В. В. ПРАСОЛОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ

2004

П70

Прасолов В. В.

П70 Элементы теории гомологий.

Эта книга является непосредственным продолжением книги «Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии». Она начинается с определения симплициальных гомологий и когомологий; приводятся многочисленные примеры их вычисления и их приложений. Затем обсуждается умножение Колмогорова–Александера на когомологиях. Значительная часть книги посвящена различным приложениям (симплициальных) гомологий и когомологий. Многие из них связаны с теорией препятствий. Одним из таких примеров служат характеристические классы векторных расслоений. Сингулярные гомологии и когомологии определяются во второй половине книги. Затем рассматривается ещё один подход к построению теории когомологий — когомологии Чеха и тесно связанные с ними когомологии де Рама. Книга завершается различными приложениями теории гомологий в топологии многообразий. В книге приведено много задач (с решениями) и упражнений для самостоятельного решения.

Для студентов старших курсов и аспирантов математических и физических специальностей; для научных работников.

Оглавление

Предисловие

Эта книга является непосредственным продолжением книги «Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии».

В главе I определяются симплициальные гомологии и когомологии, и приводятся многочисленные примеры их вычисления и их приложений. Это расходится с тем, что обычно делается в современных курсах алгебраической топологии: в них, как правило, сразу вводятся сингулярные гомологии. Но аккуратные доказательства свойств сингулярных гомологий весьма громоздки. Кроме того, при вычислениях, как правило, приходится обращаться к симплициальным гомологиям. Поэтому у нас сингулярные гомологии появляются уже ближе к концу книги и используются лишь там, где они действительно необходимы, прежде всего для топологических многообразий.

Гомологии и когомологии с произвольными коэффициентами выражаются через гомологии с целыми коэффициентами с помощью функторов Tor и Ext. Свойства этих функторов весьма важны для теории гомологий, поэтому они подробно обсуждаются.

Теорема двойственности Пуанкаре сначала доказывается для симплициальных (ко)гомологий. Это доказательство годится только для гладких многообразий (точнее говоря, для триангулируемых многообразий). Для топологических многообразий нет теоремы о триангулируемости, поэтому доказательство теоремы двойственности Пуанкаре для них по необходимости использует сингулярные (ко)гомологии. В связи с этим оно весьма громоздко.

В главе II рассматривается важная алгебраическая структура на когомологиях — умножение Колмогорова–Александера. Особенно много полезной информации это умножение даёт в случае многообразий. С помощью умножения в когомологиях строятся такие топологические инварианты многообразий, как форма пересечения и сигнатура многообразия.

Один из возможных подходов к построению умножения в когомологиях основан на теореме Кюннета, выражающей (ко)гомологии пространства $X \times Y$ через (ко)гомологии пространств X и Y. Эта теорема имеет и самостоятельный интерес.

Глава III посвящена различным приложениям (симплициальных) гомологий и когомологий. Многие из этих приложений связаны с теорией препятствий. Одно из таких приложений — построение характеристических классов векторных расслоений. Обсуждаются также и другие подходы к построению характеристических классов — через универсальное расслоение, аксиоматический подход. Затем рассматриваются (ко)гомологические свойства пространств, на которых действуют группы: строятся трансфер и точная последовательность Смита. Завершается глава построением квадратов Стинрода, обобщающих операцию умножения в когомологиях.

В главе IV определяются сингулярные когомологии и приводятся некоторые их приложения. В частности, доказываются некоторые свойства характеристических классов, связанные с изоморфизмом Тома.

В главе V рассматривается ещё один подход к построению теории когомологий — когомологии Чеха и тесно связанные с ними когомологии де Рама. Для когомологий де Рама доказывается теорема двойственности Пуанкаре. Затем конструкция де Рама, изначально введённая для гладких многообразий, переносится на произвольные симплициальные комплексы.

Заключительная глава VI посвящена некоторым приложениям теории гомологий в топологии многообразий. Сначала подробно обсуждается полином Александера, который строится с помощью гомологий циклического накрытия; обсуждается также инвариант Арфа. Затем доказывается сильная теорема Уитни о вложениях. Приводится формула для вычисления классов Чженя полных пересечений. Обсуждаются некоторые гомологические свойства групп Ли и H-пространств.

В книге приведено много задач (с решениями) и упражнений для самостоятельного решения.

Некоторые обозначения

$H_k(X;G)$ — k-мерные гомологии X с коэффициентами G;
$H^k(X;G)$ — k-мерные когомологии X с коэффициентами G;
$\mathrm{Hom}(A,B)$ — группа гомоморфизмов $A \to B$;
$A \otimes B$ — тензорное произведение абелевых групп A и B;
$\mathrm{Tor}(A,B)$ — см. с. 40;
$\mathrm{Ext}(A,B)$ — см. с. 40;
$\mathrm{Coker}\,\alpha$ — коядро гомоморфизма α (см. с. 1.3.1);
$[M^n]$ — фундаментальный класс многообразия M^n;
$\chi(X)$ — эйлерова характеристика X;
$\Lambda(f)$ — число Лефшеца отображения f;
$\sigma(M^{4n})$ — сигнатура многообразия M^{4n};
$w_k(\xi)$ — k-й класс Штифеля–Уитни расслоения ξ;
$c_k(\xi)$ — k-й класс Чженя расслоения ξ;
$p_k(\xi)$ — k-й класс Понтрягина расслоения ξ;
Sq^i — квадрат Стинрода;

Глава 1.

Симплициальные гомологии

1.1. Определение и некоторые свойства

Группы гомологий топологического пространства X можно определить разными способами, причём эти определения эквивалентны только для достаточно хороших пространств. С точки зрения наглядности наиболее просто выглядит определение симплициальных гомологий. Но у этого определения есть существенный недостаток: оно не инвариантно, точнее говоря, доказательство его инвариантности требует определённых усилий. (Под инвариантностью здесь подразумевается изоморфность групп гомологий гомеоморфных пространств.) Но основные идеи теории гомологий лучше всего выявляются на уровне симплициальных гомологий, поэтому мы начнём с подробного обсуждения симплициальных гомологий.

1.1.1. Определение групп гомологий

Пусть K — симплициальный комплекс. Мы будем предполагать, что все его симплексы ориентированы, т.е. для каждого симплекса фиксирован порядок его вершин (никакой согласованности ориентаций разных симплексов не предполагается). Симплексы $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ и $[a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}]$ считаются одинаково ориентированными, если $\operatorname{sgn} \sigma = 1$, а если $\operatorname{sgn} \sigma = -1$, то эти симплексы считаются противоположно ориентированными.

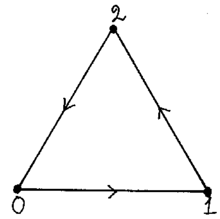

Рис. 1.1. Граница симплекса

Определим *границу* симплекса следующим образом:

$$\partial[0,\,1,\dots,n]=\sum(-1)^i[0,\dots,\hat{\imath},\dots,n],$$

где $[0,\dots,\hat{\imath},\dots,n]=[0,\dots,i-1,\,i+1,\dots,n]$. Здесь мы начинаем рассматривать формальные суммы симплексов. При этом предполагается, что одинаково ориентированные симплексы (с одними и теми же вершинами) не различаются, а сумма двух противоположно ориентированных симплексов равна 0. Поэтому противоположно ориентированные симплексы можно обозначать Δ и $-\Delta$.

Симплекс $[a,b]$ удобно обозначать стрелкой с началом a и концом b. При таких обозначениях граница симплекса $[0,1,2]$ выглядит так, как показано на рис. 1.1; это вполне согласуется с интуитивным представлением о границе.

Важнейшее значение для теории гомологий имеет следующее утверждение.

Теорема 1.1.1. $\partial\partial\Delta=0$.

Доказательство. Пусть $i<j$. Симплекс $[\dots\hat{\jmath}\dots\hat{\imath}\dots]$ встречается в выражении $\partial\partial[0,\dots,n]$ дважды: он входит в $(-1)^i\partial[\dots\hat{\imath}\dots]$ со знаком $(-1)^{i+j}$ и в $(-1)^j\partial[\dots\hat{\jmath}\dots]$ со знаком $(-1)^{i+j-1}$; эти знаки противоположны. □

Можно рассматривать не только линейные комбинации симплексов с целыми коэффициентами, но и конечные[1] суммы вида $\sum a_i\Delta_i^k$, где a_i — элемент некоторой фиксированной абелевой группы G, Δ_i^k — симплекс размерности k. Выражение $\sum a_i\Delta_i^k$ называют k-мерной *цепью* (с

[1] Для бесконечных сумм мы не смогли бы определить гомоморфизм ∂ в том случае, когда один и тот же симплекс является гранью бесконечного множества симплексов.

коэффициентами в группе G). Цепи можно покомпонентно складывать, поэтому они образуют абелеву группу. Группу k-мерных цепей обозначают $C_k(K;G)$. Для краткости эту группу мы часто будем обозначать $C_k(K)$ или даже просто C_k.

Отображение ∂ мы определили для симплексов. Это отображение можно продолжить по линейности и получить отображение $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$, которое мы будем называть *граничным гомоморфизмом*. Для 0-мерного симплекса Δ^0 полагаем $\partial_0\Delta^0 = 0$.

Цепь $c \in C_k$ называют *циклом*, если $\partial_k c = 0$, т.е. $c \in \operatorname{Ker}\partial_k = Z_k$. Цепь $c \in C_k$ называют *границей*, если $c = \partial_{k+1}c'$ для некоторой цепи $c' \in C_{k+1}$, т.е. $c \in \operatorname{Im}\partial_{k+1} = B_k$. Из равенства $\partial\partial = 0$ следует, что $B_k \subset Z_k$, поэтому можно рассмотреть группу $H_k(K) = Z_k/B_k$. Элементами этой группы служат классы эквивалентности циклов: циклы считаются эквивалентными, если их разность является границей; такие циклы называют *гомологичными*. Группу $H_k(K)$ называют группой k-мерных *симплициальных гомологий* комплекса K. Если нужно упомянуть группу коэффициентов, то используют обозначение $H_k(K;G)$.

Замечание. Впервые «гомологические числа» появились в работах Римана (1857) и Бетти (1871). Правильное определение было дано Пуанкаре. Он осознал, что при определении цепей симплексы нужно учитывать не просто как геометрические фигуры, а с учётом их кратностей. Первоначально группы гомологий (с коэффициентами $\mathbb{Z}$) описывались посредством задания их рангов (*числа Бетти*) и чисел кручения. В короткой заметке [N] Эмми Нётер в 1926 г. сделала важное наблюдение, что гомологии можно рассматривать как группы.

Непосредственно из определения видно, что если симплициальный комплекс K не содержит симплексов размерности k, то $H_k(K) = 0$.

Вычислим теперь группы гомологий для некоторых симплициальных комплексов. В дальнейшем будет показано, что группа $H_k(K)$ зависит только от топологического пространства $|K|$ и не зависит от его триангуляции. Поэтому мы будем использовать обозначения вида $H_k(S^n)$, подразумевая при этом конкретную триангуляцию сферы S^n.

Пример 1.1.1. *Если K состоит из n изолированных точек, то*

$$H_0(K;G) = \underbrace{G \oplus \ldots \oplus G}_{n} \text{ и } H_k(K;G) = 0 \text{ при } k \geqslant 1.$$

Доказательство. Ясно, что в рассматриваемой ситуации $C_0 = G \oplus \ldots \oplus G$, $C_k = 0$ при $k \geqslant 1$, $Z_0 = C_0$ и $B_0 = 0$. □

Пример 1.1.2. $H_0(S^1;G) = H_1(S^1;G) = G$.

Доказательство. Ясно, что $B_1 = 0$, поэтому $H_1 = Z_1$. Пусть

$$c = a_0[1,\, 2] + a_1[2,\, 0] + a_2[0,\, 1] \in C_1.$$

Тогда

$$\partial c = (a_1 - a_2)[0] + (a_2 - a_0)[1] + (a_0 - a_1)[2].$$

Поэтому Z_1 состоит из цепей вида $a[1,\, 2] + a[2,\, 0] + a[0,\, 1]$, $a \in G$.

Равенства $\partial(a[1,\, 2] + a[2,\, 0]) = a[0] - a[1]$ и $\partial(a[2,\, 1] + a[1,\, 0]) = = a[0] - a[2]$ показывают, что с точностью до границы любая 0-мерная цепь имеет вид $a[0]$. С другой стороны, если

$$a[0] = \partial c = (a_1 - a_2)[0] + (a_2 - a_0)[1] + (a_0 - a_1)[2],$$

то $a_2 = a_0$ и $a_0 = a_1$, поэтому $a = a_1 - a_2 = 0$. Таким образом, группа $H_0(S^1; G) = C_0/B_0$ изоморфна G. □

Рассуждения, которыми мы воспользовались при вычислении $H_0(S^1)$, можно перенести на произвольный связный симплициальный комплекс.

