + \lambda \psi(0) + \mu \psi(0) \\ &= \lambda(\phi(c) + \psi(0)) + \mu(\phi(d) + \psi(0)) \\ &= \lambda \psi(c) + \mu \psi(d) \end{aligned}$$

für alle $0 \leq \lambda \leq 1$, $mu = 1 - \lambda$, $c, d \in V$. Also erhalten affine Abbildungen Streckenverhältnisse. Wenn umgekehrt die Abbildung ψ Streckenverhältnisse erhält, so erhält, wie man analog zur obigen Rechnung nachprüft, auch ϕ Streckenverhältnisse und es gilt $\phi(0) = 0$. Also, für $0 \leq \lambda \leq 1$ und $x \in V$

$$\phi(\lambda x) = \phi(\lambda x + \mu 0) = \lambda \phi(x) + \mu \phi(0) = \lambda \phi(x).$$

mit $\mu = 1 - \lambda$. Für $\lambda > 1$ folgt wegen $0 \leq 1/\lambda < 1$

$$\phi(x) = \phi(\frac{1}{\lambda} \lambda x) = \frac{1}{\lambda} \phi(\lambda x),$$

also $\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$. Damit hat man

$$\phi(x + y) = \phi(\frac{1}{2} 2x + \frac{1}{2} 2y) = \frac{1}{2}(\phi(2x) + \phi(2y)) = \phi(x) + \phi(y).$$

Insbesondere

$$0 = \phi(0) = \phi(x + (-x)) = \phi(x) + \phi(-x).$$

Es folgt für $\lambda < 0$

$$\phi(\lambda x) = \phi(-|\lambda|x) = -|\lambda|\phi(x) = \lambda\phi(x).$$

ϕ ist also linear und ψ ist affin. □

3.131. Bemerkung: Wenn $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ und ψ stetig ist, so genügt, dass ψ Streckenmitten erhält, also

$$\psi(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d) = \frac{1}{2}\psi(c) + \frac{1}{2}\psi(d).$$

3.132. Bemerkung: Aufgrund dieses Satzes bilden affine Abbildungen konvexe Mengen auf konvexe Mengen ab.

3.133 Aufgabe: Zeigen Sie, dass das Urbild einer konvexen Menge unter einer affinen Abbildung wieder konvex ist.

3.134 Satz: *Seien V, W Vektorräume über K und $\psi : V \to W$ affin. Dann ist das Bild eines affinen Unterraums von V ein affiner Unterraum von W. Das Urbild eines affinen Unterraums von W ist ein affiner Unterraum von V oder leer.*

Beweis: $\phi(x) = \psi(x) - \psi(0)$ ist linear. Man zeigt für den affinen Unterraum $x + U \subseteq V$

$$\psi(x + U) = \psi(x) + \phi(U).$$

Also ist $\psi(x+U)$ ein affiner Unterraum von W. Sei $y+H$ ein affiner Unterraum von W und $\psi(x) \in y + H$, als $\psi^{-1}(y + H)$ nicht leer. Man zeigt dann

$$\psi^{-1}(y + H) = x + \phi^{-1}(H).$$

Es folgt die Behauptung. □

3.135 Aufgabe: Zeigen Sie die beiden Identitäten im obigen Beweis.

3.136. Bemerkung: Die Dimensionsformel lässt sich nicht so einfach auf affine Abbildungen übertragen. Sei $\psi : V \to W$ affin und $E = x + U$ ein endlich dimensionaler affiner Unterraum von V. Dann ist nach der ersten Formel im obigen Beweis und der Dimensionsformel

$$\dim \psi(E) = \dim \phi(U) = \dim U - \dim \operatorname{Kern} \phi|_U = \dim E - \dim \operatorname{Kern} \phi|_U.$$

