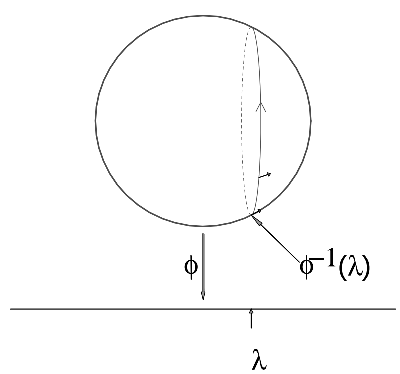
Séminaire BOURBAKI Mars 2001
53ème année, 2000-2001, n° 888

QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE ET RÉDUCTION SYMPLECTIQUE

par **Michèle VERGNE**

INTRODUCTION

Soit M une variété différentiable munie d'une 2-forme symplectique Ω. On se donne de plus un fibré en droites complexes L (appelé *fibré de Kostant-Souriau*) muni d'une connexion ∇ dont la courbure est $-i\Omega$. On dira que M est une *variété symplectique préquantifiée*, et on sous-entendra souvent le fibré L (dont la première classe de Chern est fixée). Par exemple, si M est l'espace projectif, le fibré L est le fibré $\mathcal{O}(1)$. Peut-on construire canoniquement un espace de Hilbert $Q(M)$ associé à la variété préquantifiée M ? De plus, si ϕ est une fonction réelle sur M, peut-on lui associer un opérateur auto-adjoint $Q(\phi)$ opérant sur $Q(M)$ tel que toute valeur λ du spectre de l'opérateur $Q(\phi)$ appartienne à l'intervalle $\phi(M) \subset \mathbb{R}$? Notons G le flot hamiltonien engendré par ϕ et notons $red_\lambda(M)$ l'espace des orbites de G dans l'hypersurface $\phi = \lambda$.

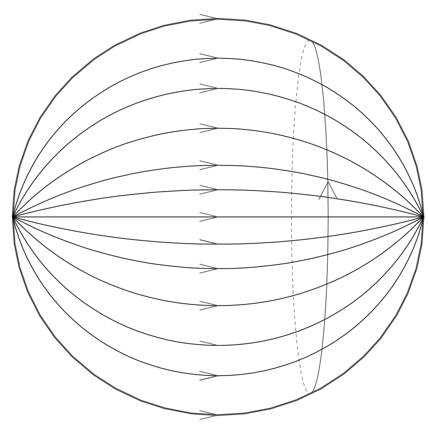


Espace réduit: $\phi^{-1}(\lambda)/S^1 = \bullet$

C'est (dans les bons cas) une variété symplectique de dimension $\dim M - 2$, appelée *l'espace réduit de M au niveau λ.*

Si ϕ est propre, les espaces réduits sont compacts. On désire alors que le spectre de $Q(\phi)$ soit un sous-ensemble discret de $\phi(M)$ et que les multiplicités de toute valeur propre λ soient finies et en rapport étroit avec le volume symplectique de la fibre réduite en λ. Des procédés pour construire $Q(M)$ et $Q(\phi)$ n'existent que sous certaines conditions. Mais certains cas sont bien cernés, notamment celui des variétés symplectiques compactes. On sait alors associer à une variété symplectique compacte préquantifiée M un espace vectoriel canonique $Q(M)$. Si ϕ engendre un flot hamiltonien circulaire $G = \{e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$, ce flot G opère sur $Q(M)$ et on pose $Q(\phi) = -i\mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal de l'action du flot sur $Q(M)$. Le but de cet exposé est de décrire la multiplicité de la valeur propre λ de $Q(\phi)$ grâce à la variété réduite en λ.

Donnons dès à présent la description de cette relation dans le cadre d'une variété kählérienne compacte, et pour la valeur propre 0 dont l'espace propre est le sous-espace $Q(M)^G$ des éléments G-invariants de $Q(M)$. L'espace quotient symplectique naturel de M par G est l'espace réduit $red_0(M) = \Phi^{-1}(0)/G$. En effet, cet espace – du moins s'il est lisse – est encore une variété kählérienne compacte (de dimension complexe $\dim_{\mathbb{C}} M - 1$) et c'est " grosso modo" le quotient de M par l'action complexifiée de $G_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$ sur M.



Action de $\mathbb{C}^*$: $M/\mathbb{C}^* = \bullet$

Si L est un fibré de Kostant-Souriau holomorphe sur M, alors $Q(M)$ est – dans les bons cas – l'espace des sections holomorphes du fibré L. Guillemin-Sternberg [16] ont démontré qu'alors l'espace des invariants $Q(M)^G$ s'identifie à l'espace des sections holomorphes du fibré de Kostant-Souriau sur la variété réduite (tout au moins lorsque celle-ci est lisse), comme dans le cas projectif, où $Q(M)$ est l'anneau des coordonnées homogènes sur M et $Q(M)^G$ l'anneau des coordonnées homogènes sur le quotient géométrique "$M/G_{\mathbb{C}}$". Lorsque M est seulement symplectique, on peut, grâce à une structure presque complexe, définir un espace $Q(M)$ analogue. Guillemin et Sternberg [16] ont alors formulé une conjecture qui généralise au cas symplectique la construction de Mumford [32] en géométrie algébrique, construction clef de la théorie géométrique des invariants.

Il est utile de replacer ces thèmes de réflexion dans le contexte de la méthode des orbites, où ils sont naturels. Si G est un groupe de Lie connexe, on note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$. Une orbite O de G dans $\mathfrak{g}^*$ est appelée *orbite coadjointe* ; c'est une variété symplectique. Si cette orbite O est préquantifiable, on espère lui associer une représentation unitaire irréductible $Q(O)$ de G. En particulier, soient N un groupe nilpotent simplement connexe et G un sous-groupe connexe de N. Soit $\Phi : \mathfrak{n}^* \to \mathfrak{g}^*$ la projection canonique. Grâce aux résultats de Kirillov (voir [20]), toute orbite coadjointe $O \subset \mathfrak{n}^*$ est quantifiable en une représentation unitaire irréductible $Q(O)$ de N. On sait étudier (voir [10]) la décomposition de la restriction de la représentation irréductible $Q(O)$ au sous-groupe G de N, à l'aide de l'ensemble des G-orbites contenues dans $\Phi(O)$.

Dans cet exposé, on traite un problème similaire pour le cas où G est compact connexe. En fait, on traite la situation suivante. Soit G un groupe de Lie compact, agissant de manière hamiltonienne sur une variété symplectique compacte M préquantifiée. Soit $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ l'application moment. On peut construire canoniquement (voir section 3) un espace $Q(M)$ sur lequel opère G ; c'est l'espace des solutions d'un opérateur de Dirac tordu sur M. Si X_M est le champ hamiltonien associé à $X \in \mathfrak{g}$, la fonction $\langle \Phi, X \rangle$ a pour opérateur associé $Q(\langle \Phi, X \rangle) = -i\mathcal{L}^Q(X)$, où $\mathcal{L}^Q(X)$ est le générateur infinitésimal pour l'action unitaire de G dans $Q(M)$. On montrera dans cet exposé que l'on peut "voir" la décomposition de $Q(M)$ en représentations irréductibles de G en regardant la décomposition de l'image de $\Phi(M)$ en orbites coadjointes de G. Le cas primordial est le suivant. Considérons une orbite coadjointe préquantifiable $O_\lambda = G \cdot \lambda$ de G. D'après le théorème de Borel-Weil-Bott, la représentation $\tau_G(\lambda) = Q(O_\lambda)$ est irréductible, c'est la représentation dite *de plus haut poids* $\Lambda = i\lambda$. L'application Φ étant l'injection canonique, c'est ce qui est attendu. Si M est une variété préquantifiée obtenue par produit direct d'une orbite préquantifiée O_λ par une variété symplectique compacte N préquantifiée avec action triviale de G, alors $Q(M) = Q(N) \otimes Q(O_\lambda)$ et G agit trivialement sur $Q(N)$. Ici, l'application Φ est la projection de $M = N \times O_\lambda$ sur le deuxième facteur, et seule la représentation $\tau_G(\Lambda) = Q(O_\lambda)$ intervient dans la décomposition de $Q(M)$, mais cette fois avec multiplicité $\dim Q(N)$.

V. Guillemin et S. Sternberg ont formulé une conjecture précise qui permet de décrire entièrement l'espace de représentation $Q(M)$ du groupe G grâce à l'application Φ, pour toute action hamiltonienne de G sur M. On introduit l'espace réduit de Marsden-Weinstein $red_0(M) = \Phi^{-1}(0)/G$. C'est dans les bons cas une variété symplectique lisse compacte préquantifiable (avec action triviale de G). La CONJECTURE de GUILLEMIN-STERNBERG s'énonce

$$Q(M)^G = Q(red_0(M)).$$

Leur conjecture est connue sous la forme du slogan : "La quantification commute à la réduction !" ou du sigle $[Q, R] = 0$. Ce slogan a aussi influencé les recherches de relations précises entre représentations d'un groupe G opérant de manière hamiltonienne sur M et la géométrie de l'application moment également pour beaucoup de situations non compactes. Ces thèmes de recherches étaient présents depuis longtemps, en particulier depuis les résultats de Duistermaat-Heckman [12] sur le comportement localement polynomial des volumes des fibres réduites. De nombreux résultats qualitatifs ou asymptotiques pour les multiplicités découlent des formules de caractères établies pour ces représentations $Q(M)$ quantifiées d'une variété symplectique M, mais rien de nickel comme la conjecture de Guillemin-Sternberg n'était démontré. La formule de localisation dite non abélienne de Witten [46], et les démonstrations de Jeffrey-Kirwan [17] de cette formule, ont aiguillonné une nouvelle recherche plus insistante dans ce domaine. Ainsi, vers 1994, au moins cinq démonstrations différentes de la conjecture de Guillemin-Sternberg étaient simultanément proposées pour le cas du groupe $G = S^1$, par Duistermaat-Guillemin-Meinrenken-Wu, Guillemin, Jeffrey-Kirwan, Meinrenken, et Vergne [11],[14],[18],[28],[45]. Puis, E. Meinrenken et E. Meinrenken-R. Sjamaar l'ont démontré dans le cas général beaucoup plus difficile d'un groupe de Lie compact connexe quelconque [29],[30]. L'article de Sjamaar [36] est une excellente introduction à ces résultats. Enfin, Y. Tian-W. Zhang, W. Zhang, puis P.-E. Paradan ont produit d'autres démonstrations plus directes du cas général, s'adaptant à certaines situations nouvelles : variétés à bord, variétés non compactes, application moment abstraite, familles, indices de fibrés positifs [39],[40],[41],[42],[43], [49],[50],[33],[34].

Avant d'entreprendre une description (un peu technique) du procédé de quantification utilisé dans la conjecture de Guillemin-Sternberg, puis des résultats, expliquons la signification de cette conjecture dans l'exemple fondamental de la quantification d'un espace vectoriel symplectique.

Soit $M = \mathbb{R}^{2n}$, muni des coordonnées symplectiques $q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n$. On considère le fibré de Kostant-Souriau ; c'est le fibré trivial, mais avec connexion

$$\nabla = d - \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}(p_k dq_k - q_k dp_k).$$

Alors $Q(M)$ est l'espace de la représentation unitaire irréductible du groupe de Heisenberg. Cet espace $Q(M)$ est muni d'opérateurs auto-adjoints P_k, Q_ℓ vérifiant $P_kQ_\ell - Q_\ell P_k = i\delta_k^\ell$ pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq \ell \leq n$. Voici la réalisation "concrète" de $Q(M)$: considérons M comme un espace vectoriel complexe avec coordonnées complexes $z_k = p_k + iq_k$. On construit $Q(M)$ comme l'espace des solutions L^2 de l'opérateur elliptique D, qui est par construction l'opérateur $\overline{\partial}$ tordu par ∇ :

$$D = \sum_k (\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} + z_k) d\overline{z}_k.$$

On obtient la réalisation de Fock de $Q(M)$:

$$Q(M) = \{F(z) = e^{-|z|^2} f(z) \ ; f \text{ holomorphe} \, ; \int_M |F|^2 dpdq < \infty\},$$

muni des opérateurs

$$P_k = \frac{i}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial z_k} - z_k) \quad \text{et} \quad Q_\ell = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial z_\ell} + z_\ell).$$

Considérons la fonction $\phi(z) = \frac{|z|^2}{2}$. L'image de M par ϕ est l'intervalle $[0, \infty[$. La fibre au point $\lambda \geq 0$ de ϕ est la sphère $S = \{z, \frac{|z|^2}{2} = \lambda\}$ de dimension $2n-1$ et de rayon $\sqrt{2\lambda}$.