Теорема 1.1.2. *Пусть K — связный симплициальный комплекс. Тогда $H_0(K; G) = G$.*

Доказательство. Вершины $[0]$ и $[n]$ можно соединить 1-симплексами $[0,\, i_1]$, $[i_1, i_2]$, $\ldots$, $[i_k, n]$, поэтому

$$a[n] - a[0] = \partial(a[0,\, i_1] + a[i_1, i_2]) + \ldots + a[i_k, n]).$$

Это означает, что с точностью до границы любая 0-мерная цепь имеет вид $a[0]$. Остаётся проверить, что если цепь $a[0]$ является границей, то $a = 0$.

Предположим, что

$$a[0] = \partial\left(\sum_\alpha a_\alpha[i_\alpha, j_\alpha]\right) = \sum_\alpha a_\alpha[j_\alpha] - \sum_\alpha a_\alpha[i_\alpha].$$

В правой части сумма коэффициентов равна нулю. Кроме того, сумма коэффициентов при $[n]$, где $n \neq 0$, тоже равна нулю. Следовательно, сумма коэффициентов при $[0]$ тоже равна нулю, т.е. $a = 0$. □

Упражнение. *Представим S^2 как границу симплекса* $[0123]$. *Докажите, что* $\operatorname{Ker}\partial_2$ *состоит из цепей вида* $a\partial[0123]$, *а* $\operatorname{Ker}\partial_1 = \operatorname{Im}\partial_2$.

1.1.2. Цепные комплексы

Цепным комплексом называют семейство абелевых групп C_k и гомоморфизмов $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$, удовлетворяющих соотношениям $\partial_k \partial_{k+1} = 0$. Если $C_k = 0$ при $k < 0$, то цепной комплекс называют *неотрицательным*, а если все группы C_k свободные — то *свободным*.

Для любого цепного комплекса C_* можно рассмотреть *группы гомологий* $H_k(C_*) = \operatorname{Ker} \partial_k / \operatorname{Im} \partial_{k+1}$.

Цепным отображением цепных комплексов C_* и C'_* называют семейство гомоморфизмов $\varphi_k : C_k \to C'_k$, удовлетворяющих соотношениям $\partial'_k \varphi_k = \varphi_{k-1} \partial_k$. Цепное отображение $\varphi_k : C_k \to C'_k$ индуцирует семейство гомоморфизмов $\varphi_* : H_k(C_*) \to H_k(C'_*)$. При этом $(\varphi\psi)_* = \varphi_* \psi_*$.

Симплициальное отображение $f : K \to L$ индуцирует цепное отображение $f_k : C_k(K) \to C_k(L)$, которое определяется следующим образом:

$$f_k([a_0, \dots, a_k]) = \\ = \begin{cases} [f(a_0), \dots, f(a_k)], & \text{если } f(a_i) \neq f(a_j) \text{ при } i \neq j; \\ 0, & \text{если } f(a_i) = f(a_j) \text{ для некоторого } i \neq j. \end{cases}$$

Проверка соотношений $\partial'_k f_k = f_{k-1} \partial_k$ очевидна в тех случаях, когда размерность симплекса с вершинами $f(a_0), \dots, f(a_k)$ равна k или меньше $k-1$ (в последнем случае обе части равенства обращаются в нуль). Рассмотрим теперь случай, когда $f(a_0) = f(a_1)$, а точки $f(a_1), \dots, f(a_k)$ различны. В таком случае $f_k([a_0, \dots, a_k]) = 0$ и

$$f_{k-1}(\partial[a_0, \dots, a_k]) = [f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_k)] - [f(a_0), f(a_2), \dots, f(a_k)] = 0,$$

поскольку $f(a_0) = f(a_1)$.

Таким образом, любое симплициальное отображение $f : K \to L$ индуцирует гомоморфизм $f_* : H_k(K) \to H_k(L)$; при этом тождественное отображение индуцирует тождественный гомоморфизм и $(fg)_* = f_* g_*$.

Если для симплициальных отображений $f, g : K \to L$ существует семейство гомоморфизмов $D_k : C_k(K) \to C_{k+1}(L)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\partial_{k+1} D_k + D_{k-1} \partial_k = g_k - f_k,$$

то такое семейство D называют *цепной гомотопией*, связывающей f и g.

Теорема 1.1.3 (о цепной гомотопии). *Если симплициальные отображения $f, g : K \to L$ цепно гомотопны, то $f_* = g_*$.*

Доказательство. Пусть $z_k \in C_k(K)$ и $\partial_k z_k = 0$. Тогда
$$g_k(z_k) - f_k(z_k) = \partial_{k+1} D_k z_k + D_{k-1}\partial_k z_k = \partial_{k+1}(D_k z_k),$$
т.е. циклы $g_k(z_k)$ и $f_k(z_k)$ гомологичны. □

1.1.3. Гомологии симплекса и его границы

Теорема 1.1.4. *$H_k(\Delta^n) = 0$ при $k \geqslant 1$.*

Доказательство. Мы воспользуемся тем, что $\Delta^n = [b, a_1, \ldots, a_n]$ — конус над $\Delta^{n-1} = [a_1, \ldots, a_n]$. Каждому симплексу $[a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}]$ можно сопоставить симплекс $[b, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}]$. Продолжив это отображение по линейности, получим гомоморфизм $C_{k-1}(\Delta^{n-1}) \to C_k(\Delta^n)$; образ c_{k-1} будем обозначать $[b, c_{k-1}]$. Легко проверить, что $\partial[b, c_k] = c_k - [b, \partial c_k]$ при $k \geqslant 1$ и $\partial[b, c_0] = c_0 - \varepsilon(c_0)b$, где $\varepsilon(\sum n_p a_{i_p}) = \sum n_p$.

Любую цепь $z_k \in C_k(\Delta^n)$ можно единственным образом представить в виде $z_k = c_k + [b, d_{k-1}]$, где $c_k \in C_k(\Delta^{n-1})$ и $d_{k-1} \in C_{k-1}(\Delta^{n-1})$. Предположим, что $\partial z_k = 0$. Тогда $\partial c_k + d_{k-1} - [b, \partial d_{k-1}] = 0$ при $k > 1$ и $\partial c_1 + d_0 - \varepsilon(d_0)b = 0$ при $k = 1$. В обоих случаях $\partial c_k + d_{k-1} = 0$, а значит,
$$\partial[b, c_k] = c_k - [b, \partial c_k] = c_k + [b, d_{k-1}] = z_k,$$
т.е. любой цикл $z_k \in C_k(\Delta^n)$, $k \geqslant 1$, является границей. □

Следствие. *Пусть $\partial\Delta^n$ — симплициальный комплекс, который состоит из всех симплексов, входящих в Δ^n, за исключением самого симплекса Δ^n. Тогда $H_{n-1}(\partial\Delta^n) = G$ (при $n \geqslant 2$) и $H_k(\partial\Delta^n) = 0$ при $0 < k < n - 1$.*

Доказательство. Вплоть до размерности $n - 1$ гомологии у $\partial\Delta^n$ такие же, как у Δ^n. Симплексов размерности n у $\partial\Delta^n$ нет, поэтому $\operatorname{Im}\partial_n = 0$, а значит, $H_{n-1}(\partial\Delta^n) = \operatorname{Ker}\partial_{n-1}$. Но $H_n(\Delta^n) = 0$, поэтому $\operatorname{Ker}\partial_{n-1} = \operatorname{Im}\partial'_n$, где ∂'_n — дифференциал в цепном комплексе для Δ^n. Если $\Delta^n = [0, 1, \ldots, n]$, то $\operatorname{Im}\partial'_n$ состоит из элементов вида $a\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i [0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n]\right)$, $a \in G$. □

1.2. Инвариантность гомологий

Сначала мы докажем теорему об ацикличных носителях, которая часто позволяет доказать, что два цепных отображения цепно гомотопны. Затем этой теоремой мы дважды воспользуемся в разных ситуациях при доказательстве топологической инвариантности гомологий.

Наконец, с помощью той же теоремы мы докажем гомотопическую инвариантность гомологий.

1.2.1. Ацикличные носители

Симплициальный комплекс называют *ацикличным*, если его группы гомологий такие же, как у одной точки. Например, конус над любым симплициальным комплексом ацикличен; это доказывается точно так же, как то, что симплекс ацикличен (теорема 1.1.4 на с. 15; при доказательстве этой теоремы мы пользовались только представлением симплекса в виде конуса).

Носителем цепи $c_k = \sum a_k \Delta_i^k \in C_k(L)$ будем называть любой подкомплекс $L' \subset L$, содержащий все симплексы Δ_i^k.

Будем говорить, что цепное отображение φ *сохраняет аугментацию*[1], если $\varphi_0(\sum a_i \Delta_i^0) = \sum b_j \Delta_j^0$, где $\sum a_i = \sum b_j$.

Теорема 1.2.1 (об ацикличных носителях). *Пусть $\varphi_k, \psi_k : C_k(K) \to C_k(L)$ — цепные отображения, сохраняющие аугментацию. Предположим, что любому симплексу $\Delta \subset K$ сопоставлен комплекс $L(\Delta) \subset L$ так, что выполняются следующие свойства:*

- *если $\Delta' \subset \Delta$, то $L(\Delta') \subset L(\Delta)$;*
- *комплекс $L(\Delta)$ ацикличен;*
- *комплекс $L(\Delta^k)$ является носителем обеих цепей $\varphi_k(\Delta^k)$ и $\psi_k(\Delta^k)$.*

Предположим, далее, что группа коэффициентов G является аддитивной группой некоторого кольца с единицей (например, $G = \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_p$). Тогда отображения φ_k и ψ_k цепно гомотопны; в частности, $\varphi_* = \psi_*$.

Доказательство. Цепную гомотопию D_k будем строить индукцией по k. Рассмотрим сначала случай $k = 0$. Пусть Δ^0 — некоторая вершина комплекса K. Комплекс $L(\Delta^0)$ является носителем цепей $\varphi_0(\Delta^0)$ и $\psi_0(\Delta^0)$. Отображения φ_0 и ψ_0 сохраняют аугментацию, поэтому $(\varphi_0 - \psi_0)(a\Delta^0) = \sum b_i \Delta_i^0$, где $\sum b_i = 0$. В ацикличном комплексе $L(\Delta^0)$ цепь $\sum b_i \Delta_i^0$, где $\sum b_i = 0$, является границей некоторой цепи, поэтому $(\varphi_0 - \psi_0)(a\Delta^0) = \partial_1 D_0(a\Delta^0)$, где $D_0(a\Delta^0)$ — некоторая 1-мерная цепь с носителем $L(\Delta^0)$. Равенство $D_0(a\Delta^0) + D_0(b\Delta^0) = D_0((a+b)\Delta^0)$ при

[1] Происхождение такого названия объясняется на с. 28

этом может не выполняться. Чтобы добиться выполнения такого равенства, выберем в кольце G единицу 1, найдём 1-цепь $D_0(1 \cdot \Delta^0)$ и положим $D_0(a\Delta^0) = aD_0(1 \cdot \Delta^0)$. В дальнейшем цепь вида $1 \cdot \Delta$ будем обозначать просто Δ (отметим, что для произвольной группы коэффициентов G такое обозначение не имеет смысла).

Предположим, что требуемые гомоморфизмы $D_0, \ldots, D_{k-1}$ уже построены, причём $L(\Delta^i)$ является носителем цепи $D_i(\Delta^i)$. Гомоморфизм D_k должен обладать единственным свойством: для любого k-мерного симплекса Δ в K выполняется равенство $\partial_{k+1} D_k(\Delta) = c_k$, где $c_k = \varphi_k(\Delta) - \psi_k(\Delta) - D_{k-1}\partial_k(\Delta)$. Все симплексы $\partial_k(\Delta)$ содержатся в Δ, поэтому $L(\Delta)$ является носителем цепи $\partial_k(\Delta)$, а значит, $L(\Delta)$ является носителем цепи $D_{k-1}\partial_k(\Delta)$. Таким образом, $L(\Delta)$ — носитель цепи c_k и

$$\begin{aligned} \partial_k c_k &= (\partial_k \psi_k - \partial_k \varphi_k - \partial_k D_{k-1} \partial_k)(\Delta) = \\ &= \Big(\partial_k \psi_k - \partial_k \varphi_k - (\psi_{k-1}\partial_k - \varphi_{k-1}\partial_k - D_{k-2}\partial_{k-1}\partial_k)\Big)(\Delta) = 0. \end{aligned}$$

Мы рассматриваем случай $k \geqslant 1$. Из ацикличности комплекса $L(\Delta)$ следует, что $H_k(L(\Delta)) = 0$. Поэтому существует цепь $D_k(\Delta)$ с носителем $L(\Delta)$, для которой $\partial_{k+1} D_k(\Delta) = c_k$. □

1.2.2. Топологическая инвариантность гомологий

Здесь мы докажем, что любое непрерывное отображение симплициальных комплексов $f : |K| \to |L|$ индуцирует гомоморфизм $f_* : H_k(K) \to H_k(L)$. При этом $(fg)_* = f_* g_*$, что влечёт изоморфность групп гомологий гомеоморфных симплициальных комплексов. Чтобы определить гомоморфизм f_*, мы воспользуемся теоремой о симплициальной аппроксимации.