3.3.3 Interpolation

Wir untersuchen ein in der numerischen Mathematik wichtiges Beispiel, in dem Funktionenräume eine wichtige Rolle spielen. Sei dazu

$$V \subseteq C(\mathbb{R})$$

ein n-dimensionaler Unterraum. Seien

$$x_1 < \ldots < x_n$$

n paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{R}$. Die Aufgabe der **Interpolation** besteht nun darin, zu gegebenen Werten

$$y_1 < \ldots < y_n$$

eine Funktion $v \in V$ zu finden mit

$$v(x_i) = y_i \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n$$

3.137. Beispiel: Sei $V = \mathcal{P}_1$ der Raum der Geraden $ax + b$ in $\mathbb{R}^2$. Dann ist bekannt, dass man in zwei verschiedenen Punkten immer interpolieren kann. Es gilt nämlich für $x_1 \neq x_2$ und für die Gerade

$$p(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

in der Tat

$$p(x_1) = y_1, \quad p(x_2) = y_2.$$

Die Abbildung

$$\phi : V \to \mathbb{R}^n$$
$$\phi(v) = \begin{pmatrix} v(x_1) \\ \vdots \\ v(x_n) \end{pmatrix}$$

ist linear, wie man nachrechnet. Die Interpolationsaufgabe ist nun für alle Werte $y_1, \ldots, y_n$ lösbar, wenn diese Abbildung surjektiv ist. Aufgrund der Dimensionsformel ist sie dann auch immer eindeutig lösbar. Wir können also den folgenden Satz formulieren.

3.138 Satz: *Sei $V \subset C(\mathbb{R})$ ein n-dimensionaler Unterraum. Dann ist die Interpolationsaufgabe in n verschiedenen Punkten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ genau dann für alle Werte lösbar, wenn jede Funktion $v \in V$, die auf diesen Punkten 0 ist, identisch 0 ist.*

3.139. Beispiel: $\mathcal{P}_n \subseteq C(\mathbb{R})$ ist ein $(n+1)$-dimensionaler Unterraum. In der Analysis wird bewiesen, dass ein Polynom, das nicht identisch 0 ist, höchstens n verschiedene Nullstellen haben kann. Also kann man mit Polynomen n-ten Grades in $n + 1$ Punkten immer eindeutig interpolieren.

Quotientenräume

Mit Hilfe von Quotientenräumen lassen sich lineare Räume und Abbildung „vereinfachen“. Man identifiziert dazu Punkte, die in einem gemeinsamen affinen

Unterraum liegen. Im Fall von linearen Abbildungen werden etwa Punkte mit gleichem Bild identifiziert. Die Abbildung wird dadurch injektiv.

3.140. Definition: Die Relation $\sim$ auf einer Menge V heißt Äquivalenzrelation, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) Für alle $x, y, z \in V$ gilt

$$x \sim y, \quad y \sim z \;\Rightarrow\; x \sim z.$$

(2) Für alle $x, y \in V$ gilt

$$x \sim y \;\Rightarrow\; y \sim x.$$

(3) Für alle $x \in V$ gilt

$$x \sim x.$$

3.141 Satz: *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V und für $x \in V$*

$$[x] = \{y \in V : x \sim y\}.$$

Dann ist das System der Mengen $[x]$ eine Klassenaufteilung von V. Das heißt, es gilt

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset \;\Rightarrow\; [x] = [y]$$

und

$$V = \bigcap_{x \in V} [x].$$

3.142 Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz.

3.143. Bemerkung: Man kann umgekehrt zu jeder Klassenaufteilung $\mathcal{S}$ von V eine Äquivalenzrelation finden, die diese Klassenaufteilung erzeugt. Dazu definiert man einfach, dass $x \sim y$ gelten soll, wenn x und y in derselben Menge $S \in \mathcal{S}$ liegen.

3.144. Definition: Sei V ein linearer Vektorraum über K und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Wir definieren dann eine **Äquivalenzrelation** „$\sim_U$“ durch

$$x \sim_U y \;\Leftrightarrow\; x - y \in U.$$

3.145 Aufgabe: Weisen Sie nach, dass $\sim_U$ in der Tat eine Äquivalenzrelation ist.

3.146. Definition: Die Menge der Klassen bezeichnet man als **Quotientenraum**

$$V/U = \{[x]_U : x \in V\}.$$

Wir führen in V/U eine Addition ein, indem wir für alle $x, y \in V$ definieren

$$[x]_U + [y]_U = [x + y]_U.$$

Außerdem eine Multiplikation für $\lambda \in K$ und $x \in V$

$$\lambda [x]_U = [\lambda x]_U.$$

3.147 Satz: *Die Addition und Multiplikation sind auf diese Weise wohldefiniert, und V/U wird zu einem Vektorraum über K.*

Beweis: Damit die Addition wohldefiniert ist, muss man zeigen, dass

$$[x]_U = [\tilde{x}]_U, \quad [y]_U = [\tilde{y}]_U \;\Rightarrow\; [x+y]_U = [\tilde{x}+\tilde{y}]_U$$

gilt. Das ist aber leicht, wenn man beachtet, dass nach Definition

$$[x]_U = [\tilde{x}]_U \;\Leftrightarrow\; x - \tilde{x} \in U$$

gilt. Analog zeigt man, dass die Multiplikation wohldefiniert ist.