Soit X_ϕ le champ de vecteurs hamiltonien de ϕ ; alors

$$X_\phi = \sum_{k=1}^n (q_k \frac{\partial}{\partial p_k} - p_k \frac{\partial}{\partial q_k}).$$

Le flot engendré par X_ϕ est le groupe à un paramètre de rotations $g(t) = e^{-it} Id$. Il laisse stable la surface de niveau $\phi = \lambda$, et l'espace réduit (si $\lambda > 0$) est l'espace projectif $P_{n-1}(\mathbb{C})$ qui hérite d'une structure symplectique Ω_λ dépendant linéairement de λ. Le volume de $P_{n-1}(\mathbb{C})$ pour la mesure de Liouville correspondante est $\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$. Cette structure symplectique est préquantifiable si et seulement si λ est un entier k positif ou nul auquel cas le fibré de Kostant-Souriau pour la structure symplectique induite est le fibré $\mathcal{O}(k)$. L'opérateur de Kostant $Q(\phi)$ canoniquement associé à ϕ et ∇ est l'opérateur différentiel

$$Q(\phi) = \phi - i\nabla_{X_\phi} = -iX_\phi.$$

Les valeurs propres de l'action sur l'espace $Q(M)$ de cet opérateur, générateur infinitésimal de la rotation complexe, sont obtenues pour $\lambda = 0, 1, 2, ..., k, ...$. L'espace vectoriel $Q(M)_k$ formé des vecteurs propres pour $Q(\phi)$ de valeur propre k est isomorphe à l'espace des polynômes homogènes de degré k en n variables, par l'application

$$f(z) \mapsto F(z) = e^{-|z|^2} f(z).$$

Par restriction à la surface de niveau k, nous obtenons un isomorphisme de $Q(M)_k$ avec l'espace $H^0(P_{n-1}(\mathbb{C}), \mathcal{O}(k))$ des sections holomorphes du fibré $\mathcal{O}(k)$. La formule pour la dimension de $Q(M)_k$ est remarquable ; en effet, nous avons

$$\dim Q(M)_k = \frac{(k+1)(k+2)....(k+(n-1))}{(n-1)!}.$$

Cette formule polynomiale en k est un analogue "entier" de la formule $\frac{k^{n-1}}{(n-1)!}$ pour le volume de la fibre réduite. Pour $k = 0$, on obtient $\dim Q(M)_0 = 1$, ce qui correspond bien au fait que la fibre de ϕ devient un point pour $k = 0$.

Remarquons que l'exemple que nous venons de traiter est le cas d'une variété non compacte: $\mathbb{R}^{2n}$. Pour cet exemple, le modèle de quantification géométrique par l'espace de Fock $Q(M)$ est clair. Cependant la conjecture de Guillemin-Sternberg n'est démontrée de manière générale que dans le cas de variétés hamiltoniennes compactes. Son énoncé demande d'ailleurs à être précisé dans le cas des variétés hamiltoniennes non compactes lorsque le modèle de quantification n'est pas clair. Nous donnerons cependant l'exemple des séries discrètes, où dans une situation non compacte, le slogan :"la quantification commute à la réduction est encore vrai".

1. NOTATIONS

La notation x ou t désigne une variable réelle, z une variable complexe. La notation M désigne une variété différentiable. Les points de M sont notés m. La notation U est aussi employée pour une variété différentiable, mais M sera le plus souvent compacte tandis que U sera généralement non compacte. Si $\mathcal{V} \to M$ est un fibré vectoriel (de rang fini) sur M, on note $\Gamma(M, \mathcal{V})$ l'espace vectoriel des sections différentiables du fibré $\mathcal{V}$. Soit $\mathcal{A}(M)$ l'algèbre des formes extérieures sur M. La contraction par un champ de vecteurs $\mathbf{V}$ est notée $i(\mathbf{V}) : \mathcal{A}^\bullet(M) \to \mathcal{A}^{\bullet-1}(M)$; ainsi si Ω est une 2-forme, la 1-forme $i(\mathbf{V})\Omega$ est donnée par $(i(\mathbf{V})\Omega)(\xi) := \Omega(\mathbf{V} \wedge \xi)$, pour tout champ de vecteurs ξ.

Notons S^1 le groupe $\{e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$. Un tore est un groupe de Lie compact connexe abélien, c'est-à-dire un produit de groupes S^1. On notera T un tore, $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{t}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{t}$. Les symboles $\mu, ..., \lambda$ désignent des éléments de $\mathfrak{t}^*$.

Dans tout le reste de cet exposé, G désigne un groupe de Lie compact connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Un élément de $\mathfrak{g}$ est noté en général X. La notation a désigne des éléments de $\mathfrak{g}^*$. L'orbite coadjointe $G \cdot a$ est souvent notée O_a.

Soit G agissant à gauche sur M. Si $X \in \mathfrak{g}$, on note $\mathbf{X}_M$ (ou simplement $\mathbf{X}$) le champ de vecteurs sur M donné au point $m \in M$ par $\mathbf{X}_m = \frac{d}{d\epsilon} \exp(-\epsilon X) \cdot m|_{\epsilon=0}$. On note $\mathfrak{g}_m \subset T_m M$ le sous-espace vectoriel de $T_m M$ formé des vecteurs tangents $\mathbf{X}_m$. Désignons par M^G l'ensemble des points fixes de l'action ; c'est une sous-variété de M. On note $G(m)$ le stabilisateur du point $m \in M$ dans G, et $\mathfrak{g}(m)$ son algèbre de Lie. Si $\mathcal{V}$ est un fibré G-équivariant sur M, on note $\mathcal{L}^{\mathcal{V}}(X)$ l'action infinitésimale de $X \in \mathfrak{g}$ sur $\Gamma(M, \mathcal{V})$.

Rappelons la description de l'espace des orbites coadjointes de G dans $\mathfrak{g}^*$. Choisissons un tore maximal T de G. Soit $W_G = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl. On identifie l'espace vectoriel $\mathfrak{t}^*$ au sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}^*$ fixe par l'action coadjointe de T. Fixons un système de racines positif Δ^+. On note ρ la demi-somme des racines positives. On peut paramétrer l'ensemble $\mathfrak{t}^*/W_G$ par la chambre de Weyl positive (fermée) $\mathfrak{c}_G \subset \mathfrak{t}^*$. Si M est une orbite coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$, elle rencontre le cône $\mathfrak{c}_G$ en un point et un seul. Ceci établit une bijection entre $\mathfrak{c}_G$ et l'ensemble des orbites coadjointes $\mathfrak{g}^*/G$. Lorsque G est fixé, on écrit W, $\mathfrak{c}$, etc., au lieu de W_G, $\mathfrak{c}_G$, etc. Si $G = T$ est un tore, alors $\mathfrak{c} = \mathfrak{g}^*$.

On note $\widehat{G}$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de dimension finie de G. Une représentation R de dimension finie de G se décompose en somme directe de représentations irréductibles : $R = \oplus_{\tau\in\widehat{G}} n_\tau \tau$. On dit que n_τ est *la multiplicité de la représentation* τ dans R. L'ensemble des τ pour lesquels n_τ est non-nul est appelé le *support* de R. On identifiera souvent une représentation R de G avec son caractère $\mathrm{Tr}\, R(g)$ sur G. Ce caractère est déterminé par sa restriction à T. On note $Poids \subset i\mathfrak{t}^*$ le réseau des différentielles des caractères de T. Un poids est en général noté Λ, et on écrit $\Lambda = i\lambda$ avec $\lambda \in \mathfrak{t}^*$. On note $e^\Lambda \in \widehat{T}$ le caractère de T associé à Λ. On note $R(G)$ le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $\widehat{G}$. Un élément R de $R(G)$ est appelé *représentation virtuelle* de G ; il s'écrit comme différence de deux représentations de dimension finie de G.

Si $\Lambda \in Poids \cap i\mathfrak{c}$, on dit que Λ est un *poids dominant*. On associe à tout poids dominant Λ la représentation irréductible $\tau_G(\Lambda)$ de G de plus haut poids Λ. On identifiera donc $\widehat{T}$ au réseau des poids et $\widehat{G}$ au cône des poids dominants.

2. DÉFINITIONS GÉOMÉTRIQUES

2.1. Fibrés positifs

La définition suivante est due à P.-E. Paradan ; elle s'inspire des critères de positivité de Y. Tian-W. Zhang. Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel hermitien G-équivariant sur M. Si $X \in \mathfrak{g}$ et si $m \in M$ est un zéro du champ $\mathbf{X}_M$, alors le groupe à un paramètre $\exp tX$ opère dans la fibre $\mathcal{E}_m$ du fibré $\mathcal{E}$ au point m. On note $\mathcal{L}^{\mathcal{E}}_m(X)$ l'application infinitésimale de X dans $\mathcal{E}_m$. Alors $i\mathcal{L}^{\mathcal{E}}_m(X)$ est un endomorphisme hermitien de $\mathcal{E}_m$.

DÉFINITION 2.1. — *Soit $\mathcal{E}$ un fibré hermitien G-équivariant sur M et Φ une application G-invariante de M dans $\mathfrak{g}^*$.*

- *On dit que $\mathcal{E}$ est Φ-positif si pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et tout zéro m du champ $\mathbf{X}_M$, l'opérateur $-i\langle\Phi(m), X\rangle\mathcal{L}^{\mathcal{E}}_m(X)$ a toutes ses valeurs propres positives ou nulles.*
- *On dit que $\mathcal{E}$ est strictement Φ-positif si pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et tout zéro m du champ $\mathbf{X}_M$ tel que $\langle\Phi(m), X\rangle \neq 0$, l'opérateur $-i\langle\Phi(m), X\rangle\mathcal{L}^{\mathcal{E}}_m(X)$ a toutes ses valeurs propres strictement positives.*

Noter que cette définition ne dépend pas de la structure hermitienne G-invariante sur $\mathcal{E}$. Un exemple simple mais important est le cas du fibré trivial $M \times V$ (avec action triviale de G sur V) qui est Φ-positif pour toute application Φ.

Si L est un fibré linéaire G-équivariant, on peut construire une application $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ telle que $\langle\Phi(m), X\rangle = -i\mathcal{L}^L_m(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}(m)$. En effet, on choisit une connexion

G-invariante ∇ sur L, et on définit

$$\langle \Phi, X\rangle = -i\mathcal{L}^L(X) + i\nabla_{\mathbf{X}}.$$

On dit ([7], ch.7) que Φ est le *moment de la connexion* ∇ (c'est une application moment abstraite au sens de Karshon [13]).

2.2. **Action hamiltonienne d'un groupe et réduction**

Soit (M, Ω) une variété symplectique : Ω est une 2-forme fermée sur M et Ω_m est en tout point m de M une forme alternée non dégénérée sur l'espace tangent T_mM. Si ϕ est une fonction réelle sur M, alors il existe un champ de vecteurs H_ϕ sur M tel que $\Omega(H_\phi, \xi) = \xi \cdot \phi$ pour tout champ de vecteurs ξ sur M ; ce champ H_ϕ est appelé *champ hamiltonien* de ϕ. Le groupe de transformations locales engendré par H_ϕ est appelé *flot hamiltonien.* Il conserve les lignes de niveau $\phi = cste$. Le flot est dit *circulaire* s'il s'intègre en une action de S^1.

Si (M, Ω) est une variété symplectique, notons M^- la variété M munie de la forme $-\Omega$.

Voici la définition d'espace G-hamiltonien (G, M, Ω, Φ_G) : La variété (M, Ω) est une variété symplectique munie d'une action symplectique de G. Notre convention de signes est la suivante : l'application $\Phi_G : M \to \mathfrak{g}^*$ est une application commutant à l'action de G et vérifiant l'équation de Hamilton

$$d\langle \Phi_G, X\rangle + \iota(\mathbf{X}_M)\Omega = 0$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Autrement dit, le champ $-\mathbf{X}_M$ est le champ hamiltonien de la fonction $\langle \Phi_G, X\rangle$. L'application Φ_G est appelée *l'application moment.* Il est facile de voir que l'application Φ_G est localement constante sur M^G. En particulier, l'image d'une composante connexe de M^G est un point de $\mathfrak{g}^*$.

Si K est un sous-groupe de G, alors l'action de K sur M est hamiltonienne, et l'application moment Φ_K est la composée de Φ_G avec la projection naturelle de $\mathfrak{g}^*$ dans $\mathfrak{k}^*$. Si G est fixé, on dénote Φ_G simplement par Φ.

Voici la définition d'espace G-hamiltonien préquantifié : La variété hamiltonienne (G, M, Ω, Φ) est préquantifiée, si elle est pourvue d'un fibré en droites G-équivariant L sur M muni d'une connexion G-invariante ∇ dont la courbure soit $-i\Omega$. On veut de plus la condition de Kostant ([25])

$$\mathcal{L}^L(X) = \nabla_{\mathbf{X}} + i\langle \Phi, X\rangle. \tag{1}$$

On appelle L *un fibré de Kostant-Souriau.* Sa première classe de Chern est la classe de $\frac{\Omega}{2\pi}$. D'après l'équation (1), si m est un zéro de $\mathbf{X}_m$, l'action $\mathcal{L}^L_m(X)$ de X dans L_m est simplement la multiplication par $i\langle \Phi(m), X\rangle$.

Un cas très important de fibré Φ-positif sur une variété hamiltonienne (M, Φ) est le fibré de Kostant-Souriau $L \to M$, car en un zéro de $\mathbf{X}_m$, l'action de $-i\langle \Phi(m), X\rangle\mathcal{L}^L_m(X)$ est la multiplication par $|\langle\Phi(m), X\rangle|^2$. Ainsi **le fibré de Kostant-Souriau est strictement Φ-positif.**

On notera souvent seulement (M, Φ) une variété G-hamiltonienne, en sous-entendant Ω et G, et (M, L) une variété G-hamiltonienne préquantifiée, ou simplement M, et toutes ces données sont sous-entendues.