Мы будем применять теорему об ацикличных носителях, поэтому будем предполагать, что группа коэффициентов G является аддитивной группой некоторого кольца с единицей.

Теорема 1.2.2. *Пусть K' — барицентрическое подразделение симплициального комплекса K. Тогда группы гомологий $H_k(K')$ и $H_k(K)$ изоморфны.*

Доказательство. Определим сначала симплициальное отображение $j : K' \to K$ следующим образом. Если $K = \Delta^k = [0, 1, \ldots, k]$, то симплициальное отображение $K' \to K$ задаётся сопоставлением вершинам K' пометок $0, 1, \ldots, k$. Сопоставим вершине K', которая является барицентром симплекса $[i_0, \ldots, i_p]$, одну из пометок $i_0, \ldots, i_p$. Пример такого

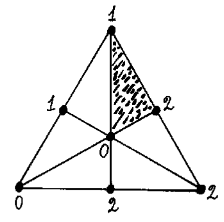

Рис. 1.2. Набор пометок

сопоставления приведён на рис. 1.2. Легко проверить, что ровно один k-мерный симплекс комплекса K' имеет полный набор пометок, причём этот симплекс ориентирован так же, как и симплекс K. Действительно, по нумерации вершин маленького симплекса можно восстановить нумерацию вершин большого симплекса: для этого нужно сначала рассмотреть их общую вершину, затем общее ребро (имеется в виду ребро маленького симплекса, лежащее на ребре большого), затем общую 2-мерную грань и т.д.

Для симплициальных комплексов общего вида отображение $j : K' \to K$ определяется аналогично. Отметим, что оно является симплициальной аппроксимацией тождественного отображения. Отображение j индуцирует цепное отображение $j_k : C_k(K') \to C_k(K)$.

Определим теперь цепное отображение $i_k : C_k(K) \to C_k(K')$; оно не индуцировано симплициальным отображением. Положим $i_0(v) = v$, $i_1[v_0, v_1] = [b, v_1] - [b, v_0]$, где b — барицентр $[v_0, v_1]$. Формально определение i_1 можно записать так: $i_1(\Delta^1) = [b,\, i_0\partial\Delta^1]$. Для $k > 1$ тоже положим $i_k(\Delta^k) = [b,\, i_{k-1}\partial\Delta^k]$, где b — барицентр Δ^k. Остаётся проверить, что отображение i_k цепное, т.е. $\partial_k i_k = i_{k-1}\partial_k$. Ясно, что

$$\partial_k i_k(\Delta^k) = \partial_k[b,\, i_{k-1}\partial_k\Delta^k] = i_{k-1}\partial_k(\Delta^k) - [b,\, \partial_{k-1}i_{k-1}\partial_k\Delta^k].$$

Поэтому если $\partial_{k-1}i_{k-1} = i_{k-2}\partial_{k-1}$, то $\partial_{k-1}i_{k-1}\partial_k = i_{k-2}\partial_{k-1}\partial_k = 0$ и $\partial_k i_k = i_{k-1}\partial_k$.

Отображение j устроено так, что один k-мерный симплекс барицентрического подразделения симплекса Δ^k отображается на Δ^k с сохранением ориентации, а все остальные k-мерные симплексы отображаются на симплексы размерности меньше k. Из этого следует, что отображение $j_k i_k$ тождественно, а отображение $i_k j_k$ устроено следующим образом: носителем цепи $i_k j_k(\Delta')$, где Δ' — симплекс в K', служит барицентрическое подразделение симплекса Δ в K, содержащего Δ'.

Барицентрическое подразделение симплекса Δ является конусом над $\partial\Delta$, поэтому барицентрическое подразделение симплекса — ацикличный симплициальный комплекс. Таким образом, у отображений $i_k j_k$ и $\mathrm{id}_{C_k(K')}$ есть общий ацикличный носитель. Ясно также, что отображение $i_0 j_0$ переводит вершину в вершину, поэтому оно сохраняет аугментацию. Поэтому отображение $i_k j_k$ цепно гомотопно тождественному.

Итак, индуцированные гомоморфизмы $j_* i_*$ и $i_* j_*$ — тождественные отображения. Поэтому группы $H_k(K')$ и $H_k(K)$ изоморфны. Отображение $i_* : H_k(K) \to H_k(K')$ имеет простой геометрический смысл на уровне цепей: симплексу сопоставляется сумма симплексов, на которые он разбивается при барицентрическом подразделении. Обратное отображение $j_* : H_k(K') \to H_k(K)$ канонически определено только на уровне гомологий. □

Замечание. Тождественность отображения $i_* j_*$ несложно доказать и без теоремы об ацикличных носителях. Дело в том, что в любой цикл все симплексы барицентрического подразделения симплекса Δ должны входить с одним и тем же коэффициентом, поэтому ограничение отображения $i_k j_k$ на Z_k тождественно.

Пусть $f : |K| \to |L|$ — непрерывное отображение симплициальных комплексов. Определим гомоморфизм $f_* : H_k(K) \to H_k(L)$ следующим образом. Пусть $\varphi : K^{(n)} \to L$ — симплициальная аппроксимация отображения f. Положим $f_* = \varphi_* i_*^{(n)}$, где $i_*^{(n)} : H_k(K) \to H_k(K^{(n)})$ — канонический изоморфизм. Нужно проверить, что это определение корректно, т.е. если $\psi : K^{(m)} \to L$ — другая симплициальная аппроксимация отображения f, то $\varphi_* i_*^{(n)} = \psi_* i_*^{(m)}$. Рассмотрим сначала случай $m = n$.

Теорема 1.2.3. *Пусть $\varphi, \psi : K \to L$ — симплициальные аппроксимации отображения $f : |K| \to |L|$. Тогда $\varphi_* = \psi_*$.*

Доказательство. Единственное свойство симплициальных отображений φ и ψ, которым мы будем пользоваться, заключается в следующем: «Пусть $a_0, \ldots, a_k$ — вершины некоторого симплекса в K. Тогда точки $\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_k)$, $\psi(a_0), \ldots, \psi(a_k)$ являются вершинами симплекса[1] в L.» Чтобы доказать это свойство, рассмотрим точку $x \in \mathrm{int}[a_0, \ldots, a_k]$. Для точки $f(x)$ однозначно определён симплекс $[b_0, \ldots, b_l]$ в L, внутренней точкой которого она является. Согласно определению симплициальной аппроксимации $\varphi(x), \psi(x) \in [b_0, \ldots, b_l]$. Поэтому из симплициальности отображений φ и ψ следует, что симплексы $\varphi([a_0, \ldots, a_k])$ и $\psi([a_0, \ldots, a_k])$ принадлежат $[b_0, \ldots, b_l]$.

[1] Размерность этого симплекса может быть равна $0, 1, \ldots, 2k+1$.

Отображения $\varphi_0, \psi_0 : C_0(K) \to C_0(L)$ сохраняют аугментацию. Поэтому согласно теореме об ацикличных носителях отображения φ_k и ψ_k цепно гомотопны. □

Докажем теперь равенство $\varphi_* i_*^{(n)} = \psi_* i_*^{(m)}$ для $n \neq m$. Пусть для определённости $n > m$. В качестве исходного комплекса вместо K можно взять $K^{(m)}$ и рассмотреть его p-е барицентрическое подразделение, где $p = n - m$. Тогда требуемое равенство примет вид $\varphi_* i_*^{(p)} = \psi_*$.

При доказательстве теоремы 1.2.2 было построено отображение $j : K^{(1)} \to K$, являющееся симплициальной аппроксимацией тождественного отображения. Напомним, что композиция симплициальных аппроксимаций является симплициальной аппроксимацией композиции (часть I, следствие теоремы???). Поэтому для тождественного отображения существует симплициальная аппроксимация $j^{(p)} : K^{(p)} \to K$; при этом отображения $j_*^{(p)}$ и $i_*^{(p)}$ взаимно обратны. Отображение $\psi j^{(p)}$ является симплициальной аппроксимацией отображения f, поэтому $\varphi_* = \psi_* j^{(p)}$, т.е. $\varphi_* i^{(p)} = \psi_*$.

Теорема 1.2.4. *Пусть $f : |K| \to |L|$ и $g : |L| \to |M|$ — непрерывные отображения. Тогда $(gf)_* = g_* f_*$.*

Доказательство. Построим сначала симплициальную аппроксимацию $\psi : L' \to M$ отображения g, а затем симплициальную аппроксимацию $\varphi : K' \to L'$ отображения f. Пусть $j^K : K' \to K$ и $j^L : L' \to L$ — симплициальные аппроксимации тождественных отображений. Эти отображения образуют следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
|K| & \xrightarrow{f} & |L| & \xrightarrow{g} & |M| \\
\uparrow{\scriptstyle j^K} & & \uparrow{\scriptstyle j^L} & & \\
|K'| & \xrightarrow{\varphi} & |L'| & \xrightarrow{\psi} & |M|
\end{array}$$

Отображение $\psi\varphi$ является симплициальной аппроксимацией отображения gf, поэтому

$$(gf)_* = (\psi\varphi)_* (j_*^K)^{-1} = \psi_* \varphi_* (j_*^K)^{-1}.$$

Отображения $j^L\varphi$ и ψ являются симплициальными аппроксимациями отображений f и g, поэтому $f_* = j_*^L \varphi_* (j_*^K)^{-1}$ и $g_* = \psi_* (j_*^L)^{-1}$. Равенство $(gf)_* = g_* f_*$ теперь легко проверяется. □

Следствие. *Если симплициальные комплексы K и L гомеоморфны, то их группы гомологий изоморфны.*

Доказательство. Пусть $f : |K| \to |L|$ и $g : |L| \to |M|$ — взаимно обратные непрерывные отображения. Тогда отображения f_* и g_* взаимно обратны. □

В качестве приложения топологической инвариантности гомологий приведём ещё одно доказательство неретрагируемости шара на границу.

Теорема 1.2.5. *Не существует непрерывного отображения $r : D^n \to S^{n-1} = \partial D^n$, для которого $r(x) = x$ при всех $x \in S^{n-1}$.*

Доказательство. Предположим, что $r : D^n \to S^{n-1}$ — непрерывное отображение, для которого $r|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$. Рассмотрим вложение $i : S^{n-1} \to D^n$. Композиция ri является тождественным отображением, поэтому $r_* i_* : H_{n-1}(S^{n-1}, \mathbb{Z}) \to H_{n-1}(S^{n-1}, \mathbb{Z})$ — тождественное отображение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (или $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ при $n = 1$). С другой стороны, образ отображения $i_* : H_{n-1}(S^{n-1}, \mathbb{Z}) \to H_{n-1}(D^n, \mathbb{Z})$ нулевой (или лежит в $\mathbb{Z}$ при $n = 1$), поскольку $H_{n-1}(D^n, \mathbb{Z}) = 0$ при $n \geqslant 2$ и $H_0(D^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. □

1.2.3. Гомотопическая инвариантность гомологий

Теорема 1.2.6. *Гомотопные отображения симплициальных комплексов индуцируют одинаковые отображения гомологий.*

Доказательство. Пусть $f_0, f_1 : |K| \to |L|$ — гомотопные симплициальные отображения симплициальных комплексов K и L. Это означает, что существует непрерывное отображение $F : |K| \times I \to |L|$, для которого $F|_{|K|\times\{0\}} = f_0$ и $F|_{|K|\times\{1\}} = f_1$. Прямое произведение $|K| \times I$ можно превратить в симплициальный комплекс, причём даже так, что $|K| \times \{0\}$ и $|K| \times \{1\}$ будут снабжены той же самой симплициальной структурой, а кроме того, для любого симплекса Δ в K множество $\Delta \times I$ будет подкомплексом в $|K| \times I$ (см. часть I, с.???). Рассмотрим вложения $i_0 : K \to |K| \times \{0\} \subset |K| \times I$ и $i_1 : K \to |K| \times \{1\} \subset |K| \times I$. Ясно, что $f_0 = Fi_0$ и $f_1 = Fi_1$. Поэтому достаточно проверить, что $i_{0*} = i_{1*}$ (здесь мы пользуемся тем, что $f_{0*} = F_* i_{0*}$ и $f_{1*} = F_* i_{1*}$).

Пусть Δ^k — симплекс в K. Цепи $i_0(\Delta^k)$ и $i_1(\Delta^k)$ имеют общий носитель $\Delta^k \times I$. Этот носитель ацикличный, поскольку он гомеоморфен $D^{k+1} \approx \Delta^{k+1}$. □

Следствие. *Если симплициальные комплексы K и L гомотопически эквивалентны, то их группы гомологий изоморфны.*

В качестве приложения гомотопической инвариантности гомологий приведём ещё одно доказательство инвариантности размерности.