Es bleibt nachzuprüfen, dass V/U mit diesen Operationen ein Vektorraum ist. Dies überlassen wir als Übung. □

3.148 Aufgabe: Zeigen Sie, dass V/U mit den oben definierten Operationen ein Vektorraum ist. Der Nullvektor dieses Raumes ist

$$0 = [0] = U.$$

3.149. Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \operatorname{span}\{e_1\}$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \sim_U \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; x_2 = y_2.$$

Die Klasse $[x]$ ist die Gerade durch $x \in \mathbb{R}^2$, die parallel zur y-Achse liegt.

3.150. Beispiel: Für lineare Abbildungen $\phi : V \to W$ kann man

$$V/\operatorname{Kern}\phi$$

betrachten. Die Elemente dieses Raumes sind die Klassen

$$[x] = x + \operatorname{Kern}\phi = \phi^{-1}(\phi(x)).$$

Es gilt

$$x \sim_{\operatorname{Kern}\phi} y \;\Leftrightarrow\; \phi(x) = \phi(y).$$

3.151 Satz: *Sei V ein endlich-dimensionaler Raum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gilt*

$$\dim V/U = \dim V - \dim U.$$

Beweis: Sei

$$v_1, \ldots, v_k$$

eine Basis von U, die wir mit

$$v_{k+1}, \ldots, v_n$$

zu einer Basis von V ergänzen. Es genügt zu zeigen, dass

$$[v_{k+1}], \ldots, [v_n]$$

eine Basis von V/U ist. Wir zeigen zunächst, dass dieses System Erzeugendensystem ist. Dazu sei

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V.$$

Dann folgt

$$[v] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [v_i] = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i [v_i],$$

denn es gilt wegen $v_1, \ldots, v_k$ in U

$$[v_1] = \ldots = [v_k] = 0.$$

Wir zeigen nun die lineare Unabhängigkeit. Sei dazu

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i [v_i] = 0.$$

Es folgt

$$\left[\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i \right] = 0$$

und daher

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i \in U.$$

Also muss aber diese Linearkombination auch Linearkombination von $v_1, \ldots, v_k$ sein. Da $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis ist, folgt

$$\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0.$$

$\square$

3.152 Satz: *Sei V endlich-dimensional und $\phi : V \to W$ linear. Dann ist die Abbildung*

$$\tilde{\phi} : V/\operatorname{Kern} \phi \to \phi(V),$$
$$\tilde{\phi}([x]) = \phi(x)$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Wieder muss man zunächst zeigen, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Wenn aber $[x] = [\tilde{x}]$ ist, dann gilt

$$\tilde{\phi}([x]) = \phi(x) = \phi(\tilde{x}) = \tilde{\phi}([\tilde{x}]).$$

Es gilt außerdem nach den Dimensionsformeln aus Satz 3.151 und Satz 3.18

$$\dim V/\operatorname{Kern} \phi = \dim V - \dim \operatorname{Kern} \phi = \dim \phi(V).$$

Daher genügt es zu zeigen, dass $\tilde{\phi}$ surjektiv ist. Für $y = \phi(x) \in \phi(V)$ gilt aber $\tilde{\phi}([x]) = y$. $\square$

Dualraum

3.153. Definition: Zu zwei linearen Räumen V, W über K definieren wir den Raum der linearen Abbildungen zwischen V und W als

$$\mathcal{L}(V,W) = \{\phi : \phi : V \to W \text{ linear}\}.$$

Dieser Raum ist ein Unterraum von $\mathcal{A}(V,W)$ und wir können die Addition und die Multiplikation punktweise definieren.

$$(\phi_1 + \phi_2)(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x),$$
$$(\lambda\phi)(x) = \lambda\phi(x).$$

3.154 Aufgabe: Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(V,W)$ mit Hilfe dieser Operationen zu einem Vektorraum über K wird.