Soit M une variété G-hamiltonienne ayant une application moment Φ propre. Considérons la fibre en 0 de Φ ; c'est un G-espace. On peut donc former l'espace topologique quotient $red_0(M) = \Phi^{-1}(0)/G$, appelé *espace réduit de M en* 0. Plaçons-nous dans la situation idéale, lorsque G agit librement dans $\Phi^{-1}(0)$. Alors 0 est une valeur régulière de Φ et $\Phi^{-1}(0)$ est une variété. De plus, l'espace topologique $red_0(M)$ hérite d'une structure de variété symplectique compacte. Si (M, L) est préquantifiée, le fibré $L|_{\Phi^{-1}(0)}/G$ est un fibré de Kostant-Souriau sur $red_0(M)$ noté $red_0(L)$. Réciproquement, si 0 est une valeur régulière de Φ, alors $\Phi^{-1}(0)$ est une variété, et on voit grâce à l'équation de Hamilton que toutes les orbites de G dans $\Phi^{-1}(0)$ sont de dimension $\dim G$. Alors $red_0(M) = \Phi^{-1}(0)/G$ est une variété qui n'est pas nécessairement lisse, mais dont les singularités sont de type quotient par un groupe fini (une V-variété) et $red_0(L) = L|_{\Phi^{-1}(0)}/G$ est un V-fibré sur $red_0(M)$.

2.3. Un exemple fondamental : les orbites coadjointes

Une orbite coadjointe $O_a = G{\cdot}a$ est munie d'une unique structure d'espace G-hamiltonien pour laquelle l'application moment est **l'injection canonique** de O_a dans $\mathfrak{g}^*$. L'orbite $G \cdot (-a)$ est isomorphe à l'espace opposé O_a^-.

On dit qu'une forme $a \in \mathfrak{g}^*$ est *entière* s'il existe un caractère χ de $G(a)$ de différentielle ia sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}(a)$. Comme $G(a)$ est connexe, ce caractère – s'il existe – est unique. On note $\mathbb{C}_\chi$ la représentation de $G(a)$ dans $\mathbb{C}$ par multiplication par χ. On fait agir $u \in G(a)$ à droite sur $(g, z) \in G \times \mathbb{C}_\chi$ par $(g, z) \cdot u = (gu, \chi(u^{-1})z)$ et $G \times_{G(a)} \mathbb{C}_\chi = (G \times \mathbb{C}_\chi)/G(a)$ est l'unique fibré de Kostant-Souriau sur $G/G(a) = O_a$. Si $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, l'orbite coadjointe $O_\lambda \subset \mathfrak{g}^*$ de λ par le groupe G est entière si et seulement si $\Lambda = i\lambda$ est un poids. Désignons par L_λ son fibré de Kostant-Souriau. Les orbites préquantifiables (ou entières) paramétrisent donc les représentations irréductibles de G.

Soit (M, Φ) une variété hamiltonienne d'application moment propre et soit O_a l'orbite coadjointe de $a \in \mathfrak{g}^*$. L'image réciproque $\Phi^{-1}(O_a)$ est stable par G. On peut donc former l'espace topologique quotient $red_a(M) = \Phi^{-1}(O_a)/G = \Phi^{-1}(a)/G(a)$. L'espace $M \times O_a^-$ est une variété symplectique avec moment $\Phi_a(m, f) = \Phi(m) - f$ si $m \in M$ et $f \in O_a^-$. On a $red_0(M \times O_a^-) = red_a(M)$. On dit que $red_a(M)$ est *l'espace réduit de M au point a*.

En suivant Meinrenken-Sjamaar, on dit que $a \in \mathfrak{g}^*$ est une *valeur quasi régulière*, si les orbites de $G(a)$ dans $\Phi^{-1}(a)$ sont toutes de même dimension. L'équation de Hamilton implique que $\Phi^{-1}(a)$ est une sous-variété de M et que $red_a(M) = \Phi^{-1}(a)/G(a)$ est une

V-variété. Si O_λ est entière et (M, L) préquantifiée, alors $M \times O_\lambda^-$ est préquantifiée par $L \otimes L_{-\lambda}$. On obtient alors un fibré de Kostant-Souriau sur $red_0(M \times O_\lambda^-) = red_\lambda(M)$.

2.4. **Le polytope de Kirwan**

Soit (M, Φ_G) une variété G-hamiltonienne compacte et connexe. D'après le théorème de Kirwan [22] (qui généralise le théorème de Atiyah-Guillemin-Sternberg) l'ensemble $\mathrm{Kir}_G(M) := \Phi_G(M) \cap \mathfrak{c}$ est un polytope convexe. Il est appelé *le polytope de Kirwan*. Le polytope $Kir_G(M) \subset \mathfrak{c}$ est contenu dans le polytope $Kir_T(M) \subset \mathfrak{t}^*$ pour l'action de T, et $Kir_T(M)$ est l'enveloppe convexe de l'union des transformées de $Kir_G(M)$ par W_G .

On note $\mathrm{Kir}(M)$ le polytope de Kirwan de M, si le groupe G est fixé..

Considérons le cas où $G = T$ est un tore. Écrivons $M^T = \bigcup_{P \in F} P$ où F est l'ensemble fini des composantes connexes de M^T. Alors le polytope $\mathrm{Kir}(M) = \Phi(M)$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble fini $\{\Phi(P), P \in F\}$. C'est le théorème d'Atiyah-Guillemin-Sternberg [2], [15]. De plus, si s est un sommet de $\mathrm{Kir}(M)$, alors $\Phi^{-1}(s)$ est une composante connexe de M^T. Dans ce cas, l'espace réduit de M au point s est simplement cette composante connexe.

Il est difficile de décrire le polytope $\mathrm{Kir}(M) = \Phi(M) \cap \mathfrak{c}$ lorsque G n'est pas un tore (et encore plus difficile de décrire les espaces réduits). Par exemple, ce n'est que récemment que Klyachko [23] a montré que les inégalités de Horn décrivaient effectivement le polytope de Kirwan d'un produit de deux orbites coadjointes de $U(r)$. Voici un exemple pour $G = U(3)$. On identifie $\mathfrak{g}^*$ à l'espace des matrices hermitiennes. L'action de G est par conjugaison. Soient

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \text{ et } \ \beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3.$$

Par définition, le polytope de Kirwan de $O_\alpha \times O_\beta$ est l'ensemble de tous les éléments

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } \ \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3,$$

tels qu' il existe deux matrices hermitiennes A, B conjuguées respectivement à α et β avec $\gamma = A + B$. Naturellement, on a

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3.$$

Le polytope de Kirwan est l'intersection de la chambre de Weyl $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$ avec le polytope défini par les 6 inégalités :

$$\gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1,$$

$$\gamma_2 \leq \min(\alpha_2 + \beta_1, \alpha_1 + \beta_2),$$

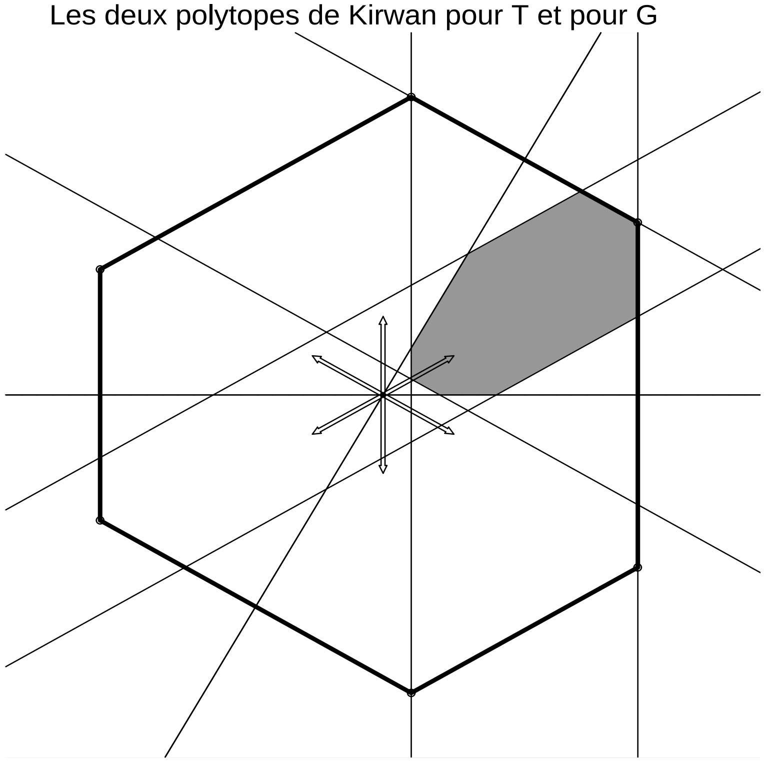
$$\gamma_3 \leq \min(\alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_1, \alpha_1+\beta_3),$$
$$\gamma_1+\gamma_2 \leq \alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2,$$
$$\gamma_1+\gamma_3 \leq \min(\alpha_1+\alpha_3+\beta_1+\beta_2, \alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_3),$$
$$\gamma_2+\gamma_3 \leq \min(\alpha_2+\alpha_3+\beta_1+\beta_2, \alpha_1+\alpha_2+\beta_2+\beta_3, \alpha_1+\alpha_3+\beta_1+\beta_3),$$

et l'égalité

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_1+\beta_2+\beta_3.$$

Voici le dessin de ce polytope, dans le plan $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=0$ pour $\alpha=(4,2,-6)$, et $\beta=(5,-1,-4)$

Les deux polytopes de Kirwan pour T et pour G



3. QUANTIFICATION

3.1. Indice d'opérateurs elliptiques

Soient U une variété (non nécessairement compacte) et $\mathcal{S}$ un fibré vectoriel complexe gradué $\mathcal{S} := \mathcal{S}^+ \oplus \mathcal{S}^-$ sur U. Notons p la projection de l'espace cotangent T^*U sur U. Soit σ un homomorphisme C^∞ entre les fibrés vectoriels $p^*\mathcal{S}^+$ et $p^*\mathcal{S}^-$. En d'autres termes, c'est la donnée pour tous $m \in U$ et $\xi \in T^*_m U$ d'une application linéaire $\sigma(m,\xi) : \mathcal{S}^+_m \to \mathcal{S}^-_m$ (variant différentiablement en (m,ξ)). On dit brièvement que σ est *un symbole sur* U. On note $\mathrm{Char}(\sigma)$ l'ensemble constitué des (m,ξ) tels que $\sigma(m,\xi)$ ne soit pas inversible. On dit que σ est *un symbole elliptique* si l'ensemble $\mathrm{Char}(\sigma)$ est **compact** ; par exemple

U est compacte et σ inversible en dehors de la section nulle de T^*U. L'indice $\mathrm{Indice}_U(\sigma)$ d'un symbole elliptique σ est défini par Atiyah-Singer [6]. C'est un entier relatif qui ne dépend que de la classe d'homotopie stable de σ, autrement dit de la classe de σ dans le $\mathbb{Z}$-module $K(T^*U)$.

Soit G un groupe compact opérant sur U. Notons T^*_GU le sous-ensemble de T^*U formé des éléments (m,ξ) tels que $\langle \xi, \mathfrak{g}_m\rangle = 0$. On dit qu'un symbole σ est *G-transversalement elliptique*, si σ est G-invariant et si $\mathrm{Char}(\sigma) \cap T^*_GU$ est compact. L'indice $\mathrm{Indice}^G_U(\sigma)$ d'un symbole transversalement elliptique σ est alors défini par Atiyah [1] ; c'est une représentation à trace de G qui ne dépend que de la classe d'homotopie stable de σ, autrement dit de la classe de σ dans $K(T^*_GU)$.

Voici la définition de l'indice pour les symboles polynomiaux homogènes et pour **une variété compacte** M : si $\sigma(m,\xi)$ est un polynôme homogène en ξ et inversible en-dehors de la section nulle, on peut trouver un opérateur différentiel $D(\sigma) : \Gamma(M, \mathcal{S}^+) \to \Gamma(M, \mathcal{S}^-)$ dont le symbole principal est σ. D'après la théorie des opérateurs elliptiques, la dimension du noyau de $D(\sigma)$ est finie, ainsi que la codimension dans $\Gamma(M,\mathcal{S}^-)$ de l'image de $\Gamma(M,\mathcal{S}^+)$ par $D(\sigma)$. L'indice de σ est alors défini par

$$\mathrm{Indice}_M(\sigma) = \dim \mathrm{Ker}(D(\sigma)) - \dim \mathrm{Coker}(D(\sigma)).$$

Si G est un groupe compact agissant sur M et σ un symbole transversalement elliptique G-invariant, alors l'indice de σ est la représentation virtuelle

$$\mathrm{Indice}_{M,G}(\sigma) = \mathrm{Ker}(D(\sigma)) - \mathrm{Coker}(D(\sigma))$$

du groupe G. Plus précisément, considérons, pour chaque $\tau \in \widehat{G}$, l'espace vectoriel $\Gamma(M,\mathcal{S}^{\pm})_\tau$ des sections de $\mathcal{S}^{\pm}$ engendrant une représentation de type τ. Considérons l'opérateur $D(\sigma)_\tau : \Gamma(M,\mathcal{S}^+)_\tau \to \Gamma(M,\mathcal{S}^-)_\tau$. Alors $\mathrm{Ker}(D(\sigma)_\tau)$ et $\mathrm{Coker}(D(\sigma)_\tau)$ sont des espaces de dimension finie. Ainsi, $\mathrm{Ker}(D(\sigma)_\tau) = n^+_\tau \tau$ et $\mathrm{Coker}(D(\sigma)_\tau) = n^-_\tau \tau$, avec n^+_τ et n^-_τ finis. On définit

$$\mathrm{Indice}_{M,G}(\sigma) := \oplus_{\tau \in \widehat{G}} (n^+_\tau - n^-_\tau)\tau.$$

C'est une représentation (virtuelle) à trace de G. (Dans le cas elliptique, seul un nombre fini de représentations τ peuvent apparaître avec multiplicités non-nulles n^+_τ et n^-_τ dans la somme ci-dessus.)