Теорема 1.2.7. *Если $n \neq m$, то пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ не гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть для определённости $n > m \geqslant 1$; в частности, $n \geqslant 2$. Предположим, что пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ гомеоморфны. Тогда пространства $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$ и $\mathbb{R}^m \setminus \{0\} \sim S^{m-1}$ тоже гомеоморфны, а значит, они гомотопически эквивалентны. Следовательно, $\mathbb{Z} = H_{n-1}(S^{n-1}, \mathbb{Z}) = H_{n-1}(S^{m-1}, \mathbb{Z})$ и $n - 1 > 0$. Поэтому $m = n$; приходим к противоречию. □

1.3. Относительные гомологии

Пусть K — симплициальный комплекс, $L \subset K$ — его подкомплекс. Тогда $C_k(L) \subset C_k(K)$, поэтому можно рассмотреть факторгруппу $C_k(K, L) = C_k(K)/C_k(L)$; элементы этой группы называют *относительными k-мерными цепями.* Гомоморфизм $\partial_k : C_k(K) \to C_{k-1}(K)$ индуцирует гомоморфизм $\partial_k : C_k(K, L) \to C_{k-1}(K, L)$, для которого тоже выполняется свойство $\partial\partial = 0$. Поэтому снова можно взять группы $Z_k(K, L) = \operatorname{Ker} \partial_k$ и $B_k(K, L) = \operatorname{Im} \partial_{k+1}$ и рассмотреть факторгруппу $H_k(K, L) = Z_k/B_k$, которую называют группой k-мерных *относительных гомологий.*

Пример 1.3.1. *Если каждая компонента линейной связности пространства K содержит хотя бы одну точку пространства L, то $H_0(K, L) = 0$.*

Доказательство. Соединим вершину $x \in K$ ломаной α, идущей по рёбрам, с некоторой вершиной $y \in L$. Тогда $\partial_1 \alpha = [x] - [y] \sim [x]$, поэтому $B_0 \supset Z_0$. □

Упражнение. *Докажите, что $H_0(K, L; G) = \underbrace{G \oplus \ldots \oplus G}_{n}$, где n — количество компонент линейной связности пространства K, не содержащих точек пространства L.*

Отображение симплициальных пар $f : (K, L) \to (K', L')$ индуцирует гомоморфизм относительных гомологий $f_* : H_*(K, L) \to H_*(K', L')$

следующим образом. Сначала возьмём отображение $C_k(K)/C_k(L) \to$ $\to C_k(K')/fC_k(L)$, а затем, пользуясь тем, что $fC_k(L) \subset C_k(L')$, применим каноническую проекцию

$$C_k(K')/fC_k(L) \to \big(C_k(K')/fC_k(L)\big)/\big(C_k(L')/fC_k(L)\big) \cong C_k(K')/C_k(L).$$

В результате получим цепное отображение $f_\# : C_*(K,L) \to C_*(K',L')$. Оно индуцирует гомоморфизм гомологий.

1.3.1. Точная гомологическая последовательность пары

Включение $i : L \to K$ индуцирует гомоморфизм $i_* : H_k(L) \to H_k(K)$. Кроме того, любой абсолютный цикл можно рассматривать как относительный, поэтому возникает гомоморфизм $p_* : H_k(K) \to H_k(K,L)$. Построим теперь *связывающий* гомоморфизм $\partial_* : H_k(K,L) \to H_{k-1}(L)$. Пусть $z_k \in C_k(K,L)$ — относительный цикл, $\tilde{z}_k$ — его абсолютный представитель, т.е. $\tilde{z}_k \in C_k(K)$ и $z_k = \tilde{z}_k + C_k(L)$. По условию $\partial_k z_k = 0$, т.е. $\partial_k \tilde{z}_k \in C_{k-1}(L)$. Формула $z_k \mapsto \partial_k \tilde{z}_k$ задаёт корректно определённое отображение $\partial_* : H_k(K,L) \to H_{k-1}(L)$, поскольку если $y_k \in C_k(L)$, то $\partial_k(\tilde{z}_k + y_k) = \partial_k \tilde{z}_k + \partial_k y_k \sim \partial_k \tilde{z}_k$.

Теорема 1.3.1. *Последовательность гомоморфизмов*

$$\ldots \longrightarrow H_k(L) \xrightarrow{i_*} H_k(K) \xrightarrow{p_*} H_k(K,L) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(L) \longrightarrow \ldots$$

является точной.

Доказательство. 1) $\operatorname{Im} i_* \subset \operatorname{Ker} p_*$. Любому абсолютному циклу $\tilde{z}_k \in C_k(L)$ соответствует нулевой относительный цикл.

2) $\operatorname{Ker} p_* \subset \operatorname{Im} i_*$. Пусть абсолютному циклу $\tilde{z}_k \in C_k(K)$ соответствует гомологичный нулю относительный цикл. Тогда $\tilde{z}_k = \tilde{z}'_k + \tilde{z}''_k$, где $\tilde{z}'_k \in C_k(L)$ и $\tilde{z}''_k = \partial \tilde{z}_{k+1}$, $\tilde{z}_{k+1} \in C_{k+1}(K)$. Поэтому цикл $\tilde{z}_k$ гомологичен циклу $\tilde{z}'_k \in C_k(L)$.

3) $\operatorname{Im} p_* \subset \operatorname{Ker} \partial_*$. Пусть $\tilde{z}_k \in Z_k(K)$ и $z_k = \tilde{z}_k + C_k(L)$. Тогда $z_k \mapsto \partial_k \tilde{z}_k = 0$.

4) $\operatorname{Ker} \partial_* \subset \operatorname{Im} p_*$. Пусть $z_k = \tilde{z}_k + C_k(L)$ и $\partial_k \tilde{z}_k = 0$. Тогда в качестве представителя относительного цикла z_k можно взять абсолютный цикл $\tilde{z}_k$.

5) $\operatorname{Im} \partial_* \subset \operatorname{Ker} i_*$. Пусть $\tilde{z}_{k-1} = \partial_k \tilde{z}_k \in C_{k-1}(L)$. Тогда цикл $\tilde{z}_{k-1}$ гомологичен нулю в K.

6) $\operatorname{Ker} i_* \subset \operatorname{Im} \partial_*$. Пусть $\tilde{z}_{k-1} \in C_{k-1}(L)$ и $\tilde{z}_{k-1} = \partial_k \tilde{z}_k$, где $\tilde{z}_k \in C_k(K)$. Тогда $\tilde{z}_{k-1} = \partial_*(\tilde{z}_k + C_k(L))$. $\square$

Относительные гомологии можно выразить через абсолютные, а именно, при $k \geqslant 2$

$$H_k(K, L) \cong H_k(K \cup CL, CL) \cong H_k(K \cup CL),$$

где CL — конус над L. Первый изоморфизм очевиден уже на уровне относительных коцепей. Второй изоморфизм вытекает из точной последовательности пары:

$$H_k(CL) \to H_k(K \cup CL) \to H_k(K \cup CL, CL) \to H_{k-1}(CL).$$

Из стягиваемости конуса CL следует, что среднее отображение — изоморфизм. Отметим, что пространство $K \cup CL$ гомотопически эквивалентно K/L. Действительно, пространство CL стягиваемо, поэтому $K \cup L \sim (K \cup CL)/CL \approx K/L$.

Пример 1.3.2.

$$H_k(D^n, S^{n-1}; G) = \begin{cases} G & \textit{при } k = n, \\ 0 & \textit{при } k \neq n. \end{cases}$$

Доказательство. Точная последовательность

$$H_k(D^n) \to H_k(D^n, S^{n-1}) \to H_{k-1}(S^{n-1}) \to H_{k-1}(D^n)$$

показывает, что $H_k(D^n, S^{n-1}) \cong H_{k-1}(S^{n-1})$ при $k \geqslant 2$. При $k = 0$ требуемое утверждение следует из примера 1.3.1. При $k = 1$ возникают два варианта точных последовательностей:

$$0 \to H_1(D^n, S^{n-1}) \to G \to G \to 0 \quad (n \geqslant 2),$$

$$0 \to H_1(D^1, S^0) \to G \oplus G \to G \to 0.$$

Здесь отображение $G \to G$ является изоморфизмом, а отображение $G \oplus G \to G$ имеет вид $(a, b) \mapsto a + b$. Ядро первого отображения нулевое, а ядро второго отображения состоит из элементов вида $(a, -a)$, поэтому оно изоморфно G. $\square$

Замечание. Трудности, возникшие при разборе случая $k = 1$, исчезают, если рассматривать приведённые гомологии, которые определяются на с. 28.

Точная гомологическая последовательность возникает в следующей абстрактной алгебраической ситуации. Пусть задана короткая точная последовательность цепных отображений:

$$0 \longrightarrow C'_* \xrightarrow{i_*} C_* \xrightarrow{p_*} C''_* \longrightarrow 0$$

(например, $C'_k = C_k(L)$, $C_k = C_k(K)$, $C''_k = C_k(K)/C_k(L)$). Тогда можно определить *связывающий* гомоморфизм $\partial_* : H_k(C''_*) \to H_{k-1}(C'_*)$. А именно, пусть $z''_k \in C''_k$ и $\partial''_k z''_k = 0$. Тогда $z''_k = p_k c_k$ для некоторого $c_k \in C_k$ и $0 = \partial''_k z''_k = p_k(\partial_k c_k)$. Поэтому $\partial_k c_k = i_{k-1} c'_{k-1}$ для некоторого $c'_{k-1} \in C'_{k-1}$. Положим $\partial_* z''_k = c'_{k-1}$. Корректность этого определения на уровне гомологий и точность последовательности

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_k(C'_*) \xrightarrow{i_*} H_k(C_*) \xrightarrow{p_*} H_k(C''_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(C'_*) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

доказываются точно так же, как и раньше.

Пример 1.3.3. *Пусть* K — *симплициальный комплекс,* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ — *короткая точная последовательность абелевых групп. Тогда возникает короткая точная последовательность цепных комплексов*

$$0 \to C_k(K; G') \to C_k(K; G) \to C_k(K; G'') \to 0.$$

Связывающий гомоморфизм $\beta_* : H_k(K; G'') \to H_{k-1}(K; G)$ *называют гомоморфизмом Бокштейна.*

Наиболее интересные примеры гомоморфизмов Бокштейна дают точные последовательности

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{m^2} \to \mathbb{Z}_m \to 0,$$

которые определяют гомоморфизмы $H_k(K; \mathbb{Z}_m) \to H_{k-1}(K; \mathbb{Z})$ и $H_k(K; \mathbb{Z}_m) \to H_{k-1}(K; \mathbb{Z}_m)$.

Для гомоморфизма $\alpha : A \to A'$ можно определить *коядро* $\operatorname{Coker}\alpha = A' / \operatorname{Im}\alpha$.

Задача 1.3.1. *Дана коммутативная диаграмма с точными строками:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\beta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Докажите, что существует точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\gamma \to 0.$$

Для тройки симплициальных комплексов $L_1 \subset L_2 \subset K$ можно построить точную *гомологическую последовательность тройки*

$$\to H_k(L_2, L_1) \xrightarrow{i_*} H_k(K, L_1) \xrightarrow{p_*} H_k(K, L_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(L_2, L_1) \to$$

следующим образом. Изоморфизм

$$C_*(K)/C_*(L_2) \cong \big(C_*(K)/C_*(L_1)\big)/\big(C_*(L_2)/C_*(L_1)\big)$$

показывает, что имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to C_*(L_2)/C_*(L_1) \xrightarrow{i} C_*(K)/C_*(L_1) \xrightarrow{p} C_*(K)/C_*(L_2) \to 0.$$

Эта короткая точная последовательность цепных комплексов индуцирует указанную точную последовательность гомологий.

При работе с точными последовательностями часто бывает полезно следующее утверждение.

Теорема 1.3.2 (5-лемма Стинрода). *Пусть задана коммутативная диаграмма абелевых групп с точными строками:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\
\downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\
B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5
\end{array}$$

Предположим, что φ_1, φ_2, φ_4, φ_5 — изоморфизмы. Тогда φ_3 — изоморфизм.