3.155 Aufgabe: Seien V und W endlich-dimensional, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\psi : \mathcal{L}(V,W) \to M^{m\times n}(K)$$

die jedem ψ seine Matrixdarstellung bezüglich fester Basen von V und W zuordnet ein Isomorphismus ist, und dass insbesondere

$$\dim \mathcal{L}(V,W) = nm$$

gilt. Für $V = K^n$ und $W = K^m$ ist insbesondere

$$\psi(\phi_A) = A.$$

3.156. Definition: Sei V ein Vektorraum über K. Den Raum der Funktionale auf V, also den $\mathcal{L}(V,K)$, bezeichnen wir als linearen **Dualraum** V^* von V.

3.157. Bemerkung: Nach obiger Aufgabe hat dieser Raum die gleiche Dimension wie V, und ist daher isomorph zu V. Im Fall $V = K^n$ ist er offenbar isomorph zum Raum der Zeilenvektoren der Länge n.

3.158. Beispiel: Für Funktionenräume ist der lineare Dualraum gewöhnlich zu groß. Man betrachtet hier zum Beispiel nur stetige Funktionale, also einen Teilraum des linearen Dualraums. Die genaue Definition der Stetigkeit eines linearen Funktionals wird in höheren Analysis gegeben.

Kapitel 4

Das Skalarprodukt

In diesem Kapitel behandeln wir das reelle und komplexe Skalarprodukt. Aus der Schule bekannt ist das reelle Skalarprodukt als Maß dafür, ob zwei Vektoren senkrecht stehen. Wir werden dieses Konzept verallgemeinern. Interessante Anwendungen ergeben sich insbesondere in Funktionenräumen.

4.1 Skalarprodukte und Normen

4.1.1 Skalarprodukte

Wir werden uns in diesem Abschnitt nur mit Vektorräumen über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ beschäftigen. Zur Abkürzung schreiben wir $\mathbb{K}$ für einen dieser beiden Körper. Die Konjugation

$$\overline{a+ib} = a - ib,$$

die wir hier oft verwenden werden, ist für im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ einfach die identische Abbildung ($\overline{x} = x$).

4.1. Definition: Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung von $V \times V$ nach $\mathbb{K}$

$$(v, w) \mapsto < v, w >$$

heißt **Skalarprodukt** (engl.: scalar product), wenn sie

1. linear in der ersten Variablen ist, wenn also gilt

$$< \lambda v, w > = \lambda < v, w >,$$
$$< v_1 + v_2, w > = < v_1, w > + < v_2, w >$$

   für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $v, w, v_1, v_2 \in V$,

2. konjugiert symmetrisch ist, also

$$< w, v > = \overline{< v, w >}$$

   für alle $v, w \in V$,

3. positiv definit ist, das heißt
$$< v, v >> 0$$
für alle $v \neq 0$.

Man nennt einen Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt einen **Skalarproduktraum** oder **Euklidscher Vektorraum**. Im komplexen Fall spricht man von einem **unitären Raum**.

4.2. Bemerkung: Im reellen Fall ist das Skalarprodukt dann auch linear im zweiten Argument. Man spricht hier von einer symmetrischen **Bilinearform**. Im komplexen Fall ist es allerdings nur konjugiert linear. Es gilt

$$\begin{aligned} < v, \lambda w > &= \overline{< \lambda w, v >} \\ &= \overline{\lambda \cdot < w, v >} \\ &= \overline{\lambda} \cdot \overline{< w, v >} \\ &= \overline{\lambda} \cdot < v, w > . \end{aligned}$$

Eine konjugiert lineare Form dieser Art nennt man auch **Hermitesche Form**.

4.3. Bemerkung: Wegen
$$< v, v >= \overline{< v, v >}$$
ist auch im komplexen Fall immer $< v, v >\in \mathbb{R}$. Weil $< v, w >$ in v linear ist, gilt wie bei jeder linearen Abbildung
$$< 0, v >= 0$$
für alle $v \in V$, insbesondere $< 0, 0 >= 0$. Die Bedingung (3) sagt also insbesondere aus, dass
$$< v, v >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$$
ist. Darüber hinaus muss also für alle $v \in V$
$$< v, v >\geq 0$$
gelten. Gilt nur diese Eigenschaft, so spricht man von einer positiv semi-definiten Bilinearform, bzw. Hermiteschen Form.