Si G est fixé, on écrit $\mathrm{Indice}_M(\sigma)$ au lieu de $\mathrm{Indice}_{M,G}(\sigma)$. Chaque représentation irréductible de G intervient avec une multiplicité finie dans $\mathrm{Indice}_{M,G}(\sigma)$. En particulier, $[\mathrm{Indice}_M(\sigma^+)]^G$ est la multiplicité de la représentation triviale. C'est donc un nombre entier, positif ou négatif. Si un groupe compact H commute avec G, et laisse invariant tout ce qui est nécessaire, alors $[\mathrm{Indice}_M(\sigma)]^G$ est une représentation virtuelle (de dimension finie) de H.

Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel complexe G-équivariant sur M et σ un symbole elliptique G-invariant sur M, alors $\sigma_{\mathcal{E}}(m,\xi) \otimes \mathrm{Id} : \mathcal{S}^+_m \otimes \mathcal{E}_m \to \mathcal{S}^-_m \otimes \mathcal{E}_m$ est aussi un symbole elliptique G-invariant. On dit que $\sigma \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est *le symbole σ tordu par $\mathcal{E}$*. Supposons pour simplifier que M admette une structure $Spin_{\mathbb{C}}$. Il existe alors un symbole elliptique $c \in K_G(T^*M)$ tel que tout autre symbole elliptique σ soit équivalent à $c \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. En d'autres termes, c est un générateur de $K_G(T^*M)$ sur $K_G(M)$. Un générateur n'est défini qu'à tensorisation par un fibré linéaire près. Considérons un instant le cas d'une variété compacte complexe M et notons J l'endomorphisme de TM donné par la multiplication par i. On définit $\mathcal{S} = \Lambda T^*M$, que l'on considère comme un fibré vectoriel **complexe** gradué en formes paires et impaires. Choisissons une structure hermitienne G-invariante sur T^*M. Pour $\xi \in T^*M$, notons $\epsilon(\xi)$ la multiplication par ξ. Finalement

$$c^{J,M}(m,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_m(\xi) + \epsilon_m(\xi)^*) : \Lambda^{pair}T^*_mM \to \Lambda^{impair}T^*_mM \tag{2}$$

définit un symbole générateur $c^{J,M}$ de $K_G(T^*M)$ sur $K_G(M)$ (le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ici est inutile, mais il est traditionnellement là pour que le carré de $c^{J,M}$ soit égal à $-\|\xi\|^2$). On note $c^J := c^{J,M}$ si M est fixée. L'opérateur $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ (considéré comme opérateur de $\Gamma(M, \Lambda^{pair}T^*M)$ dans $\Gamma(M, \Lambda^{impair}T^*M)$) est un opérateur de symbole $c^{J,M}$. Si $\mathcal{E}$ est un fibré holomorphe G-équivariant sur M, alors l'espace virtuel $\mathrm{Indice}_M(c^J \otimes I_{\mathcal{E}})$ coïncide avec la représentation virtuelle $\sum_{k=0}^{\dim_{\mathbb{C}} M}(-1)^k H^k(M, \mathcal{O}(\mathcal{E}))$ dont la dimension virtuelle est donnée par le théorème de Riemann-Roch. Pour cette raison nous notons

$$RR^J(M, \mathcal{E}) = \mathrm{Indice}_M(c^J \otimes I_{\mathcal{E}}).$$

Soit M une G-variété compacte de dimension paire, pourvu d'une structure presque-complexe G-invariante. Ceci veut dire qu'il existe $J \in \Gamma(M, \mathrm{End}(TM))$ tel que $J^2 = -1$, et G-invariant, mais J n'est pas forcément associée à des cartes complexes de M (qui peut-être n'a aucune structure complexe). On peut quand même définir c^J par la formule (2). On note encore

$$RR^J(M, \mathcal{E}) = \mathrm{Indice}_M(c^J \otimes I_{\mathcal{E}}).$$

C'est une représentation virtuelle de dimension finie de G.

3.2. Quantification d'une variété symplectique compacte

Soit (M, Ω, Φ) une variété symplectique compacte munie d'une action hamiltonienne de G. Si $E_1, ..., E_N$ est une base de $\mathfrak{g}$, les flots hamiltoniens des fonctions $\phi_k = \langle \Phi, E_k \rangle$ engendrent l'action de G sur M. On peut choisir une structure J presque complexe et G-invariante. Grâce à un choix de J, nous obtenons un générateur c^J de $K_G(TM)$ et une application $RR^J(M, .) : K_G(TM) \to R(G)$ associant à tout fibré vectoriel G-équivariant $\mathcal{E}$ sur M la représentation $RR^J(M, \mathcal{E})$. Cette application ne dépend que de la classe d'homotopie de J. Un choix particulièrement heureux par la suite sera celui d'une *structure J adaptée à Ω*, c'est-à-dire vérifiant $\Omega(Jv, Jw) = \Omega(v, w)$ et $\Omega(v, Jv) \geq 0$ pour tous $v, w \in T_mM$. Nous écrivons J_h pour la structure adaptée, h comme heureux. Elle est bien définie à homotopie près.

Définition 3.1. — *Soit* (G, M, Ω, Φ) *une variété hamiltonienne compacte munie d'un fibré de Kostant-Souriau* L. *Soient* $\phi_1 = \langle \Phi, E_1 \rangle, ..., \phi_N = \langle \Phi, E_N \rangle$ *les fonctions dont les flots hamiltoniens engendrent l'action de* G. *Soit* J_h *une structure presque-complexe* G*-invariante et adaptée. Posons*

$$Q(M) := RR^{J_h}(M, L).$$

Le groupe G *agit sur* $Q(M)$. *Notons* $\mathcal{L}^Q(X)$ *l'action infinitésimale de* $X \in \mathfrak{g}$ *dans* $Q(M)$. *On définit :*

$$Q(\phi_k) := -i\mathcal{L}^Q(X_k).$$

Comprendre les valeurs propres des opérateurs $Q(\phi_k)$ et leurs multiplicités revient donc à décomposer $Q(M)$ en représentations irréductibles de G, puis à étudier le même problème pour une représentation de G.

Remarque 3.2. — Nous sous-entendons le fibré L dans la notation. En effet, comme la classe de Chern (équivariante) de L est fixée, le résultat $Q(M)$ ne dépend que de M.

Remarque 3.3. — Ici, nous prenons pour la quantification une convention "holomorphe", en suivant Guillemin-Sternberg, en choisissant une structure presque-complexe adaptée. Mes propres préférences pour la quantification vont à la convention *Spin*. Les orbites quantifiables sont alors les formes admissibles au sens de Duflo. Cependant, bien que le formalisme *Spin* soit plus intrinsèque, il est aussi plus lourd, et les résultats sont, pour le moment, moins plaisants. On donnera cependant un résultat dans ce cadre dans la section 7.

Voyons ce que donne la quantification pour une orbite coadjointe. Soit $\Lambda = i\lambda$ un poids dominant. Alors pour la structure complexe J_λ adaptée à la structure symplectique de O_λ, et pour le fibré de Kostant-Souriau canonique L_λ sur O_λ, nous avons

$$Q(O_\lambda) = RR^{J_\lambda}(O_\lambda, L_\lambda) = \tau_G(\Lambda) \tag{3}$$

et

$$Q(O_\lambda^-) = \tau_G(\Lambda)^*. \tag{4}$$

Notre travail consiste à comprendre la décomposition de $Q(M) = RR^{J_h}(M, L)$ en représentations irréductibles de G en fonction de l'application moment Φ. On note m la fonction sur le support de $RR^{J_h}(M, L)$ telle que $Q(M) = \oplus_{\tau \in \widehat{G}} m(\tau)\tau$. Pour analyser géométriquement toutes les multiplicités, il suffit de comprendre géométriquement la fonction $\dim Q(M)^G$ pour toute variété préquantifiée M. En effet, on a $m(\tau) = \dim(RR^{J_h}(M, L) \otimes \tau^*)^G$. En utilisant le modèle donné en (4), on voit que

$$m(\tau_G(\Lambda)) = Q(M \times O_\lambda^-)^G.$$

3.3. Comportement des multiplicités et conjecture de Guillemin-Sternberg

Soient (G, M, Ω, Φ) une variété hamiltonienne compacte préquantifiable et L un fibré de Kostant-Souriau sur M. Alors, pour tout $n > 0$, la variété $(M, n\Omega, n\Phi)$ est hamiltonienne, avec fibré de Kostant-Souriau L^n et polytope de Kirwan $n\,\mathrm{Kir}_G(M)$.

Une fonction c sur $\mathbb{Z}$ est dite *périodique*, s'il existe un entier N telle que $c(n+N) = c(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Une fonction f sur $\mathbb{Z}$ est appelée *un polynôme de degré d à coefficients périodiques*, si $f(n) = \sum_{j=0}^{d} c_j(n) n^j$, les fonctions $c_j(n)$ étant des fonctions périodiques sur $\mathbb{Z}$. Meinrenken et Sjamaar ont établi le beau théorème suivant, qui est une profonde généralisation du théorème d'Ehrhart pour les polytopes à sommets entiers.

THÉORÈME 3.4. — *(Meinrenken-Sjamaar) La fonction* $n \mapsto \dim RR^{J_h}(M, L^n)^G$ *sur l'ensemble* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ *est la restriction à* $\mathbb{N}$ *d' un polynôme sur* $\mathbb{Z}$ *à coefficients périodiques. Le degré de ce polynôme est égal à* $\dim M/2 - \dim G$.

Ce résultat s'obtiendra non pas directement mais comme conséquence d'une réalisation géométrique de $RR^{J_h}(M, L)^G$ en tant qu'espace de fonctions sur l'espace réduit $red_0(M) = \Phi^{-1}(0)/G$. Autrement dit, Meinrenken-Sjamar démontrent la

CONJECTURE DE GUILLEMIN-STERNBERG :

$$Q(M)^G = Q(red_0(M)).$$

Nous expliquerons en détail la signification du deuxième membre de cette égalité dans la sous-section 5.1, car en général l'espace topologique $red_0(M)$ n'est pas lisse. Par cette voie géométrique, on identifiera $RR^{J_h}(M, L^n)^G$ à l' espace vectoriel $RR^{J_h}(M_G, L_G^n)$ où M_G est une V-variété et L_G un V-fibré. La formule de Riemann-Roch-Kawasaki nous assurera alors le comportement " polynôme à coefficients périodiques" de la fonction $n \mapsto \dim RR^{J_h}(M, L^n)^G$

4. PREMIÈRES TENTATIVES DANS LE CAS D'UN TORE T

Soit T un tore agissant de manière hamiltonienne sur une variété symplectique compacte M. On suppose M préquantifiée. Ecrivons $Q(M) = \oplus_{\Lambda \in \widehat{T}} m(\lambda) e^{\Lambda}$. Ici $\Lambda = i\lambda$ est dans le réseau des poids. La conjecture de Guillemin-Sternberg dans le cas d'un tore affirme que $m(\lambda) = Q(\Phi^{-1}(\lambda)/T)$. La première idée qui vienne à l'esprit de tout un chacun pour calculer les multiplicités $m(\lambda)$ est d'utiliser la formule d'Atiyah-Bott-Segal-Singer [3],[4],[5] pour l'indice équivariant. On verra que, en dehors de situations très particulières, cette formule n'entraîne pas immédiatement un calcul des multiplicités $m(\lambda)$ en fonction de la fibre $\Phi^{-1}(\lambda)$. On peut cependant obtenir rapidement quelques résultats qualitatifs sur le support de la représentation $Q(M)$.

Considérons plus généralement la représentation $RR^J(M, \mathcal{E})$, où $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel T-équivariant et J une structure presque complexe T-invariante quelconque. Décomposons

$RR^J(M,\mathcal{E}) = \oplus_{\Lambda\in\widehat{T}} n(\lambda)e^{\Lambda}$. Notons F l'ensemble des composantes connexes P de M^T. Chacune d'entre elles est une sous-variété symplectique connexe de M. Les poids de T sur $\mathcal{E}|_p$ ne varient pas lorsque p parcourt P ; notons $Poids(P,\mathcal{E}) \subset i\mathfrak{t}^*$ leur ensemble. On note $Poids(\mathcal{E}) = \bigcup_{P\in F} Poids(P,\mathcal{E})$. On note $Poids(P,J)$ les poids de T dans l'espace complexe normal $(TM_p,J)/(TP_p,J)$ pour un $p\in P$ (i.e. les poids non-nuls dans l'espace complexe (TM_p,J)). La formule de l'indice d'Atiyah-Bott-Segal-Singer s'écrit sous la forme

$$\mathrm{Tr}_{RR^J(M,\mathcal{E})} = \sum_{P\in F} \chi_P$$

d'une somme de fonctions rationnelles χ_P sur T, attachées à chaque composante irréductible P de la variété fixe M^T. Le dénominateur de χ_P est un produit d'éléments $(1-e^{\alpha})$ avec $\alpha \in Poids(P,J)$. Le numérateur est une combinaison linéaire de e^{ν_k} où les ν_k sont des poids appartenant $Poids(P,\mathcal{E})$. La fonction χ_P ne dépend que de P, du fibré normal à P dans M et de $\mathcal{E}|_P$. Par exemple, si P est un point $\{p\}$, on a

$$\chi_P(\exp X) = \frac{\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}_p}(\exp X)}{\prod_{\alpha\in Poids(p,J)}(1-e^{\langle\alpha,X\rangle})}.$$

Pour tirer des informations de cette formule, il est nécessaire de prendre des développements compatibles de chaque fonction rationnelle

$$\frac{1}{\prod_{\alpha\in Poids(p,J)}(1-e^{\langle\alpha,X\rangle})}$$

en une série infinie de caractères. Ce n'est qu'après addition des contributions de tous les points fixes que l'on obtient une somme finie de caractères. Le seul cas où il est facile d'utiliser ce développement en séries de la formule de l'indice pour calculer $n(\lambda)$ est celui où Λ est un élément extrémal.