Доказательство. Рассмотрим группы $A_2' = A_2/\operatorname{Im}\alpha_1$ и $A_4' = \operatorname{Ker}\alpha_4$; B_2' и B_4' определяются аналогично. Доказательство сводится к более простой ситуации

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & A_2' & \xrightarrow{\alpha_2'} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3'} & A_4' & \to 0 \\
& \downarrow \varphi_2' & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4' & \\
0 \to & B_2' & \xrightarrow{\beta_2'} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3'} & B_4' & \to 0
\end{array}$$

Здесь φ_2' и φ_4' снова изоморфизмы. Ясно, что

$$\operatorname{Ker}\varphi_3 \subset \operatorname{Ker}(\beta_3'\varphi_3) = \operatorname{Ker}(\varphi_4'\alpha_3') = \operatorname{Ker}(\alpha_3') = \operatorname{Im}(\alpha_2'),$$

поэтому $\operatorname{Ker}\varphi_3 \cong \operatorname{Ker}(\varphi_3\alpha_2') = \operatorname{Ker}(\beta_2'\varphi_2') = 0$, т.е. φ_3 — мономорфизм. Кроме того, $\operatorname{Im}(\beta_3'\varphi_3) = \operatorname{Im}(\varphi_4'\alpha_3')$, где α_3' — эпиморфизм и φ_4' — изоморфизм. Поэтому $\beta_3'\varphi_3$ — эпиморфизм и $B_3 = \operatorname{Im}\varphi_3 + \operatorname{Ker}\beta_3'$. Но

$$\operatorname{Ker}\beta_3' = \operatorname{Im}\beta_2' = \operatorname{Im}(\beta_2'\varphi_2') = \operatorname{Im}(\varphi_3\alpha_2') \subset \operatorname{Im}\varphi_3,$$

поэтому $B_3 = \operatorname{Im}\varphi_3$, т.е. φ_3 — эпиморфизм. □

Замечание. 5-лемма остаётся справедливой и в том случае, когда диаграмма коммутативна с точностью до знака, т.е. $\varphi_2\alpha_1 = \pm\beta_1\varphi_1$ и т.д. Действительно, в доказательстве участвуют только группы Ker и Im, которые не изменяются при замене гомоморфизма φ на $-\varphi$.

С помощью 5-леммы легко доказывается следующее утверждение.

Теорема 1.3.3. *Предположим, что отображение пар $f : (K, L) \to (K', L')$ таково, что индуцированные им отображения $K \to K'$ и $L \to L'$ являются гомотопическими эквивалентностями. Тогда отображение $f_* : H_k(K, L) \to H_k(K', L')$ — изоморфизм.*

Доказательство. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
H_k(L) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"', "\text{изо}"] & H_k(K) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "f_*"', "\text{изо}"] & H_k(K, L) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"', "?"] & H_{k-1}(L) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"', "\text{изо}"] & H_{k-1}(K) \arrow[d, "f_*"', "\text{изо}"] \\
H_k(L') \arrow[r, "i_*"] & H_k(K') \arrow[r, "p_*"] & H_k(K', L') \arrow[r, "\partial_*"] & H_{k-1}(L') \arrow[r, "i_*"] & H_{k-1}(K')
\end{tikzcd}$$

Из 5-леммы следует, что средняя вертикальная стрелка тоже является изоморфизмом. □

Задача 1.3.2. *Дана коммутативная диаграмма абелевых групп*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\varphi_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

с точными строками.

а) Докажите, что если φ_2 и φ_4 — мономорфизмы, то φ_3 — мономорфизм.

б) Докажите, что если φ_2 и φ_4 — эпиморфизмы, то φ_3 — эпиморфизм.

Задача 1.3.3. *Дана коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_3 \arrow[d, "\varphi_3"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3
\end{tikzcd}$$

с точными строками. Докажите, что φ_2 индуцирует изоморфизм

$$\Phi : \operatorname{Ker}(\varphi_3\alpha_2)/(\operatorname{Ker}\alpha_2 + \operatorname{Ker}\varphi_2) \to (\operatorname{Im}\varphi_2 \cap \operatorname{Im}\beta_1)/\operatorname{Im}(\varphi_2\alpha_1).$$

1.3.2. Приведённые гомологии

Формулировки и доказательства многих теорем упрощаются, если вместо групп гомологий $H_k(K)$ рассматривать группы *приведённых* гомологий $\tilde{H}_k(K)$, которые можно определить следующими эквивалентными способами.

Определение 1. *$\tilde{H}_k(K)$ — ядро гомоморфизма $p_* : H_k(K) \to H_k(*)$, где $p : K \to *$ — отображение K в одноточечное пространство.*

Определение 2. *Заменим отображение $\partial_0 : C_0(K) \to 0$ на отображение $\varepsilon : C_0(K) \to \mathbb{Z}$, где $\varepsilon(v) = 1$ для любой вершины v. Если $c_1 \in C_1(K)$, то $\varepsilon\partial_1 c_1 = 0$, поэтому для нового цепного комплекса тоже можно определить группы гомологий $\tilde{H}_k(K)$.*

Отображение ε называют *аугментацией*. Такое название (augmentation — увеличение) связано с тем, что мы увеличиваем цепной комплекс

$$\ldots \to C_1(K) \xrightarrow{\partial_0} C_0(K) \to 0,$$

заменяя его на цепной комплекс

$$\ldots \to C_1(K) \xrightarrow{\partial_0} C_0(K) \xrightarrow{\varepsilon} C_{-1}(K) \to 0,$$

где $C_{-1}(K) = \mathbb{Z}$.

Эквивалентность определений 1 и 2 следует из того, что $\tilde{H}_k(K) = H_k(K)$ при $k \geqslant 1$, а отображение $p_0 : C_0(K) \to C_0(*) = \mathbb{Z}$ совпадает с ε.

Если $i : * \to X$ — любое отображение, то $pi = \mathrm{id}_*$, поэтому

$$H_0(K) = \operatorname{Im} p_* \oplus \operatorname{Ker} i_* = \tilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}.$$

Таким образом, $\tilde{H}_0(K) \cong H_0(K, *)$.

Пример 1.3.2 показывает, что $H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_k(S^n)$ при всех k.

Мы уже показали, что $H_k(K, L) \cong H_k(K \cup CL)$ при $k \geqslant 2$. Используя приведённые гомологии, можно показать, что $H_k(K, L) \cong \tilde{H}_k(K \cup CL)$ при $k = 0$ и 1.

1.3.3. Последовательность Майера–Вьеториса

Теорема 1.3.4 (Майер–Вьеторис [Ma], [Vi2]). *Пусть K — симплициальный комплекс, K_0 и K_1 — такие его подкомплексы, что $K = K_0 \cup K_1$. Положим $L = K_0 \cap K_1$. Тогда имеется точная последовательность*

$$\ldots \to H_k(L) \to H_k(K_0) \oplus H_k(K_1) \to H_k(K) \to H_{k-1}(L) \to \ldots$$

Доказательство. Последовательность Майера–Вьеториса возникает из точной последовательности

$$0 \to C_*(L) \xrightarrow{(j_0,-j_1)} C_*(K_0) \oplus C_*(K_1) \xrightarrow{(i_0,i_1)} C_*(K) \to 0, \qquad (1)$$

которую мы сейчас опишем. Комплекс $C_*(K_0) \oplus C_*(K_1)$ состоит из групп $C_k(K_0) \oplus C_k(K_1)$; граничный гомоморфизм в нём — прямая сумма граничных гомоморфизмов, т.е. $\partial(c^0, c^1) = (\partial c^0, \partial c^1)$. Отображения $j_\alpha : L \to K_\alpha$ и $i_\alpha : K_\alpha \to K$ — естественные включения.

Проверим точность последовательности (1). Мономорфность отображения $(j_0, -j_1)$ очевидна. Эпиморфность отображения (i_0, i_1) следует из того, что $K = K_0 \cup K_1$. Действительно, пусть $c = \sum a_i \Delta_i^k \in C_k(K)$ и c^0 — сумма тех слагаемых, для которых $\Delta_i^k \subset K_0$. Тогда носителем цепи $c - c^0$ служит K_1 и $(i_0, i_1)(c^0, c - c^0) = c^0 + (c - c^0) = c$.

Остаётся проверить точность в среднем члене. Образ отображения $(j_0, -j_1)$ состоит из цепей вида $(c, -c)$, где c — цепь в L. Ядро отображения (i_0, i_1) состоит из цепей вида $(c, -c)$, где c — цепь в $K_0 \cap K_1 = L$.

Ясно также, что гомологии цепного комплекса $C_*(K_0) \oplus C_*(K_1)$ изоморфны $H_*(K_0) \oplus H_*(K_1)$. □

Для приведённых гомологий тоже имеет место точная последовательность Майера–Вьеториса. Это следует из того, что если мы положим $(j_0, -j_1)(n) = (n, -n)$ и $(i_0, i_1)(m, n) = m + n$, то получим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_0(L) & \xrightarrow{(j_0,-j_1)} & C_0(K_0) \oplus C_0(K_1) & \xrightarrow{(i_0,i_1)} & C_0(K) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_L} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_0 \oplus \varepsilon_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_K} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{(j_0,-j_1)} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{(i_0,i_1)} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

С помощью точной последовательности Майера–Вьеториса для приведённых гомологий легко вычисляются группы гомологий надстройки и букета.

Теорема 1.3.5 (изоморфизм надстройки). *Пусть K — симплициальный комплекс, ΣK — надстройка над K. Тогда для любого $k \geqslant 1$ имеется канонический изоморфизм $H_k(\Sigma K) \cong \tilde{H}_{k-1}(K)$.*

Доказательство. Представим ΣK в виде $K_0 \cup K_1$, где K_0 и K_1 — конусы над K, причём $K_0 \cap K_1 = K$. Запишем последовательность Майера–Вьеториса для приведённых гомологий:

$$\tilde{H}_k(K_0) \oplus \tilde{H}_k(K_1) \to \tilde{H}_k(\Sigma K) \to \tilde{H}_{k-1}(K) \to \tilde{H}_{k-1}(K_0) \oplus \tilde{H}_{k-1}(K_1).$$

Пространства K_0 и K_1 стягиваемы, поэтому крайние члены последовательности равны нулю, а значит, среднее отображение — изоморфизм. □

Замечание. Мы используем приведённые гомологии, потому что при использовании обычных гомологий приходится отдельно разбирать случай $k = 1$.

Теорема 1.3.6. *Пусть K_0 и K_1 — симплициальные комплексы, $K = K_0 \vee K_1$ — их букет. Тогда для любого $k \geqslant 1$ имеется канонический изоморфизм $H_k(K) \cong H_k(K_0) \oplus H_k(K_1)$.*

Доказательство. Согласно определению пространство $K_0 \cap K_1$ состоит из одной точки $*$. Запишем последовательность Майера–Вьеториса для приведённых гомологий:

$$\tilde{H}_k(*) \to \tilde{H}_k(K_0) \oplus \tilde{H}_k(K_1) \to \tilde{H}_k(K) \to \tilde{H}_{k-1}(*)$$

При $k \geqslant 1$ крайние члены равны нулю. □

Задача 1.3.4. *Докажите, что $H_k(S^p \times S^q, S^p \vee S^q) \cong H_k(S^{p+q})$ для всех $k \geqslant 1$.*

Задача 1.3.5. *Вычислите гомологии пространства $S^p \times S^q$.*

Задача 1.3.6. *Вычислите гомологии тора T^2.*

Задача 1.3.7. *а) Вычислите гомологии дополнения узла в S^3 (ответ не зависит от выбора узла).*

б) Вычислите гомологии дополнения зацепления в S^3, состоящего из n связных компонент (ответ зависит только от n).

Задача 1.3.8. *Пусть K — симплициальный комплекс, $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$ — такое семейство его подкомплексов, что все их пересечения ацикличны и они покрывают K. Докажите, что группы гомологий K изоморфны группам гомологий нерва покрытия $\mathcal{L}$.*

Задача 1.3.9. *Докажите, что $H_k(M^n \setminus \operatorname{int} D^n) \cong H_k(M^n)$ при $1 \leqslant k \leqslant n-2$. (Здесь D^n — шар, расположенный в некоторой карте.)*

У теоремы Майера–Вьеториса есть такое обобщение (*относительная последовательность Майера–Вьеториса*).

Теорема 1.3.7. *Пусть $L_0 \subset K_0$ и $L_1 \subset K_1$ — подкомплексы симплициального комплекса K. Тогда имеет место точная последовательность*

$$\to H_k(K_0 \cap K_1, L_0 \cap L_1) \to H_k(K_0, L_0) \oplus H_k(K_1, L_1) \to \\ \to H_k(K_0 \cup K_1, L_0 \cup L_1) \to H_{k-1}(K_0 \cap K_1, L_0 \cap L_1) \to$$

Доказательство. Относительная последовательность Майера–Вьеториса возникает из короткой точной последовательности

$$0 \to \frac{C_*(K_0 \cap K_1)}{C_*(L_0 \cap L_1)} \xrightarrow{(j_0,-j_1)} \frac{C_*(K_0)}{C_*(L_0)} \oplus \frac{C_*(K_1)}{C_*(L_1)} \xrightarrow{(i_0,i_1)} \frac{C_*(K_0 \cup K_1)}{C_*(L_0 \cup L_1)} \to 0, \tag{1.1}$$

которая устроена следующим образом. Для каждой четвёрки абелевых групп $H_1 \subset H_2 \subset G_1 \subset G_2$ определена каноническая проекция факторгрупп $G_1/H_1 \to G_2/H_2$. Отображения j_0, j_1 и i_0, i_1 — канонические проекции такого вида.

Если $c \in C_*(L_0) \cap C_*(L_1)$, то $c \in C_*(L_0 \cap L_1)$. Поэтому $(j_0, -j_1)$ — мономорфизм.