4.4. Definition: Auf dem $\mathbb{R}^n$ können wir ein Skalarprodukt durch
$$< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$
definieren. Man nennt dieses Skalarprodukt **Euklidsches Skalarprodukt**. Auf dem $\mathbb{C}^n$ definieren wir
$$< x, y >= \sum_{k=0}^{n} x_k \overline{y_k}.$$
Diese Skalarprodukte nennt man auch kanonische Skalarprodukte auf dem $\mathbb{R}^n$, bzw. $\mathbb{C}^n$.

4.5 Aufgabe: Weisen Sie nach, dass die beiden Abbildungen Skalarprodukte sind.

4.1.2 Normen

Index

Äquivalenzrelation, 126

Abbildung, 30
Abbildungsraum, 61
Abstraktion, 10
abzählbar, 48
affine Abbildung, 123
affiner Unterraum, 76
assoziative Algebra, 94
Assoziativgesetz, 12
aufgespannter Unterraum, 64
Aufzählung, 25
Aussonderung, 24
Austauschsatz, 71
Auswahlaxiom, 51

Basis, 66
Basiswechsel, 117
bijektiv, 32
Bild, 34, 89
Bildbereich, 32
Bilinearform, 132
Binomialkoeffizient, 46
Boolesche Aussagen, 14

Cantorsches Diagonalargument, 50

darstellende Matrix, 97
Definitionsbereich, 32
Dimension, 70
Dimensionsformel, 91
Direkte Summe, 74
disjunkt, 45
disjunkt (disjoint), 27
Distributivgesetz, 54
Dualraum, 129

Einheitsmatrix, 98
Einheitsvektoren, 70
Einschränkung, 32
Element, 22
elementweise, 102

endlich, 44
endlich-dimensional, 70
Endomorphismus, 94
Erzeugendensystem, 66
Euklidscher Vektorraum, 132
Euklidsches Skalarprodukt, 132

Fakultät, 43
Fallunterscheidung, 20
Folge, 42
Fortsetzung, 32
Funktion, 30
Funktional, 88

Gauß-Algorithmus, 106
Gerade, 78
gleichmächtig, 50
Gruppe, 12
Gruppe der Ismorphismen, 95

Halbgruppe, 38
Hermitesche Form, 132
homogenens Gleichungssystem, 106
Hyperebene, 121

identische Abbildung, 38
Imaginärteil, 57
Induktionsanfang, 40
Induktionsschritt, 40
induktive Menge, 39
injektiv, 32
Interpolation, 125
inverses Element, 12
invertierbare Matrix, 101
isomorph, 93
Isomorphismus, 93

Körper, 54
kanonische Basis, 70
Kern, 89
Klassenaufteilung, 46
Kombinatorik, 46

Kommutativgesetz, 12
kommutierendes Diagramm, 117
Komplexe Zahlen, 57
konstruktiver Beweis, 21
konvex, 81
konvexe Hülle, 81
Konvexkombination, 82
Kreuzprodukt, 29

Lösungsmenge, 106
linear, 87
linear unabhängig, 66
linearer Operator, 94
lineares Gleichungssystem, 106
Linearkombination, 64

Mächtigkeit, 44
Matrix, 95
Menge, 22
Menge aller Abbildungen, 38
Mengenlehre, 23
Mengensysteme, 28
Monomorphismus, 94

neutrales Element, 12
Nullraum, 60

Operator, 30

Paar, 29
parallel, 78
Parametrisierung, 106
Peano-Axiome, 39
Permutation, 46
Produktschreibweise, 43
punktweise, 61

quadratische Matrix, 101
Quotientenraum, 126

Rang, 114
Realteil, 57
rekursiv, 42
Relation, 30
Restklassenkörper, 56

Schnitt, 26
simultan, 115
Skalarprodukt, 131
Skalarproduktraum, 132
Spaltenrang, 114
spezielle Lösung, 106
Strecke, 81
Summe der Unterräume, 74
Summenschreibweise, 43
surjektiv, 32

Tautologien, 15
Teilmenge, 24
transponierte Matrix, 104
Tupel, 47

Umkehrabbildung, 33
unendlicher Abstieg, 42
unitärer Raum, 132
Unterraum, 62
Urbild, 34

Vektorraum, 58
Venn-Diagramm, 26
Vereinigung, 25
Verkettung, 37
vollständige Induktion, 40

Wahrheitstafeln, 15

Zeilenrang, 114
Zeilenstufenform, 107
zulässige Zeilenoperation, 107