Définition 4.1. — *Un poids $\Lambda \in Poids(\mathcal{E})$ est dit extrémal s'il existe $\xi \in \mathfrak{t}^*$ tel que $i\langle\xi,\mu-\Lambda\rangle > 0$ pour tout μ poids de $\mathcal{E}$ différent de Λ.*

En particulier, si $Poids(\mathcal{E}) = \{\Lambda\}$, alors le point Λ est extrémal. Notons $\mathrm{Kir}(\mathcal{E}) \subset i\mathfrak{t}^*$ l'enveloppe convexe des poids de $\mathcal{E}$.

Proposition 4.2. — *Soient $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel T-équivariant sur M et J une structure presque complexe G-invariante sur M. Alors le support de la représentation $RR^J(M,\mathcal{E})$ est contenu dans* $\mathrm{Kir}(\mathcal{E})$.

Preuve (esquisse) Démontrons par exemple que si $Poids(\mathcal{E}) = \{0\}$, et si les points fixes sont isolés, alors notre représentation $RR^J(M,\mathcal{E})$ est un multiple de la représentation triviale. L'espace $RR^J(M,\mathcal{E})$ s'écrit comme une somme finie de poids :

$$RR^J(M,\mathcal{E}) = \oplus_{\Lambda\in\widehat{T}} n(\lambda)e^{\Lambda}.$$

La fonction $\mathrm{Tr}_{RR^J(M,\mathcal{E})}$ s'étend à $\exp \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. Nous calculons $\mathrm{Tr}_{RR^J(M,\mathcal{E})}(\exp itX)$ par la formule des points fixes, pour un $X\in\mathfrak{t}$ tel que $\langle\alpha,X\rangle \neq 0$ pour tout $\alpha \in \bigcup_P Poids(P,J)$. La fonction $1/(1-e^{-x})$ est bornée par 1 si x tend vers $+\infty$, tandis que $1/(1-e^{x})$ tend vers 0 si x tend vers $+\infty$. Si $Poids(\mathcal{E}) = \{0\}$, on voit donc que la fonction $t \mapsto \mathrm{Tr}_{RR^J(M,\mathcal{E})}(\exp itX)$, avec X générique, reste bornée lorsque t tends vers $\pm\infty$. Ceci n'est possible que si $RR^J(M,\mathcal{E})$ est un multiple de la représentation triviale.

En particulier, si $[\mathbb{C}]$ est le fibré trivial, la représentation $RR^J(M,[\mathbb{C}])$ est un multiple de la représentation triviale.

Définition 4.3. — *Notons*

$$\mathrm{Todd}^J(M) = \dim RR^J(M,[\mathbb{C}]).$$

C'est un entier positif ou négatif, qu'on appellera le J-genre de Todd.

Revenons à la décomposition de $RR^J(M,L) = \oplus_{\Lambda\in\widehat{T}} m(\lambda)e^{\Lambda}$ dans le cas d'un tore et du fibré de Kostant-Souriau. On voit d'après la proposition 4.2 que si L est un fibré de Kostant-Souriau sur une variété symplectique compacte (M,Ω) et si 0 n'est pas dans $\mathrm{Kir}(M)$, alors $m(0) = 0$, **quelle que soit la structure presque complexe** J. Par contre, cette proposition est beaucoup plus délicate dans le cas d'un groupe compact non abélien, et elle n'est d'ailleurs vraie que si J est adaptée. Par exemple, soient $G = SU(2)$ et $O_{-i\alpha}$ l'orbite coadjointe de $-i\alpha$ où α est la racine. Dans ce cas, le polytope de Kirwan $\mathrm{Kir}(O_{-i\alpha})$ est égal à $\{-i\alpha\}$. Soit L le fibré de Kostant-Souriau sur $O_{-i\alpha}$. Il y a deux structures presque-complexes G-invariantes sur $O_{-i\alpha}$, à savoir J_h qui est adaptée et $-J_h$ qui ne l'est pas. On a

$$\mathrm{Tr}_{RR^{-J_h}(O_{-i\alpha},L)}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix} = \frac{e^{2i\theta}}{1-e^{2i\theta}} + \frac{e^{-2i\theta}}{1-e^{-2i\theta}} = -1$$

et donc la multiplicité de la représentation triviale dans $RR^{-J_h}(O_{-i\alpha},L)$ est -1. Par contre, comme nous l'avons déjà fait remarquer, $RR^{J_h}(O_{-i\alpha},L)$ est irréductible (c'est la représentation adjointe) et, comme il se doit, la multiplicité de la représentation triviale dans $RR^{J_h}(O_{-i\alpha},L)$ est égale à 0.

Résumons ce qui découle de ces premières observations de la formule des points fixes.

Proposition 4.4. — *Soit (M,Φ) une variété symplectique compacte, munie d'une action hamiltonienne d'un tore T.*

- *Si $\mathcal{E}$ est un fibré sur M tel que $Poids(\mathcal{E}) = \{0\}$, alors $RR^J(M,\mathcal{E})$ est un multiple de la représentation triviale, quelque soit J.*
- *Si L est un fibré de Kostant-Souriau sur M, alors les poids dans le support de la représentation $Q(M) = RR^J(M,L)$ appartiennent tous au polytope $i\Phi(M)$, quelque soit J. Si J_h est adaptée et si λ est un sommet de $\Phi(M)$, alors $m(\lambda) = Q(\Phi^{-1}(\lambda))$.*
- *Si J_h est adaptée, les poids dans le support de la représentation $RR^{-J_h}(M,L)$ appartiennent tous à l'intérieur du polytope $i\Phi(M)$.*

5. LA QUANTIFICATION COMMUTE À LA RÉDUCTION !

5.1. Définition de $RR^{J_h}(red_a M, red_a \mathcal{E})$, pour a quasi-régulière

Soient (M, Φ) une G-variété hamiltonienne compacte et $\mathcal{E}$ un fibré G-équivariant sur M. Soit J_h la structure presque complexe adaptée et G-équivariante.

Plaçons-nous dans la situation idéale où G agit librement sur $\Phi^{-1}(0)$. Restreignons le fibré $\mathcal{E}$ à $\Phi^{-1}(0)$. Alors le groupe G agit librement sur $\mathcal{E}|_{\Phi^{-1}(0)}$ et $\mathcal{E}|_{\Phi^{-1}(0)}/G$ est un fibré vectoriel sur $red_0(M)$, noté $red_0\mathcal{E}$. De plus $red_0(M)$ hérite naturellement d'une forme symplectique provenant de $\Omega|_{\Phi^{-1}(0)}$, elle a donc sa structure presque complexe adaptée que l'on note encore J_h ; on peut alors définir $RR^{J_h}(red_0(M), red_0(\mathcal{E}))$. En particulier, si L est un fibré de Kostant-Souriau sur M, l'espace $Q(red_0 M)$ est défini : c'est l'espace $RR^{J_h}(red_0(M), red_0 L)$.

Dans le cadre algébrique, l'espace $\Phi^{-1}(0)/G$ a toujours une structure de variété algébrique éventuellement singulière et on peut donc définir $RR^{J_h}(red_0(M), red_0(\mathcal{E}))$ grâce au théorème de Riemann-Roch. Dans ce cas, R. Sjamaar [35] avait étendu le théorème de Guillemin Sternberg [16] aux fibres singulières. Dans le cas général d'une variété hamiltonienne compacte, comme montré par Sjamaar-Lerman [37], l'espace $\Phi^{-1}(0)/G$ est toujours un espace symplectique stratifié, on peut donc définir sa dimension comme la dimension de sa plus grande strate. On peut aussi définir son volume symplectique $\mathrm{vol}(red_0 M)$. Mais il est plus difficile de définir le nombre $Q(red_0 M)$. Nous allons le faire par déformation.

Donnons tout d'abord une construction d'un espace virtuel $RR^{J_h}(red_0 M, red_0 \mathcal{E})$ dans le cas où 0 est valeur quasi-régulière et le fibré $\mathcal{E}$ est un fibré G-équivariant quelconque sur M.

Comme J_h est adaptée, nous avons $\mathfrak{g}_m \cap J_h(\mathfrak{g}_m) = \{0\}$. Notons $red_0(T_m^* M)$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}_m \oplus J_h \mathfrak{g}_m$ dans $T_m^* M$. C'est un sous-espace vectoriel complexe de $(T_m^* M, J_h)$ de rang constant. On forme le **fibré complexe** $red_0(T^*M)$ sur $\Phi^{-1}(0)$ de fibre $red_0(T_m^* M)$. On note P_0 une projection G-équivariante de $\Lambda T^* M$ sur $\Lambda(red_0(T^*M))$. Alors

$$red_0(c^{J_h})(m,\xi) : \Lambda^{pair}(red_0(T^*M)) \otimes \mathcal{E}_m \to \Lambda^{impair}(red_0(T^*M)) \otimes \mathcal{E}_m,$$

défini par

$$red_0(c^{J_h})(m,\xi) := (P_0 \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_m}) c^{J_h}(m,\xi),$$

est un symbole transversalement elliptique sur la variété $\Phi^{-1}(0)$. La propriété suivante résulte presque immédiatement des définitions.

Proposition 5.1. — *Si* 0 *est une valeur régulière et si* G *opère librement dans* $\Phi^{-1}(0)$, *on a*

$$RR^{J_h}(red_0(M), red_0(\mathcal{E})) = [\mathrm{Indice}_{\Phi^{-1}(0)}(red_0(c^{J_h}))]^G.$$

Remarquons maintenant que l'on peut toujours définir $\mathrm{Indice}_{\Phi^{-1}(0)}(red_0(c^{J_h}))$ du moment que 0 est une valeur quasi-régulière de Φ. Dans ce cas $\Phi^{-1}(0)$ est une variété compacte et le symbole $red_0(c^{J_h})$ est un symbole transversalement elliptique sur $\Phi^{-1}(0)$, ce qui assure que $\mathrm{Indice}_{\Phi^{-1}(0)}(red_0(c^{J_h}))$ est une représentation virtuelle de G, avec multiplicité finie de chaque représentation de G. En fait, l'espace des orbites $red_0(M) = \Phi^{-1}(0)/G$ est "presque" une variété symplectique compacte (une variété à singularités quotients) et on pourrait définir intrinsèquement l'entier relatif $RR^{J_h}(red_0(M), red_0(\mathcal{E}))$. Toutefois, nous éludons ici cette question délicate et nous posons la

DÉFINITION 5.2. — *Si* 0 *est une valeur quasi-régulière de* Φ*, on définit*

$$RR^{J_h}(red_0(M), red_0(\mathcal{E})) = [\mathrm{Indice}_{\Phi^{-1}(0)}(red_0(c^{J_h}))]^G.$$

Soit $a \in \mathfrak{g}^*$ une valeur quasi-régulière. Considérons sur $M \times O_a^-$ le fibré vectoriel $\mathcal{E} \otimes [\mathbb{C}]$ produit extérieur du fibré $\mathcal{E} \to M$ et du fibré **trivial** $[\mathbb{C}] \to O_a^-$. Alors 0 est une valeur quasi-régulière pour l'application moment de $M \times O_a^-$.

DÉFINITION 5.3. — *Soit a une valeur quasi-régulière de* Φ*. On définit*

$$RR^{J_h}(red_a(M), red_a(\mathcal{E})) = RR^{J_h}(red_0(M \times O_a^-), red_0(\mathcal{E} \otimes [\mathbb{C}])).$$

5.2. Les théorèmes

Nous avons maintenant introduit les notations nécessaires aux énoncés des théorèmes.

THÉORÈME 5.4. — *(Meinrenken-Sjamaar). Soit (M, Φ) une variété G-hamiltonienne compacte. Supposons que le fibré $\mathcal{E}$ soit le fibré de Kostant-Souriau ou le fibré trivial. Alors, pour toute valeur $a \in \Phi(M)$, quasi-régulière et proche de* 0*, le nombre* $\dim RR^{J_h}(red_a(M), red_a(\mathcal{E}))$ *est indépendant de a.*

Ceci permet de donner la

DÉFINITION 5.5. — *Soit L un fibré de Kostant-Souriau. On pose*

$$Q(red_0 M) = \dim RR^{J_h}(red_a(M), red_a(L))$$

pour $a \in \Phi(M)$ quasi-régulière et suffisamment proche de 0*.*

On pose

$$\mathrm{Todd}(red_0(M)) = \dim RR^{J_h}(red_a(M), \mathbb{C})$$

pour $a \in \Phi(M)$ quasi-régulière et suffisamment proche de 0*.*

La conjecture de Guillemin-Sternberg est précisée et démontrée :

THÉORÈME 5.6. — *(Meinrenken-Sjamaar). Soit (M, Φ) une variété G-hamiltonienne compacte. Alors*

$$Q(M)^G = Q(red_0 M).$$

De plus, le genre de Todd est invariant par réduction :

$$\mathrm{Todd}^{J_h}(M) = \mathrm{Todd}^{J_h}(red_0 M).$$

Si l'on est effectivement dans le cas d'une variété compacte complexe, alors

$$Q(M) = \sum_{k=0}^{\dim M/2} (-1)^k H^k(M, \mathcal{O}(L)).$$

Braverman [8], Zhang [49], Wu [48] (dans le cas kählérien) et Teleman [38] (dans le cas algébrique) obtiennent l'égalité $H^k(M, \mathcal{O}(L))^G = H^k(red_0(M), \mathcal{O}(red_0 L))$ en chaque degré.