Проверим, что (i_0, i_1) — эпиморфизм. Пусть $c = \sum a_i \Delta_i^k \in C_*(K_0 \cup K_1)$, c^0 — сумма тех слагаемых, для которых $\Delta_i^k \subset K_0$. Тогда цепь $c - c^0$ лежит в $C_*(K_1)$. Поэтому паре $(c^0, c - c^0)$ можно сопоставить элемент средней группы из последовательности (1.1). Образ этого элемента при отображении (i_0, i_1) совпадает с c $(\mathrm{mod}\ C_*(L_0 \cup L_1))$.

Остаётся проверить точность в среднем члене. Образ отображения $(j_0, -j_1)$ состоит из относительных цепей вида $\big(c \pmod{C_*(L_0)}, -c \pmod{C_*(L_1)}\big)$, где c — цепь в $K_0 \cap K_0$. Ядро отображения (i_0, i_1) состоит из относительных цепей вида $\big(c^0 \pmod{C_*(L_0)}, c^1 \pmod{C_*(L_1)}\big)$, где $c^0 + c^1 \in C_*(L_0 \cup L_1)$. Ясно, что образ содержится в ядре. Рассмотрим элемент ядра. Пусть $\tilde{c}^0$ — сумма тех слагаемых цепи $c^0 + c^1$, которые лежат в $C_*(L_0)$, $\tilde{c}^1 = -(c^0 + \tilde{c}^0 + c^1)$. Тогда $\tilde{c}^1 \in C_*(L_1)$, поэтому в качестве c можно взять $c^0 + \tilde{c}^0 = -(c^1 + \tilde{c}^1)$. □

1.4. Когомологии и формулы универсальных коэффициентов

1.4.1. Когомологии

Пусть K — симплициальный комплекс, G — абелева группа и $C_k(K) = C_k(K, \mathbb{Z})$. Гомоморфизм $c^k : C_k(K) \to G$ называют k-мерной *коцепью* с коэффициентами (или со значениями) в G. Группу k-мерных коцепей обозначают $C^k(K;G) = \mathrm{Hom}(C_k(K), G)$.

Семейству абелевых групп $\{G_\alpha\}$ можно сопоставить их *прямую сумму* $\oplus_\alpha G_\alpha$ и *прямое произведение* $\prod_\alpha G_\alpha$. Элементами обеих этих групп служат наборы (g_α); сложение определяется покомпонентно. Разница между ними заключается в том, что группа $\oplus_\alpha G_\alpha$ состоит из тех наборов, в которых $g_\alpha \neq 0$ лишь для конечного множества индексов α, а группа $\prod_\alpha G_\alpha$ состоит из всех наборов. Для конечных семейств групп между прямым произведением и прямой суммой нет никакой разницы.

Пусть индекс α нумерует k-мерные симплексы комплекса K. Согласно определению групп цепей $C_k(K;G) = \oplus_\alpha G_\alpha$, где $G_\alpha \cong G$. Но $C^k(K;G) = \prod_\alpha G_\alpha$, $G_\alpha \cong G$. Действительно, коцепь — это функция на симплексах со значениями в G. Каждому симплексу Δ_α^k сопоставляется произвольное значение; среди этих значений не обязательно должно быть лишь конечное число отличных от нуля.

В качестве группы цепей берётся прямая сумма, а не прямое произведение, потому что для прямого произведения нельзя определить граничный гомоморфизм. Это связано с тем, что прямая сумма свободных абелевых групп свободна в отличие от прямого произведения.

Предположим, что группа G является аддитивной группой кольца с единицей. Тогда симплексу Δ_α^k можно сопоставить k-мерную коцепь $(\Delta_\alpha^k)^*$, которая принимает значение 1 на Δ_α^k и значение 0 на всех остальных k-мерных симплексах. Поэтому любую k-мерную коцепь можно записать в виде формальной суммы $\sum g_\alpha(\Delta_\alpha^k)^*$, где $g_\alpha \in G$. Эта сумма не обязательно состоит из конечного числа слагаемых.

Пусть $c_k \in C_k(K)$ и $c^k \in C^k(K;G)$. Значение гомоморфизма c^k на элементе c_k мы будем обозначать $\langle c^k, c_k\rangle$. Такое спаривание позволяет граничному оператору $\partial : C_{k+1}(K) \to C_k(K)$ сопоставить двойственный оператор $\delta : C^k(K;G) \to C^{k+1}(K;G)$, определив его с помощью формулы

$$\langle \delta c^k, c_{k+1}\rangle = \langle c^k, \partial c_{k+1}\rangle.$$

Обратите внимание, что оператор δ повышает размерность, а оператор ∂ понижает.

Замечание. Иногда оператор $\delta : C^k(K;G) \to C^{k+1}(K;G)$ определяют с помощью формулы

$$\langle \delta c^k, c_{k+1}\rangle = -(-1)^k \langle c^k, \partial c_{k+1}\rangle.$$

Такой выбора знака основан на следующем соглашении, предложенном Маклейном: если переставляются два символа размерностей n и m, то нужно ввести знак $(-1)^{mn}$; при этом отображениям ∂ и δ приписываются размерности -1 и $+1$. Мы этого соглашения не придерживаемся по двум причинам. Во-первых, двойственность отображений ∂ и δ используется очень часто, поэтому вводить для этой двойственности дополнительный знак неудобно. Во-вторых, вопрос о том, как изменяется знак при перестановке каких-то символов, достаточно содержателен. Каждый раз он связан с нетривиальными рассуждениями, которые необходимо провести.

Из равенства $\partial\partial = 0$ следует равенство $\delta\delta = 0$. Поэтому можно определить группы *когомологий*

$$H^k(K;G) = Z^k(K;G)/B^k(K;G), \quad H^0(K;G) = Z^0(K;G),$$

где Z^k и B^{k+1} — ядро и образ гомоморфизма $\delta : C^k \to C^{k+1}$. Элементы групп Z^k и B^k называют *коциклами* и *кограницами*.

Пример 1.4.1. *Пусть K — связный симплициальный комплекс. Тогда $H^0(K;G) = G$.*

Доказательство. Пусть $c_1 = [v_0, v_1]$. Тогда $\partial c_1 = [v_1] - [v_0]$. Поэтому $\langle \delta c^0, c_1 \rangle = \langle c^0, \partial c_1 \rangle = \langle c^0, [v_1] \rangle - \langle c^0, [v_0] \rangle$. Таким образом, равенство $\delta c^0 = 0$ означает, что коцепь c^0 принимает одинаковые значения в любых двух вершинах, соединённых ребром. Для связного симплициального комплекса K это означает, что коцепь c^0 принимает одинаковые значения во всех вершинах. Поэтому $Z^0(K;G) = G$. □

Теорема 1.4.1. *Если G — аддитивная группа поля F, то $H^k(K;G)$ — двойственное пространство для $H_k(K;G)$.*

Доказательство. Группы $C^k(K;G)$ и $C_k(K;G)$ являются линейными пространствами над полем F, причём C^k — двойственное пространство для C_k. Отображение ∂ линейное и отображение δ ему сопряжено (двойственно). Поэтому нужно доказать, что если $A : U \to V$ и $B : V \to W$ — линейные отображения, для которых $BA = 0$, то $\operatorname{Ker} A^* / \operatorname{Im} B^*$ — двойственное пространство для $\operatorname{Ker} B / \operatorname{Im} A$.

Линейные функции на $\operatorname{Ker} B$ — это линейные функции на V, рассматриваемые с точностью до функций вида $g(Bx)$; функции вида $g(Bx)$ образуют пространство $\operatorname{Im} B^*$. Линейные функции на $\operatorname{Ker} B / \operatorname{Im} A$ — это линейные функции на $\operatorname{Ker} B$, для которых $f(Ax) = 0$ для всех x; функции, для которых $f(Ax) = 0$, образуют пространство $\operatorname{Ker} A^*$. □

Следствие. *Если G — аддитивная группа поля F и одно из линейных пространств $H^k(K;G)$ и $H_k(K;G)$ над F конечномерно, то $H^k(K;G) \cong H_k(K;G)$; этот изоморфизм не канонический.*

Симплициальное отображение $\varphi : K \to L$ индуцирует гомоморфизм $\varphi^* : H^k(L; G) \to H^k(K; G)$, действующий в противоположном направлении. Действительно, коцепи $c^k \in C^k(L; G)$ соответствует коцепь $\varphi^k c^k \in C^k(K; G)$, для которой $\varphi^k c^k(\Delta) = c^k(\varphi^k(\Delta))$.

Приведённые группы когомологий определяются посредством замены аугментации $\varepsilon : C_0(K) \to \mathbb{Z}$ двойственным отображением $\tilde{\varepsilon} : G \to C^0(K; G)$, где $\tilde{\varepsilon}(c_0) = g\varepsilon(c_0)$.

Группы *относительных* коцепей определяются следующим образом:

$$C^k(K, L; G) = \mathrm{Hom}(C_k(K, L); G).$$

Группа относительных коцепей является подгруппой в группе абсолютных коцепей. Она состоит из коцепей, обращающихся в нуль на $C_k(L)$. Напомним, что группа относительных цепей является факторгруппой группы абсолютных цепей. При двойственности факторгруппе соответствует подгруппа.

В относительном случае кограничный гомоморфизм тоже определяется как двойственный граничному. *Относительные* группы когомологий определяются естественным образом.

Упражнение. *Докажите, что если каждая компонента связности пространства $|K|$ содержит хотя бы одну компоненту связности пространства $|L|$, то $H^0(K, L; G) = 0$.*

Короткая точная последовательность

$$0 \to C_k(L) \xrightarrow{i_k} C_k(K) \xrightarrow{p_k} C_k(K, L) \to 0 \qquad (1)$$

индуцирует двойственную последовательность

$$0 \leftarrow C^k(L; G) \xleftarrow{i^k} C^k(K; G) \xleftarrow{p^k} C^k(K, L; G) \leftarrow 0. \qquad (2)$$

Эта последовательность тоже точная, но доказательство этого утверждения требует определённых усилий. Более того, доказательство точности последовательности (2) использует одно специальное свойство последовательности (1), а именно, её расщепимость. Прежде чем дать определение этого свойства, докажем следующую лемму.

Лемма 1.4.1. *Пусть $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ — точная последовательность. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) эта последовательность имеет вид

$$0 \to A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{p} C \to 0, \qquad (3)$$

где i — естественное включение, p — естественная проекция;

(б) гомоморфизм φ имеет левый обратный, т.е. существует гомоморфизм $\Phi: B \to A$, для которого $\Phi\varphi = \mathrm{id}_A$;

(в) гомоморфизм ψ имеет правый обратный, т.е. существует гомоморфизм $\Psi: C \to B$, для которого $\psi\Psi = \mathrm{id}_C$.

Доказательство. Ясно, что для последовательности вида (3) выполняются свойства (б) и (в). Действительно, можно положить $\Phi(a, c) = a$ и $\Psi(c) = (0, c)$. Поэтому остаётся проверить, что если выполнено свойство (б) или (в), то последовательность имеет вид (3).

Предположим, что $\Phi\varphi = \mathrm{id}_A$. Покажем, что в таком случае $B = \operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Ker}\Phi$. Любой элемент $b \in B$ можно представить в виде $b = \varphi\Phi(b) + (b - \varphi\Phi(b))$, где $\varphi\Phi(b) \in \operatorname{Im}\varphi$ и $b - \varphi\Phi(b) \in \operatorname{Ker}\Phi$. Кроме того, если $b \in \operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\Phi$, то $b = \varphi(a)$ и $0 = \Phi(b) = \Phi\varphi(a) = a$, поэтому $b = 0$.

Предположим, что $\psi\Psi = \mathrm{id}_C$. Покажем, что в таком случае $B = \operatorname{Ker}\psi \oplus \operatorname{Im}\Psi$. Любой элемент $b \in B$ можно представить в виде $b = (b - \Psi\psi(b)) + \Psi\psi(b)$, где $b - \Psi\psi(b) \in \operatorname{Ker}\psi$ и $\Psi\psi(b) \in \operatorname{Im}\Psi$. Кроме того, если $b \in \operatorname{Ker}\psi \cap \operatorname{Im}\Psi$, то $b = \Psi(c)$ и $0 = \psi(b) = \psi\Psi(c) = c$, поэтому $b = 0$. □

Точную последовательность $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ называют *расщепимой*, если для неё выполняется любое из трёх эквивалентных условий, сформулированных в лемме 1.4.1.

Задача 1.4.1. *Докажите лемму 1.4.1 с помощью 5-леммы.*

Задача 1.4.2. *Дано расслоение $p: E \to B$ со слоем F.*

а) Докажите, что если существует сечение $s: B \to E$ (т.е. $p \circ s = \mathrm{id}_B$ — тождественное отображение B), то $\pi_n(E) \cong \pi_n(B) \oplus \pi_n(F)$.

б) Докажите, что если существует ретракция $r: E \to F$, то $\pi_n(E) \cong \pi_n(B) \oplus \pi_n(F)$.

Задача 1.4.3. *Дано расслоение $p: E \to B$ со слоем F. Докажите, что если слой F стягиваем в пространстве E, то $\pi_n(B) \cong \pi_n(E) \oplus \pi_{n-1}(F)$.*

Абелеву группу F называют *свободной*, если в F можно выбрать множество элементов $\{f_\alpha\}$ так, что любой элемент $f \in F$ единственным образом представляется в виде конечной суммы $f = n_{\alpha_1} f_{\alpha_1} + \ldots + n_{\alpha_k} f_{\alpha_k}$, где $n_{\alpha_i} \in \mathbb{Z}$ и все $f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_k}$ различны. Множество $\{f_\alpha\}$ называют при этом *базисом* F. Эквивалентное определение: свободная абелева группа — это прямая сумма некоторого семейства (конечного или бесконечного) групп $\mathbb{Z}$.

Легко проверить, что если группа C свободная, то точная последовательность $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ расщепима. Действительно, отображение $\Psi: C \to B$ можно построить следующим образом. Выберем в C базис и для каждого базисного элемента c положим $\Psi(c) = b$, где b — произвольный элемент множества $\psi^{-1}(c)$.

Группа $C_k(K, L)$ свободная, поэтому точная последовательность (1) расщепима.

Теорема 1.4.2. *а) Если последовательность* $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ *точна, то двойственная последовательность*

$$\mathrm{Hom}(A, G) \xleftarrow{\tilde{\varphi}} \mathrm{Hom}(B, G) \xleftarrow{\tilde{\psi}} \mathrm{Hom}(C, G) \leftarrow 0$$

тоже точна.

б) Если последовательность $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ *точна и расщепима, то двойственная последовательность*

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(A, G) \xleftarrow{\tilde{\varphi}} \mathrm{Hom}(B, G) \xleftarrow{\tilde{\psi}} \mathrm{Hom}(C, G) \leftarrow 0$$

тоже точна и расщепима.

Доказательство. а) Покажем сначала, что $\mathrm{Ker}\, \tilde{\psi} = 0$. Пусть $\tilde{c} \in \mathrm{Ker}\, \tilde{\psi}$, т.е. $0 = \tilde{\psi}(\tilde{c}) = \tilde{c} \circ \psi$. Это означает, что $\tilde{c}(\psi(b)) = 0$ для всех $b \in B$. По условию ψ — эпиморфизм, поэтому $\tilde{c} = 0$.

Покажем теперь, что $\mathrm{Im}\, \tilde{\psi} = \mathrm{Ker}\, \tilde{\varphi}$. Из равенства $\psi \circ \varphi = 0$ следует равенство $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi} = 0$, поэтому $\mathrm{Im}\, \tilde{\psi} \subset \mathrm{Ker}\, \tilde{\varphi}$. Пусть, далее, $\tilde{b} \in \mathrm{Ker}\, \tilde{\varphi}$, т.е. $0 = \tilde{\varphi}(\tilde{b}) = \tilde{b} \circ \varphi$. Это означает, что $\tilde{b}(\mathrm{Im}\, \varphi) = 0$, поэтому можно определить гомоморфизм $\tilde{b}' : B / \mathrm{Im}\, \varphi \to G$. Гомоморфизм ψ индуцирует изоморфизм $\psi' : B / \mathrm{Im}\, \varphi \to C$. Рассмотрим гомоморфизм $\tilde{b}'(\psi')^{-1} \in \mathrm{Hom}(C, G)$. Ясно, что

$$\tilde{\psi}(b'(\psi')^{-1}) = \tilde{b}'(\psi')^{-1}\psi = \tilde{b},$$

поскольку диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
G & \xleftarrow{\tilde{b}} & B & \xrightarrow{\psi} & C \\
\| & & \downarrow & & \| \\
G & \xleftarrow{\tilde{b}'} & B / \mathrm{Im}\, \varphi & \xrightarrow{\psi'} & C
\end{array}$$

коммутативна.

б) Пусть $\Phi: B \to A$ — гомоморфизм, для которого $\Phi\varphi = \mathrm{id}_A$. Тогда композиция отображений

$$\mathrm{Hom}(A, G) \xrightarrow{\tilde{\Phi}} \mathrm{Hom}(B, G) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathrm{Hom}(A, G)$$

тождественна. Поэтому $\tilde{\varphi}$ — эпиморфизм, т.е. двойственная последовательность точна. Ясно также, что гомоморфизм $\tilde{\Phi}$ её расщепляет. □

Упражнение. *Докажите, что для точной последовательности* $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$ *двойственная последовательность* $0 \leftarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \leftarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ *не точна.*

В заключение вычислим группы $\mathrm{Hom}(A, B)$ в некоторых простейших случаях.

(1) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \cong G$, поскольку гомоморфизм $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ полностью определяется элементом $\varphi(1) \in G$, который может быть произвольным.

(2) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$, поскольку если $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$ — гомоморфизм, то $n\varphi(1) = 0$, а значит, $\varphi(1) = 0$.

(3) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_d$, где $d = \text{НОД}(n, m)$. Действительно, гомоморфизм $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ полностью определяется элементом $\varphi(1)$, который должен удовлетворять соотношению $n\varphi(1) \equiv 0 \pmod{m}$, т.е. $\varphi(1) \equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ m/d)$. Таким образом,

$$\varphi(1) \in \left\{0, \frac{m}{d}, \frac{2m}{d}, \dots, \frac{(d-1)m}{d}\right\}.$$

Аналогично (3) доказывается, что $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, G) \cong \mathrm{Ker}(G \xrightarrow{\times n} G)$.

Задача 1.4.4. *Пусть* $mA = \{b \in A \mid b = ma,\ a \in A\}$ *— подгруппа абелевой группы* A. *Докажите, что* $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(mA, \mathbb{Z})$.

Задача 1.4.5. *Докажите, что группа* $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *несчётна. (Здесь* $\mathbb{Q}$ *— группа рациональных чисел относительно сложения.)*

1.4.2. Тензорное произведение и гомологии с произвольными коэффициентами

Группы когомологий $H^k(K; G)$ с произвольными коэффициентами мы определили исходя из групп цепей с коэффициентами $\mathbb{Z}$. Аналогичным образом группы гомологий $H_k(K; G)$ тоже можно определить исходя из групп цепей с коэффициентами $\mathbb{Z}$. При этом группы $\mathrm{Hom}(C_k(K), G)$ заменяются на $C_k \otimes G$, где $\otimes$ — *тензорное произведение* абелевых групп, которое определяется следующим образом. Пусть A и B — абелевы группы, $F(A, B)$ — свободная абелева группа, базисом которой служат элементы множества $A \times B$; $R(A, B)$ — подгруппа в $F(A, B)$, порождённая элементами вида $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$ и $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$. Тогда $A \otimes B = F(A, B)/R(A, B)$. Смежный класс, содержащий элемент (a, b), обозначают $a \otimes b$. Менее формально

$A \otimes B$ можно определить как группу, порождённую элементами $a \otimes b$, связанными соотношениями $(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$ и $a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'$.

Замечание. Группа $A \otimes B$ может содержать элемент $a_1 \otimes b_1 + \ldots + a_k \otimes b_k$, который нельзя представить в виде $a \otimes b$.

Легко проверить, что $\mathbb{Z} \otimes G \cong G$; изоморфизм задаётся формулой $n \otimes g \mapsto ng$. Действительно, $n \otimes g = 1 \otimes g + \ldots + 1 \otimes g = 1 \otimes (ng)$. Поэтому любой элемент группы $\mathbb{Z} \otimes G \cong G$ имеет вид $1 \otimes g$; между этими элементами нет никаких соотношений.

Чуть более сложные рассуждения показывают, что $\mathbb{Z}_n \otimes G \cong G/nG$. Действительно, любой элемент группы $\mathbb{Z}_n \otimes G$ имеет вид $1 \otimes g$, причём $1 \otimes ng = 0$. В частности, $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_d$, где $d = \text{НОД}(n, m)$. Кроме того, $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Q} = 0$.

Непосредственно из определения тензорного произведения легко выводятся следующие два свойства.

(1) Если отображение $\varphi : A \times B \to C$ *билинейно*, т.е. $\varphi(a + a', b) = \varphi(a, b) + \varphi(a', b)$ и $\varphi(a, b + b') = \varphi(a, b) + \varphi(a, b')$, то существует гомоморфизм $\tilde{\varphi} : A \otimes B \to C$, для которого $\tilde{\varphi}(a \otimes b) = \varphi(a, b)$.

(2) Для любых двух гомоморфизмов $\varphi : A \to A'$ и $\psi : B \to B'$ существует гомоморфизм $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \to A' \otimes B'$, для которого $(\varphi \otimes \psi)(a \otimes b) = \varphi(a) \otimes \psi(b)$. Действительно,

$$(\varphi \otimes \psi)[(a + a') \otimes b - a \otimes b - a' \otimes b] = \\ = [\varphi(a) + \varphi(a')] \otimes \psi(b) - \varphi(a) \otimes \psi(b) - \varphi(a') \otimes \psi(b) = 0.$$

Для тензорного произведения справедлива следующая теорема, двойственная теореме 1.4.2.

Теорема 1.4.3. *а) Если последовательность* $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ *точна, то последовательность*

$$A \otimes G \xrightarrow{\varphi \otimes 1} B \otimes G \xrightarrow{\psi \otimes 1} C \otimes G \to 0,$$

где $1 = \mathrm{id}_G$, *тоже точна.*

б) Если последовательность $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ *точна и расщепима, то последовательность*

$$0 \to A \otimes G \xrightarrow{\varphi \otimes 1} B \otimes G \xrightarrow{\psi \otimes 1} C \otimes G \to 0$$

тоже точна и расщепима.

Доказательство. а) Покажем сначала, что $\psi \otimes 1$ — эпиморфизм и его ядро совпадает с $\operatorname{Ker}\psi \otimes G$. Гомоморфизм $\psi \otimes 1$ индуцирует гомоморфизм

$$\widetilde{\psi \otimes 1} : B \otimes G/(\operatorname{Ker}\psi \otimes G) \to C \otimes G.$$

Достаточно проверить, что $\widetilde{\psi \otimes 1}$ — изоморфизм. Определим отображение $\Psi : C \times G \to B \otimes G/(\operatorname{Ker}\psi \otimes G)$ следующим образом: положим $\Psi(c, g) = b \otimes g + \operatorname{Ker}\psi \otimes G$, где $\psi(b) = c$. Это определение корректно, поскольку если $\psi(b') = c$, то $b \otimes g - b' \otimes g = (b - b') \otimes g$, где $b - b' \in \operatorname{Ker}\psi$. Отображение Ψ билинейно, поэтому оно индуцирует гомоморфизм $\tilde{\Psi} : C \otimes G \to B \otimes G/(\operatorname{Ker}\psi \otimes G)$. Отображения $\widetilde{\psi \otimes 1}$ и $\tilde{\Psi}$ взаимно обратны.

Таким образом, $\operatorname{Ker}(\psi \otimes 1) = \operatorname{Ker}\psi \otimes G = \operatorname{Im}\varphi \otimes G = \operatorname{Im}(\varphi \otimes 1)$; последнее равенство следует из того, что группа $\operatorname{Im}(\varphi \otimes 1)$ порождена элементами вида $\varphi(a) \otimes g$.

б) Пусть $\Phi : B \to A$ — гомоморфизм, для которого $\Phi\varphi = \mathrm{id}_A$. Тогда

$$(\Phi \otimes 1) \circ (\varphi \otimes 1) = \Phi\varphi \otimes 1 = \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_G = \mathrm{id}_{A \otimes G},$$

поэтому $\varphi \otimes 1$ — мономорфизм и отображение $\Phi \otimes 1$ расщепляет точную последовательность тензорных произведений. □

Упражнение. *Докажите, что для точной последовательности* $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *индуцированная последовательность* $0 \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2$ *не точна.*

1.4.3. Tor и Ext

Группы гомологий и когомологий с произвольными коэффициентами выражаются через группы гомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}$. В эти выражения входят операции Tor и Ext, сопоставляющие паре абелевых групп A и B абелевы группы $\operatorname{Tor}(A, B)$ и $\operatorname{Ext}(A, B)$. Эти операции определяются следующим образом. Абелеву группу A можно задать образующими и соотношениями. Это означает, что существует точная последовательность

$$0 \to R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} A \to 0, \tag{1}$$

где F и R — свободные абелевы группы (группа F порождена образующими, R — соотношениями; группа R свободна, поскольку она является подгруппой свободной группы). Точную последовательность (1) называют *свободной резольвентой* абелевой группы A. Точная последовательность (1) индуцирует точные последовательности

$$R\otimes B\xrightarrow{i\otimes 1}F\otimes B\xrightarrow{p\otimes 1}A\otimes B\to 0,$$

$$\operatorname{Hom}(R,B)\xleftarrow{\tilde{\imath}}\operatorname{Hom}(F,B)\xleftarrow{\tilde{p}}\operatorname{Hom}(A,B)\leftarrow 0.$$

Их можно дополнить до точных последовательностей

$$0\to\operatorname{Tor}(A,B)R\otimes B\xrightarrow{i\otimes 1}F\otimes B\xrightarrow{p\otimes 1}A\otimes B\to 0,$$

$$0\leftarrow\operatorname{Ext}(A,B)\operatorname{Hom}(R,B)\xleftarrow{\tilde{\imath}}\operatorname{Hom}(F,B)\xleftarrow{\tilde{p}}\operatorname{Hom}(A,B)\leftarrow 0.$$

где $\operatorname{Tor}(A,B)=\operatorname{Ker}(i\otimes 1)$ и $\operatorname{Ext}(A,B)=\operatorname{Coker}\tilde{\imath}=\operatorname{Hom}(R,B)/\operatorname{Im}\tilde{\imath}$. Обратите внимание, что в обоих определениях используется только отображение $i:R\to F$.