On peut aussi démontrer une réalisation des solutions invariantes d' indices d'opérateurs de Dirac tordus, dans le cas de fibrés Φ-positifs comme solution sur le "quotient" $red_0(M)$, ou bien prouver la non-existence de solutions invariantes.

Théorème 5.7. — *(Tian-Zhang, Paradan). Soit (M, Φ) une variété G-hamiltonienne compacte.*

- *Soit $\mathcal{E}$ un fibré strictement Φ-positif . Si $0 \notin \Phi(M)$, nous avons*

$$[RR^{J_h}(M, \mathcal{E})]^G = 0$$

- *Supposons que 0 soit une valeur régulière de Φ et soit $\mathcal{E}$ un fibré Φ-positif. Alors*

$$[RR^{J_h}(M, \mathcal{E})]^G = RR^{J_h}(red_0 M, red_0 \mathcal{E}).$$

Remarque 5.8. — Si J n'est pas adaptée à Ω, nous avons vu que le théorème 5.7 est faux. Il est cependant encore vrai dans le cas de structures $Spin_{\mathbb{C}}$ quelconques invariantes par un tore T, comme le montrent Canas-Karshon-Tolman [9] et Paradan [33], dans le cadre d'une application moment abstraite au sens de Karshon [13].

5.3. La fonction multiplicité et les fibres de l'application moment

Soit M une variété compacte préquantifiée. Donnons maintenant une signification géométrique à la fonction $m(\tau)$ telle que $Q(M) = RR^{J_h}(M, L) = \oplus_{\tau \in \widehat{G}} m(\tau)\tau$. On obtient tout d'abord le

Théorème 5.9. — *Soit G un groupe compact connexe. Le support de $Q(M)$ est contenu dans $i\,\mathrm{Kir}(M) \cap Poids$.*

On paramètre $\widehat{G}$ par les représentations $Q(O_\lambda)$ associées aux orbites entières, c'est-à-dire par les représentations de plus haut poids Λ. La variété $M \times O_\lambda^-$ est préquantifiée ; on pose $Q(red_\lambda(M)) = Q(red_0(M \times O_\lambda^-))$.

Théorème 5.10. — *(Meinrenken-Sjamaar) Soit (G, M, Ω, Φ) une variété G-hamiltonienne compacte préquantifiable muni d'un fibré de Kostant-Souriau L. Alors*

$$Q(M) = \oplus_{\lambda \in \mathrm{Kir}(M), \Lambda \in Poids} Q(red_\lambda M) Q(O_\lambda).$$

Dans cette expression, $Q(red_\lambda M)$ est un nombre (positif ou négatif) tandis que $Q(O_\lambda)$ est une représentation irréductible de G.

Remarquons que cette expression ne détermine pas le support de $Q(M)$, car les entiers $Q(red_\lambda M)$ peuvent être nuls.

Il est utile de rajouter un paramètre pour comparer multiplicités et volumes. On note M_n la variété M munie de la forme symplectique $n\Omega$; l'application moment est $n\Phi$. Elle est préquantifiée et de polytope $n\,\mathrm{Kir}(M)$. On a

$$Q(M_n) = \oplus_{\lambda\in n\,\mathrm{Kir}(M),\,\Lambda\in Poids}\, q(n,\lambda)Q(O_\lambda)$$

avec $q(n,\lambda) = Q(red_\lambda(M_n))$. Considérons la fonction $q(n, n\lambda)$. Remarquons que $red_{n\lambda}(M_n)$ est toujours le même espace topologique stratifié $\Phi^{-1}(\lambda)/G(\lambda)$; cependant la structure symplectique sur la plus grande strate est multipliée par n. La formule de Kawasaki [19], [44] montre que $q(n, n\lambda)$ est un quasi-polynôme en n. De plus le terme de degré maximal de ce quasi-polynôme est $\mathrm{vol}(red_\lambda M)n^{\dim red_\lambda M/2}$.

Le polytope $\mathrm{Kir}(M)$ est l'adhérence de ses points rationnels. Les points rationnels dans $\mathrm{Kir}(M)$ sont caractérisés comme dans le cas algébrique [31] : un point rationnel λ est dans $\mathrm{Kir}(M)$ si et seulement si il existe un entier N tel que $\tau_G(n\Lambda)$ soit dans le support de $Q(M_n)$, pour tout $n \geq N$. Par contre, il n'est pas en général vrai que le support de $Q(M)$ consiste exactement en $i\,\mathrm{Kir}(M) \cap Poids$. Un cas où ceci est vrai est le cas où M est le produit de deux orbites coadjointes avec action diagonale de $U(r)$ (dans ce cas $Q(M)$ est le produit tensoriel de deux représentations irréductibles de $U(r)$). C'est le théorème de saturation prouvé récemment par Knutson et Tao [24]. La formule théorique donnée ici n'est d'aucune utilité pour la démonstration de ce résultat ! Le théorème 5.10 est tout de même très beau philosophiquement. On "voit" la décomposition de $Q(M)$ comme une somme de représentations associées aux images réciproques des orbites entières de G dans $\mathfrak{g}^*$.

Exemple. La compactification de De Concini-Procesi

Considérons d'abord le cas de $PGL(2,\mathbb{C})$. On considère l'espace $M(2,\mathbb{C})$ des matrices 2×2 complexes. Soit $M = Proj(M(2,\mathbb{C})) = (M(2,\mathbb{C}) \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ l'espace projectif. C'est la compactification de $PGL(2,\mathbb{C})$: on a rajouté à $PGL(2,\mathbb{C})$ l'hypersurface $\det = 0$. La variété M est munie d'une action à droite et à gauche de $SU(2)\times SU(2)$. Le fibré $\mathcal{O}(1)$ sur l'espace projectif de $M(2,\mathbb{C})$ est le fibré de Kostant-Souriau. Nous calculons le caractère R_k de la représentation $RR^{J_h}(M,\mathcal{O}(k))$ comme une fonction sur $T\times T$. Il y a 4 points fixes par l'action de $T\times T$, de représentants dans $M(2,\mathbb{C})$ les 4 matrices avec un seul coefficient non nul. Il est facile de calculer la formule d' Atiyah-Bott :

$$R_k(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & 0\\ 0 & b^{-1}\end{pmatrix}) =$$

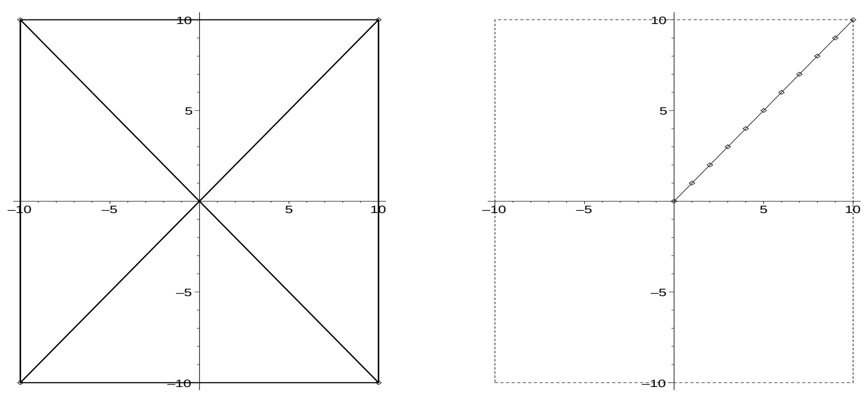
$$\frac{a^{2k}b^{2k}}{(1-a^{-2})(1-b^{-2})(1-a^{-2}b^{-2})} + \frac{a^{-2k}b^{2k}}{(1-a^{2})(1-b^{-2})(1-a^{2}b^{-2})}$$

$$+\frac{a^{2k}b^{-2k}}{(1-a^{-2})(1-b^{2})(1-a^{-2}b^{2})}+\frac{a^{-2k}b^{-2k}}{(1-a^{2})(1-b^{2})(1-a^{2}b^{2})}$$

On calcule sans difficulté que comme représentation de $G \times G = SU(2) \times SU(2)$, on a

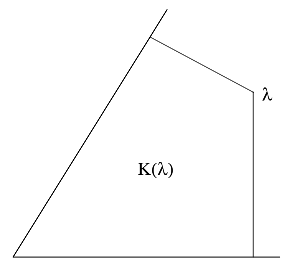
$$RR^{J_h}(M, L^k) = \oplus_{m=0}^{k} \tau_G(m\alpha) \otimes \tau_G(m\alpha)$$

comme l'indique le polytope de Kirwan pour l'action de $G \times G$. On indique ci dessous le polytope de Kirwan pour l'action de $T \times T$, celui pour $G \times G$, et les représentations apparaissant dans RR^k.



Plus généralement, considérons la compactification "magnifique" d'un groupe semi-simple adjoint quelconque.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie compacte semi-simple de groupe adjoint G, et soit $G_{\mathbb{C}}$ la complexification de G. La compactification $C(G)$ de De Concini-Procesi de $G_{\mathbb{C}}$ est une variété algébrique projective lisse, dans laquelle $G_{\mathbb{C}}$ est un ouvert de Zariski. De plus, l'action de $G_{\mathbb{C}}$ par multiplication à droite et à gauche se prolonge en une action à droite et à gauche sur $C(G)$. Soit $\Lambda = i\lambda$ un poids régulier dominant. Il existe alors une forme symplectique Ω_λ sur $C(G)$ pour laquelle l'action de $G \times G$ est hamiltonienne. Considérons le cône $C(\Pi)$ engendré par la base de racines simples Π et le cône affine $\lambda + iC(\Pi)$ dans $\mathfrak{t}^*$ de sommet λ. L'ensemble $K(\lambda) := \mathfrak{c} \cap (\lambda + iC(\Pi))$ est un polytope ; c'est un prisme :



Soit w_0 l' élément le plus long du groupe de Weyl. Alors le polytope de Kirwan pour l'action hamiltonienne de $G \times G$ sur la variété symplectique $(C(G), \Omega_\lambda)$ est le polytope $(f, -w_0(f))$ avec $f \in K(\lambda)$. De plus, il existe un fibré de Kostant-Souriau L_λ pour cette structure $G \times G$-hamiltonienne. La formule d'Atiyah-Bott donne

$$RR^{J_h}(C(G), L_\lambda)(\exp H_1, \exp H_2) =$$

$$\sum_{w_1, w_2 \in W \times W} (w_1, w_2) \cdot \Big[\frac{e^{\langle \Lambda, H_1 \rangle}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+}(1 - e^{-\langle \alpha, H_1 \rangle})} \frac{e^{-\langle \Lambda, H_2 \rangle}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+}(1 - e^{\langle \alpha, H_2 \rangle})} \frac{1}{\prod_{\gamma \in \Pi}(1 - e^{-\langle \gamma, (H_1 - H_2) \rangle})}\Big].$$

On vérifie en utilisant des propriétés d'antisymétrie que

$$RR^{J_h}(C(G), L_\lambda) = \oplus_{\nu \in iK(\lambda) \cap Poids} \tau_G(\nu) \otimes \tau_G(\nu)^*.$$

6. ESQUISSES DE DÉMONSTRATIONS

6.1. Démonstration par coupure symplectique

Le théorème 5.6 dans le cas d'un tore $T = \{u \in \mathbb{C}, |u| = 1\}$ à une dimension n'est déjà pas immédiat ; on peut le démontrer en forçant la valeur 0 à être un sommet de $\Phi(M)$ (cas où la conjecture est résolue grâce à la Proposition 4.4) à l'aide des coupures symplectiques, introduites par E. Lerman [26].

Considérons la variété $\tilde{M} = M \times \mathbb{C}$ munie de l'action diagonale de H : ici H est un autre exemplaire de T et agit par $h \cdot (m, z) = (h \cdot m, hz)$, $(h \in H, m \in M, z \in \mathbb{C})$.

Soit Z une base de $\mathfrak{t}^*$. Munissons $\mathbb{C}$ de la structure symplectique pour laquelle le moment de l'action $z \mapsto hz$ soit $-|z|^2 Z$. Si on remplace Z par $-Z$, la structure symplectique est changée en son opposée. L'application moment $\tilde{\Phi} : \tilde{M} \to \mathbb{R}Z$ est donnée par $\tilde{\Phi}(m, z) = \Phi(m) - |z|^2 Z$. On suppose pour simplifier que $0 \in \Phi(M)$ est une valeur régulière. Alors $\tilde{\Phi}^{-1}(0) = \{(m, z), \Phi(m) - |z|^2 Z = 0\}$ est une variété et $M_Z = \tilde{\Phi}^{-1}(0)/H$ est une V-variété. Analysons cette V-variété. Elle est encore munie d'une action de T, en écrivant $g \cdot [m, z] = [m, g^{-1} z] = [gm, z]$, $(g \in T, m \in M, z \in \mathbb{C})$. On note

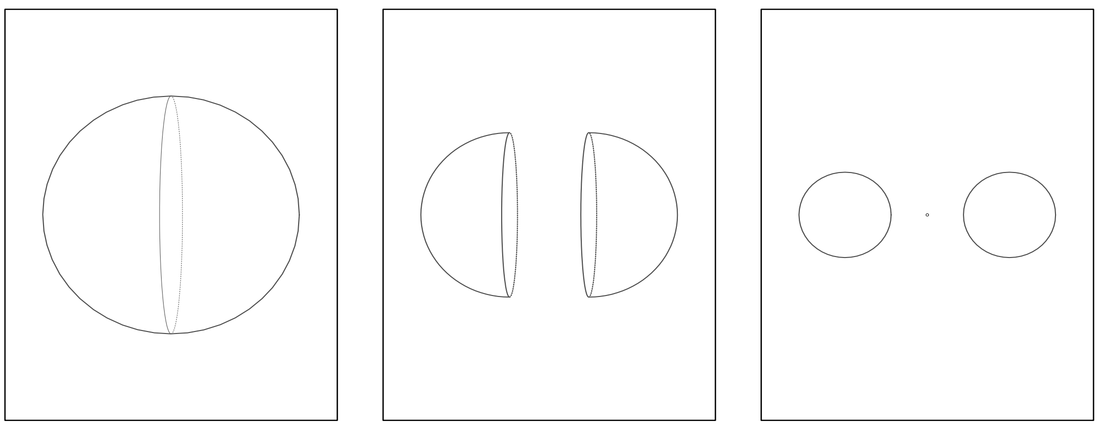
$M_{>0} = \Phi^{-1}(]0,\infty[Z)$; c'est un ouvert de M. En regardant $z \neq 0$ ou $z = 0$, on voit sans difficulté que M_Z est réunion de l'ouvert $M_{>0}$ et de l'ensemble compact $red_0(M) = \Phi^{-1}(0)/T$, qui devient variété de points fixes pour l'action résiduelle de T.

Soit $\mathcal{E}$ un fibré T-équivariant sur M. Notons $\mathcal{E}_Z$ le fibré sur M_Z déduit par quotient de $\mathcal{E} \otimes \mathbb{C}$ sur $\tilde{M}$. On démontre alors à partir de la formule de l'indice équivariant (prolongé au cas de V-variétés dans [19], [44]) la formule de recollement suivante :

Théorème 6.1. — *(Duistermaat-Guillemin-Meinrenken-Wu). Pour tout fibré T-équivariant $\mathcal{E}$ sur M, et toute structure presque complexe J, on a l'égalité*

$$RR^J(M,\mathcal{E}) = RR^J(M_Z,\mathcal{E}_Z) + RR^J(M_{-Z},\mathcal{E}_{-Z}) - RR^J(red_0(M), red_0(\mathcal{E}))$$

dans $R(T)$.



M $\qquad$ $M<0 \quad \cup \quad M>0$ $\qquad$ $M_{-Z} \cup red_0(M) \cup M_Z$

Preuve (esquisse) Supposons, pour simplifier, que $red_0(M)$ soit une variété lisse. On applique tout d'abord la formule de l'indice d'Atiyah-Segal-Singer [6]: il existe une forme caractéristique κ sur $red_0(M)$ telle que le nombre $RR^J(red_0(M), red_0(\mathcal{E}))$ soit égal à $\int_{red_0(M)} \kappa$.

Soit $g \in T$. On a rajouté une composante connexe de points fixes pour l'action de T isomorphe à $red_0(M)$ simultanément à M_Z et à M_{-Z}. La formule de l'indice équivariant d'Atiyah-Segal-Singer [5] pour $\mathrm{Tr}_{RR^J(M_Z,\mathcal{E}_Z)}(g)$ a une contribution de la composante $red_0(M)$ du type $\int_{red_0(M)} \frac{\kappa}{1-ge^C}$, où C est la courbure du fibré normal à $red_0(M)$ dans M_Z. L'autre contribution simultanée est de la forme $\int_{red_0(M)} \frac{\kappa}{1-g^{-1}e^{-C}}$. L'identité du théorème découle alors de l'identité $\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-z^{-1}} = 1$.

Comme on s'y attend, la démonstration est beaucoup plus délicate dans le cas d'un groupe non abélien. Cependant, la même belle idée de découper le polytope $\mathrm{Kir}(M)$ en morceaux et de fabrication de variétés reliées à chaque morceau peut être réalisée, en utilisant les idées de Woodward [47]. Il faut des découpages spéciaux (dits admissibles) lorsque une face du polytope intersecte un mur de la chambre de Weyl.

6.2. Démonstration par déformation du symbole

La démonstration de Paradan par déformation du symbole est plus directe, mais utilise le gros outil des opérateurs transversalement elliptiques. Cette démonstration peut être considérée comme une version en K-théorie de la démonstration analytique de Tian-Zhang [39]. Au lieu de s'appuyer sur la méthode de localisation de Bismut-Lebeau, elle s'appuie sur l'excision en K-théorie. Ces deux démonstrations développent une idée de déformation due à Witten [46], pour la localisation non-abélienne.

Soit (M, Φ) une G-variété hamiltonienne compacte et $\mathcal{E}$ un fibré G-équivariant. On identifie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ grâce à un produit scalaire G-invariant. L'application Φ nous permet alors de fabriquer un champ de vecteurs G-invariant canonique sur M : le champ de vecteurs $\mathbf{V}_{\mathbf{\Phi}}$ égal en $m \in M$ à $2\Phi(m)_m$. On le note $\mathbf{V}$ si (M, Φ) est fixée. Ce champ va nous permettre de déformer le symbole donné par la formule (2) en un symbole transversalement elliptique.

La variété M est munie d'une structure riemannienne par $g(v, w) = \Omega(v, J_h w)$. On identifie TM et T^*M en utilisant cette forme, et on considère le symbole sur T^*M donné pour tous $m \in M, \xi \in T_m M$ par

$$c_{\mathbf{V}}^{J_h,M}(m, \xi) = c^{J_h,M}(m, \xi - \mathbf{V}_m).$$

On note ce symbole $c_{\mathbf{V}}^{J_h}$ si la variété M est fixée. L'indice ne change pas par déformation, d'où $\mathrm{Indice}_M(c_{\mathbf{V}}^{J_h} \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) = RR^{J_h}(M, \mathcal{E})$ grâce à la déformation $c^{J_h}(m, \xi - t\mathbf{V}_m)$, $0 \leq t \leq 1$.

L'ensemble $\mathrm{Char}(c_{\mathbf{V}}^{J_h})$ est l'ensemble constitué des $(m, \xi), m \in M, \xi \in T_m M$ tels que $\xi = -\mathbf{V}_m$. Cherchons son intersection avec $T_G^* M$. Dans cette même équation, le vecteur ξ est de plus orthogonal à $\mathfrak{g}_m$, il est donc nécessaire que le champ de vecteurs $\mathbf{V}$ s'annule en m, puisque $\mathbf{V}_m$ est dans $\mathfrak{g}_m$. On obtient donc par cette méthode de "pousser un symbole en dehors de la section nulle" un ensemble beaucoup plus petit que la section nulle : l'ensemble C des zéros du champ $\mathbf{V}$. Cet ensemble de zéros contient évidemment $\Phi^{-1}(0)$. Il contient aussi $G \cdot M^T$, car si $m \in M^T$, alors $\Phi(m) \in \mathfrak{t}$ et $\Phi(m)_m$ s'annule en m. L'équation de Hamilton implique que C est l'ensemble des points critiques de la fonction $\|\Phi(m)\|^2$. La propriété suivante s'ensuit.

Proposition 6.2. — *L'ensemble $\Phi(C)$ est une réunion finie d'orbites de G dans $\mathfrak{g}$.*

Notons $\Phi(C) = \bigcup_{\beta \in B_G} O_\beta$, où B_G est un ensemble fini de points de $\mathfrak{c}$. Soit $\bigcup_{\beta \in B_G} \mathcal{U}_\beta$ une collection disjointe de voisinages ouverts $\mathcal{U}_\beta$ des fermés $\Phi^{-1}(O_\beta)$. Par excision, on obtient

$$RR^{J_h}(M, \mathcal{E}) = \sum_{\beta \in B_G} \mathrm{Indice}_{\mathcal{U}_\beta}(c_{\mathbf{V}}^{J_h,\mathcal{U}_\beta} \otimes I_{\mathcal{E}}).$$

On est donc ramené à étudier les symbole $(c_{\mathbf{V}}^{J_h,\mathcal{U}_\beta} \otimes I_{\mathcal{E}})$ sur chaque ouvert $\mathcal{U}_\beta$. Le théorème 5.7 résultera donc des deux propositions suivantes qui illustrent la dichotomie entre les cas $\beta = 0$ et $\beta \neq 0$.

Proposition 6.3. — *Si* 0 *est une valeur régulière, alors pour tout fibré G-équivariant $\mathcal{E}$ sur M, on a*

$$[\mathrm{Indice}_{\mathcal{U}_0}(c_{\mathbf{V}}^{J_h,\mathcal{U}_0} \otimes I_{\mathcal{E}})]^G = RR^{J_h}(red_0 M, red_0 \mathcal{E}).$$

Preuve (esquisse) : Si 0 est une valeur régulière, un voisinage $\mathcal{U}_0$ de $\Phi^{-1}(0)$ est isomorphe à $\Phi^{-1}(0) \times \mathfrak{g}^*$. Le symbole $c_{\mathbf{V}}^{J_h,\mathcal{U}_0}$ se déforme en le produit du symbole elliptique de Bott d'indice 1 sur $\mathfrak{g}^*$ et du symbole transversalement elliptique $red_0(c^{J_h})$ sur $\Phi^{-1}(0)$, qui nous a servi à obtenir une définition de $RR^{J_h}(red_0 M, red_0 \mathcal{E})$.

Proposition 6.4. — *Soit $\beta \in B_G$ non nul. Si $\mathcal{E}$ est un fibré strictement Φ-positif, alors on a*

$$[\mathrm{Indice}_{\mathcal{U}_\beta}(c_{\mathbf{V}}^{J_h,\mathcal{U}_\beta} \otimes I_{\mathcal{E}})]^G = 0.$$

Preuve (esquisse) : Fixons $\beta \neq 0$. Considérons un voisinage $G(\beta)$-invariant N de β dans $\mathfrak{g}(\beta)$ tel que l'ouvert $G \cdot N$ soit fibré sur $G \cdot \beta$. Posons $\mathcal{U} = \Phi^{-1}(G \cdot N)$ et $U = \Phi^{-1}(N)$. Alors U est une sous-variété fermée de l'ouvert $\mathcal{U}$ et l'on a

$$\mathcal{U} = G \times_{G(\beta)} U.$$

La variété U est une variété symplectique et $G(\beta)$- invariante. On obtient donc un espace $G(\beta)$-hamiltonien $(U, \Phi|_U)$. Le champ $\mathbf{V}_{\mathbf{\Phi|_U}}$ coïncide sur U avec le champ $\mathbf{V}_{\mathbf{\Phi}}$. On le notera donc encore $\mathbf{V}$. Remarquons qu'alors $c_{\mathbf{V}}^{J_h,U}(m,\xi) = c^{J_h,U}(m, \xi - \mathbf{V}_m)$ définit un symbole $G(\beta)$-transversalement elliptique sur la variété (non compacte) U. La représentation $[\mathrm{Indice}_U(c_{\mathbf{V}}^{J_h,U} \otimes I_{\mathcal{E}})]$ est une représentation à trace de $G(\beta)$. Le procédé d'induction holomorphe de $G(\beta)$ à G transforme toute représentation à trace de $G(\beta)$ en une représentation à trace de G. On montre alors que $[\mathrm{Indice}_{\mathcal{U}}(c_{\mathbf{V}}^{J_h,\mathcal{U}} \otimes I_{\mathcal{E}})]$ est obtenue par induction holomorphe de la représentation $[\mathrm{Indice}_U(c_{\mathbf{V}}^{J_h,U} \otimes I_{\mathcal{E}})]$ de $G(\beta)$ à G. Le champ $\mathbf{V}$ sur U est proche du champ de vecteurs produit par β sur U. En localisant en deux étapes, on peut se ramener à un calcul d'un indice d'un symbole du type $c_{\mathbf{V}}^{J_h}$ pour un voisinage de $\Phi^{-1}(\beta)$ dans la variété $\{\beta_M = 0\}$ des zéros du champ de vecteurs β_M. Le fait que $\mathcal{E}$ soit strictement positif assure une inégalité pour l'action de β sur les fibres de $\mathcal{E}$ en un zéro de β_M. Ceci implique la proposition.

7. DÉCOMPOSITION DE LA SÉRIE DISCRÈTE

7.1. Quantisation de variétés non compactes

Si U est une variété symplectique non nécessairement compacte, munie d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie S et si L est un fibré de Kostant-Souriau, on ne sait pas en général construire un espace canonique $Q(U)$ où opère le groupe S, ni à fortiori si la quantification commute à la réduction. Toutefois cette construction existe lorsque U est une orbite coadjointe quantifiable générique d'un groupe de Lie de type I. Ainsi pour les orbites U régulières et elliptiques d'un groupe de Lie semi-simple réel S, P. Paradan a démontré le théorème $[Q, R] = 0$. Dans le cadre de la méthode des orbites, on utilisera le formalisme *Spin* qui diffère légèrement du formalisme presque-complexe que nous avons employé jusqu'ici.

7.2. **Formalisme** *Spin*

Soit K un groupe compact connexe. Nous suivrons le formalisme de Harish-Chandra pour paramétriser $\widehat{K}$. Notons $\mathcal{H}_K$ l'ensemble des points $\mu \in \mathfrak{c}_K$ tels que μ soit régulière et $i\mu - \rho$ un poids de T. Les orbites O_μ correspondantes sont alors admissibles au sens de Duflo. L'ensemble $\widehat{K}$ est paramétrisé par $\mathcal{H}_K$ comme suit. Pour simplifier, nous supposons que ρ est un poids. Si $\mu \in \mathcal{H}_K$, l'orbite O_μ est aussi entière. Elle a de plus une structure *Spin* canonique. L'opérateur de Dirac sur O_μ tordu par L_μ a un indice $\Theta(K \cdot \mu)$ qui est la représentation de plus haut poids $i\mu - \rho$ de K. Ceci paramètre $\widehat{K}$ grâce aux orbites admissibles régulières.

Si M est une K-variété compacte de dimension paire avec structure *Spin*, et si $\mathcal{E}$ est un fibré K-équivariant sur M, on note $\Theta(M, \mathcal{E})$ l'indice de l'opérateur de Dirac tordu par $\mathcal{E}$. Si M est symplectique et munie d'un fibré L de Kostant-Souriau, posons

$$\Theta(M) := \Theta(M, L).$$

On a $\Theta(M) = RR^{J_h}(M, L \otimes \kappa)$ où κ^2 est le fibré canonique associé à la structure presque complexe J^h.

Si U est une variété riemannienne non nécessairement compacte de dimension paire avec structure *Spin*, et si $\mathcal{E}$ est un fibré K-équivariant hermitien sur M, on note $\Theta(U, \mathcal{E})$ l'indice L^2 de l'opérateur de Dirac tordu par $\mathcal{E}$. Si U est de plus symplectique et munie d'un fibré L de Kostant-Souriau, on pose encore $\Theta(U) = \Theta(U, L)$. Il n'est pas vrai que $\Theta(U, L)$ ne dépend que de la structure symplectique de U et dans cette notation, on sous-entend cette fois toutes les données supplémentaires (structures riemannienne et hermitienne).

7.3. K**-types de la série discrète et application moment**

Soit S un groupe réel semi-simple connexe de centre fini, admettant une série discrète. Soient K un sous-groupe compact maximal de S et T un tore maximal de K. Alors T est aussi un sous-groupe de Cartan de S. D'après Harish-Chandra, la série discrète de S est paramétrée par l'ensemble des orbites régulières admissibles et elliptiques, ensemble qu'on paramètre par un sous-ensemble $\widehat{S}_d$ du dual $\mathfrak{t}^*$ de l'algèbre de Lie de T. Pour chaque $\lambda \in \widehat{S}_d$, notons $\Theta(S \cdot \lambda)$ la représentation de S associée à $S \cdot \lambda$: elle est réalisée comme l'espace des solutions L^2 de l'opérateur de Dirac tordu par le fibré de Kostant-Souriau. Notons $\Theta_S(S \cdot \lambda)$ la trace de la représentation $\Theta(S \cdot \lambda)$. C'est une fonction géneralisée sur S, invariante par conjugaison, et qui admet une restriction à K notée $\Theta_S(S \cdot \lambda)|_K$.

Fixons $\lambda \in \widehat{S}_d$ et considérons l'orbite coadjointe $U := S \cdot \lambda$ munie de sa 2-forme canonique Ω. C'est une orbite de dimension maximale . L'action de K sur U est hamiltonienne. La variété $U = S \cdot \lambda$ n'est pas compacte, mais l'application moment correspondante

$\Phi : M \to \mathfrak{k}^*$ est propre. Elle est induite par la projection : ainsi les espaces réduits $\mathrm{red}_\mu M = \Phi^{-1}(K \cdot \mu)/K$ sont compacts pour tout $\mu \in \mathfrak{k}^*$. On peut définir l'entier relatif $\Theta(\Phi^{-1}(K \cdot \mu)/K)$ directement dans le cas d'une valeur régulière et par déformation dans le cas général.

THÉORÈME 7.1. — *(Paradan)*[34]. *Soit Φ la projection de $S\cdot\Lambda$ sur $\mathfrak{k}^*$. On a la décomposition*

$$\Theta_S(S \cdot \lambda)|_K = (-1)^{\frac{\dim(S/K)}{2}} \oplus_{\mu \in \mathcal{H}_K} \Theta(\Phi^{-1}(K \cdot \mu)/K)\Theta_K(K \cdot \mu) \ .$$

Dans cette formule, $\Theta(\Phi^{-1}(K\cdot\mu)/K)$ est un nombre entier et $\Theta_K(K\cdot\mu)$ est la représentation irréductible de K de plus haut poids $i\mu - \rho$. La démonstration de cette formule utilise la formule de Blattner pour $\Theta_S(S \cdot \lambda)|_K$.

Autrement dit, bien que la variété $S \cdot \lambda$ soit non compacte, le slogan : "la quantification commute à la réduction" est encore vrai.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.F. ATIYAH – *Elliptic operators and compact groups.* Lecture Notes in Mathematics 401, Springer, Berlin 1974

[2] M.F. ATIYAH – *Convexity and commuting Hamiltonians.* Bull. London Math. Soc. 14, 1982, pp 1–15

[3] M.F. ATIYAH and R. BOTT – *A Lefschetz fixed-point formula for elliptic complexes: I.* Ann. of Math. 86, 1967, pp 374–407

[4] M.F. ATIYAH and R. BOTT – *A Lefschetz fixed-point formula for elliptic complexes: II.* Ann. of Math. 88, 1968, pp 451–491

[5] M.F. ATIYAH and G. B. SEGAL – *The index of elliptic operators II.* Ann. of Math. 87, 1968, pp 531–545

[6] M.F. ATIYAH and I. M. SINGER – *The index of ellipic operators. I.* Ann. of Math. 87, 1968, pp 484–530

[7] N. BERLINE, E. GETZLER and M. VERGNE – *Heat kernels and Dirac operators.* Collection Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 298, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York, 1991.

[8] M. BRAVERMAN – *Cohomology of the Mumford quotient.* math-sg/9809146.

[9] A. CANAS DA SILVA, Y. KARSHON and S. TOLMAN – *Quantization of presymplectic manifolds and circle actions.* Trans. Amer. Math. Soc. 352 ,2000, pp 525–552.

[10] L. CORWIN and F.P. GREENLEAF – *A canonical approach to multiplicity formulas for induced and restricted representations of nilpotent Lie groups.* Comm. Pure Appl. Math. 41, 1988, pp 1051–1088.

[11] H. DUISTERMAAT, V. GUILLEMIN, E. MEINRENKEN and S. WU – *Symplectic reduction and Riemann-Roch for circle actions.* Math. Res. Lett. 2 ,1995, pp 259–266.

[12] J.J. DUISTERMAAT and G. HECKMAN – *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space.* Inv. Math. 69, 1982, pp 259–268

[13] V. L. GINZBURG, V. GUILLEMIN and Y. KARSHON – *Assignments and astract moment maps.* math-dg/9904117.

[14] V. GUILLEMIN – *Reduced phase spaces and Riemann-Roch. in Proceedings: Lie Groups and Geometry in honor of B.Kostant (Massachussets of Technology, 1994* Progress in Mathematics 123, Birkhäuser, Boston 1995, pp 305–334.

[15] V. GUILLEMIN and S. STERNBERG – *Convexity properties of the moment mapping.* Invent. Math. 67, 1982, pp 491–513.

[16] V. GUILLEMIN and S. STERNBERG – *Geometric Quantization and Multiplicities of group representations.* Invent. Math. 67, 1982, pp 515–538.

[17] L.C. JEFFREY and F.C. KIRWAN – *Localization for non abelian group actions.*Topology 34, 1995, pp. 291–327.

[18] L.C. JEFFREY and F.C. KIRWAN – *Localization and quantization conjecture.* Topology 36, 1997, pp. 647–693.

[19] T. KAWASAKI – *The index of elliptic operators over V-manifolds.* Nagoya Math. J. 84, 1981, pp. 135–157.

[20] A.A. KIRILLOV –*Eléments de la théorie des représentations.* Traduit du russe. Editions Mir. Moscou, 1974.

[21] F.C. KIRWAN –*Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1984.

[22] F.C. KIRWAN –*Convexity properties of the moment mapping III.* Invent. Math. 77, 1984, pp. 547–552.

[23] KLYACHKO –*Stable bundles, representation theory and Hermitian operators.* Selecta Math 4, 1998, pp. 419–445.

[24] A. KNUTSON and T. TAO – *The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products I: proof of the saturation conjecture.* J. Amer. Math. Soc. 12, 1999, pp. 1055-1090.

[25] B. KOSTANT – *Quantization and unitary representations.* In *Modern analysis and applications.* Lecture Notes in Mathematics 39, 1970, pp 87–207.

[26] E. LERMAN – *Symplectic cuts.* Mathematical Research Letters, 1995, 2, pp 247–258.

[27] J. MARSDEN and A. WEINSTEIN – *Reduction of symplectic manifolds with symetry.* Reports in Math. Phys. 5, 1974, pp 121–130

[28] E. MEINRENKEN – *On Riemann-Roch formulas for multiplicities.* J. Amer. Math. Soc. 9, 1996, pp. 373–389.

[29] E. MEINRENKEN – *Symplectic surgery and the Spin^c-Dirac operator*, Advances in Math. 134, 1998, pp. 240–277.

[30] E. MEINRENKEN and R. SJAMAAR – *Singular reduction and quantization.* Topology, 38, 1999, pp. 699–762.

[31] D. MUMFORD – it Proof of the convexity theorem. Appendix to : Stratification of the null cone via the moment map, by L. Ness. Amer. J. Math. 106, 1984, pp. 1280–1329.

[32] D. MUMFORD,J .FOGARTY and F .KIRWAN – *Geometric invariant theory. 3d edition.* Springer, Berlin (1993)

[33] P.-E. PARADAN – *Localization of the Riemann-Roch character.* math.DG/9911024, à paraître dans *Journal of Functional Analysis.*

[6]: Spin^c quantization and the K-multiplicities of the discrete series, math.DG/0103222, Soumis. raître.

[34] P.-E. PARADAN – *Spin^c quantization and the K-multiplicities of the discrete series* math.DG/0103222, à paraître.

[35] R. SJAMAAR – *Holomorphic slices, symplectic reduction and multiplicities of group representations.* Annals of Mathematics, 1995, 141, pp 87–129.

[36] R. SJAMAAR – *Symplectic reduction and Riemann-Roch formulas for multiplicities.* American Mathematical society Bulletin, 1996, 33, pp 327–338.

[37] R. SJAMAAR and E. LERMAN – *Stratified symplectic spaces and reduction.* Annals of Mathematics, 1991, 134, pp 375–422.

[38] C. TELEMAN – *The quantization conjecture revisited.* Ann. of Math. 152, 2000, pp 1-43.

[39] Y. TIAN and W. ZHANG – *An analytic proof of the geometric quantization conjecture of Guillemin-Sternberg.* Invent. Math. **132**, 1998, p. 229–259.

[40] Y. TIAN and W. ZHANG – *Quantization formula for singular reduction.* prépublication dg-ga/9706010

[41] Y. TIAN and W. ZHANG – *Symplectic reduction and a weighted multiplicity formula for twisted Spin$_{\mathbb{C}}$-Dirac operators.* Asian Journal of Mathematics 2, 1998, pp 591–608.

[42] Y. TIAN and W. ZHANG – *Holomorphic Morse inequalities in symplectic reduction.* Math. Res. Lett 5, 1998, pp. 345–352.

[43] Y. TIAN and W. ZHANG – *Quantization formula for symplectic manifolds with boundary.* Geom. funct. anal 9, 1999, pp. 596–640.

[44] M. VERGNE – *Equivariant index formulas for orbifolds.* Duke Math. Journal, 82, 1996, pp 637–652.

[45] M. VERGNE – *Multiplicities formulas for geometric quantization. part I and II* Duke Math. Journal 82, 1996, pp 143–179, 181–194

[46] E. WITTEN – *Two dimensional gauge theories revisited.* J. Geom. Phys. 9, 1992, pp 303–368

[47] C. WOODWARD – *The classification of transversal multiplicity-free group actions.* Annals of Global Analysis and Geometry, 1996, 14, pp 3–42.

[48] S. WU –*A note on higher cohomology groups of Kähler quotients.* Annals of Global Analysis and Geometry, 2000, 18, pp 569–576.

[49] W. ZHANG–*Holomorphic quantization formula in singular reduction.* Commun. Contemp. Math. 1, 1999, pp. 281-293.

[50] W. ZHANG–*Symplectic reduction and Family quantization.* International Mathematics Research Notices, 19, 1999, pp 1043-1056.

Michèle VERGNE

École Polytechnique
Département de Mathématiques
F-91128 Palaiseau Cedex
E-mail : `vergne@math.polytechnique.fr`