Прежде всего нужно проверить, что так определённые группы $\operatorname{Tor}(A,B)$ и $\operatorname{Ext}(A,B)$ не зависят от выбора свободной резольвенты (1).

Лемма 1.4.2. *а) Для любого гомоморфизма $\varphi:A\to A'$ произвольные свободные резольвенты абелевых групп A и A' можно дополнить до коммутативной диаграммы*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & R & \xrightarrow{i} & F & \xrightarrow{p} & A & \to & 0\\
 & & \downarrow\varphi_1 & & \downarrow\varphi_0 & & \downarrow\varphi & & \\
0 & \to & R' & \xrightarrow{i'} & F' & \xrightarrow{p'} & A' & \to & 0
\end{array}$$

б) Если ψ_0 и ψ_1 — ещё одна пара гомоморфизмов, дополняющих свободные резольвенты до коммутативной диаграммы, то существует гомоморфизм $D_0:F\to R'$, для которого $i'D_0=\varphi_0-\psi_0$ и $D_0i=\varphi_1-\psi_1$.

Доказательство. а) Выберем в свободных абелевых группах R и F базисы $\{r_\alpha\}$ и $\{f_\beta\}$. Отображение p' — эпиморфизм, поэтому в F' существуют элементы f'_β, для которых $p'(f'_\beta)=\varphi p(f_\beta)$. Для базисных элементов положим $\varphi_0(f_\beta)=f'_\beta$, а затем продолжим φ_0 до гомоморфизма групп $F\to F'$. Тогда $p'\varphi_0=\varphi p$.

По условию $pi=0$, поэтому $p'\varphi_0 i(r_\alpha)=\varphi pi(r_\alpha)=0$. Из равенства $\operatorname{Ker}p'=\operatorname{Im}i'$ следует, что в R' существует элемент r'_α, для которого $i'(r'_\alpha)=\varphi_0 i(r_\alpha)$. Положим $\varphi_1(r_\alpha)=r'_\alpha$. Тогда $i'\varphi_1=\varphi_0 i$.

б) Выберем в F базис $\{f_\alpha\}$. По условию $p'(\varphi_0-\psi_0)(f_\alpha)=\varphi p(f_\alpha)-\varphi p(f_\alpha)=0$. Поэтому в R' существует элемент $\{r'_\alpha\}$, для которого $i'(r'_\alpha)=(\varphi_0-\psi_0)(f_\alpha)$. Положим $D_0(f_\alpha)=r'_\alpha$. Тогда $i'D_0=\varphi_0-\psi_0$. Следовательно, $i'D_0i=(\varphi_0-\psi_0)i=i'(\varphi_1-\psi_1)$. Отображение i — мономорфизм, поэтому $D_0i=\varphi_1-\psi_1$. ☐

Тяжеловесная формулировка леммы 1.4.2 допускает весьма естественную интерпретацию на языке гомологической алгебры. Рассмотрим для этого последовательность гомоморфизмов

$$\ldots \to 0 \to 0 \to R \xrightarrow{i} F$$

как цепной комплекс C_* (здесь $C_0 = F$, $C_1 = R$ и $C_k = 0$ при $k > 1$). Лемма 1.4.2 утверждает, что любой гомоморфизм $\varphi : A \to A'$ индуцирует цепное отображение $C_* \to C'_*$, которое единственно с точностью до цепной гомотопии. В таком случае однозначно определено индуцированное отображение гомологий $H_*(C_*) \to H_*(C'_*)$. Более того, однозначно определены отображения гомологий $H_*(C_* \otimes G) \to H_*(C'_* \otimes G)$ и $H_*(\mathrm{Hom}(C'_*, G)) \to H_*(\mathrm{Hom}(C'_*, G))$. Нас интересуют именно эти гомоморфизмы, поскольку $H_1(C_* \otimes G) = \mathrm{Tor}(A, G)$ и $H_1(\mathrm{Hom}(C_*, G)) = \mathrm{Ext}(A, G)$. Отметим также, что $H_0(C_* \otimes G) = F \otimes G / R \otimes G \cong A \otimes G$ и $H_0(\mathrm{Hom}(C_*, G)) \cong \mathrm{Hom}(A, G)$.

Корректность определения группы $\mathrm{Tor}(A, B)$ следует теперь из того, что $(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}$ и $(\varphi\psi)_* = \varphi_*\psi_*$. Для $\mathrm{Ext}(A, B)$ доказательство аналогично, только в этом случае $(\varphi\psi)_* = \psi_*\varphi_*$.

Вычислим группы $\mathrm{Tor}(A, B)$ и $\mathrm{Ext}(A, B)$ в некоторых простейших случаях. Прежде всего отметим, что если группа A свободная, то $\mathrm{Tor}(A, B) = 0$ и $\mathrm{Ext}(A, B) = 0$. В частности, $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, B) = 0$ и $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, B) = 0$.

Для группы $A = \mathbb{Z}_n$ можно рассмотреть свободную резольвенту

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \to 0.$$

Вычислим сначала $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, B)$. Любой элемент группы $\mathbb{Z} \otimes B$ можно представить в виде $1 \otimes b$. Нам нужно вычислить ядро отображения $1 \otimes b \mapsto n \otimes b = 1 \otimes nb$. Ясно, что оно состоит из элементов $1 \otimes b$, для которых $nb = 0$. Таким образом, группа $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, B)$ изоморфна $\mathrm{Ker}(B \xrightarrow{\times n} B)$. В частности, $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$ и $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_{(n,m)}$.

Вычислим теперь $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, B)$. Ясно, что $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, B) \cong B$ и умножению в $\mathbb{Z}$ на n соответствует гомоморфизм $B \to B$, при котором b переходит в nb. Поэтому $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, B) = B/nB$. В частности, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$ и $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_{(n,m)}$.

Задача 1.4.6. *Пусть* $A = \mathbb{Z}^k \oplus T$, *где* T *— конечная абелева группа. Докажите, что* $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) \cong T$.

Теорема 1.4.4. *а) Пусть абелева группа* A *такова, что* $\mathrm{Ker}(A \xrightarrow{\times n} A) = 0$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\mathrm{Tor}(A, B) = 0$ *для любой группы* B.

б) Пусть абелева группа B такова, что $nB = B$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\operatorname{Ext}(A, B) = 0$ для любой группы A.

Доказательство. а) Выберем в A произвольную конечно порождённую подгруппу A'. Тогда A' — свободная абелева группа, поэтому для любой свободной резольвенты

$$0 \to R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} B \to 0$$

получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A' \otimes R & \xrightarrow{1' \otimes i} & A' \otimes F \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \otimes R & \xrightarrow{1 \otimes i} & A \otimes F \end{array} \qquad (1)$$

с мономорфным отображением $1' \otimes i$. Вертикальные стрелки в этой диаграмме тоже мономорфны, поскольку R и F — свободные группы. Чтобы доказать мономорфность отображения $1 \otimes i$, рассмотрим в $A \otimes R$ произвольный элемент $\omega = a_1 \otimes r_1 + \ldots + a_k \otimes r_k$. Группу A' можно выбрать так, чтобы она содержала элементы $a_1, \ldots, a_k$. Тогда из коммутативности диаграммы (1) и мономорфности отображений $1' \otimes i$ и правой вертикальной стрелки следует, что $(1 \otimes i)(\omega) \neq 0$.

б) Для свободной резольвенты

$$0 \to R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} A \to 0$$

получаем гомоморфизм $\operatorname{Hom}(F, B) \to \operatorname{Hom}(R, B)$; требуется доказать его эпиморфность. Пусть $\varphi : R \to B$ — некоторый гомоморфизм. Выберем $y \in F \setminus R$ и продолжим φ на группу, порождённую R и y, следующим образом:

- если $my \notin R$ для всех $m \in \mathbb{N}$, то положим $\tilde{\varphi}(y) = 0$;
- если $my \in R$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то выберем минимальное число $n \in \mathbb{N}$, обладающее этим свойством, и положим $\tilde{\varphi}(y) = b$, где b — элемент группы B, для которого $nb = \varphi(ny)$.

Продолжение φ на всю группу F теперь можно построить по индукции (если группа F/R не конечно порождённая, то индукция трансфинитная). □

Следствие. *Пусть $G = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (эти поля здесь рассматриваются только как группы относительно сложения). Тогда $\operatorname{Tor}(G, B) = 0$ и $\operatorname{Ext}(A, G) = 0$ для любых абелевых групп A и B.*

При вычислении групп гомологий и когомологий с коэффициентами G с помощью формул универсальных коэффициентов встречаются группы $\mathrm{Tor}(A, G)$ и $\mathrm{Ext}(A, G)$. Если $G = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то равенство $\mathrm{Tor}(A, G) = 0$ следует из того, что $\mathrm{Tor}(A, B) \cong \mathrm{Tor}(B, A)$ для любых абелевых групп A и B. Отметим, что Ext таким свойством не обладает. Например, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) = 0$ и $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$.

Задача 1.4.7. *Докажите, что* $\mathrm{Tor}(A, B) \cong \mathrm{Tor}(B, A)$*; этот изоморфизм канонический.*

Абелеву группу T называют *периодической*, если для любого $t \in T$ существует натуральное число n, для которого $nt = 0$.

Задача 1.4.8. *Докажите, что если* $\mathrm{Ext}(T, \mathbb{Z}) = 0$ *и* T *— периодическая группа, то* $T = 0$.

Задача 1.4.9. *Докажите, что если последовательность* $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ *точна, то последовательность*

$$0 \to \mathrm{Hom}(G, A) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathrm{Hom}(G, B) \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathrm{Hom}(G, C)$$

тоже точна для любой абелевой группы G.

Абелеву группу G называют *делимой*, если для любого натурального n отображение $G \to G$, заданное формулой $g \mapsto ng$, является эпиморфизмом.

Задача 1.4.10. *Дана точная последовательность* $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$.

а) Докажите, что для любой свободной абелевой группы F *последовательность*

$$0 \to \mathrm{Hom}(F, A) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathrm{Hom}(F, B) \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathrm{Hom}(F, C) \to 0$$

точна.

б) Докажите, что для любой делимой группы G *последовательность*

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(A, G) \xleftarrow{\tilde{\varphi}} \mathrm{Hom}(B, G) \xleftarrow{\tilde{\psi}} \mathrm{Hom}(C, G) \leftarrow 0$$

точна.

Свободную резольвенту абелевой группы A часто называют *проективной резольвентой*. Это связано с тем, что есть двойственное понятие — инъективная резольвента. А именно, точную последовательность $0 \to A \to G \to H \to 0$, где G и H — делимые абелевы группы, называют *инъективной резольвентой* абелевой группы A.

Инъективная резольвента существует для любой абелевой группы A. Действительно, факторгруппа делимой группы — делимая группа. Поэтому достаточно вложить A в некоторую делимую группу G. Пусть $A = F/R$, где F — свободная группа. Группа F является прямой суммой некоторого числа групп $\mathbb{Z}$. Вложим F в группу G, которая является прямой суммой того же самого числа групп $\mathbb{Q}$. В группе G есть подгруппа, соответствующая R. Факторгруппа G/R содержит подгруппу A.

Группу $\mathrm{Ext}(A, B)$ можно определить не только с помощью проективной резольвенты группы A, но и с помощью инъективной резольвенты группы B. А именно, пусть $0 \to B \to G \to H \to 0$ — инъективная резольвента группы B. Согласно задаче 1.4.9 индуцированная последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, G) \to \mathrm{Hom}(A, H)$ точна. Поэтому её можно дополнить до точной последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, G) \to \mathrm{Hom}(A, H) \to \widetilde{\mathrm{Ext}}(A, B) \to 0.$$

Задача 1.4.11. *Докажите, что* $\widetilde{\mathrm{Ext}}(A, B) \cong \mathrm{Ext}(A, B)$.

Задача 1.4.12. *Дана точная последовательность абелевых групп* $0 \to A \to B \to C \to 0$. *Докажите, что для любой абелевой группы* X *существуют две точные последовательности*

$$\begin{gathered}
0 \to \mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B) \to \mathrm{Hom}(X, C) \to \\
\to \mathrm{Ext}(X, A) \to \mathrm{Ext}(X, B) \to \mathrm{Ext}(X, C) \to 0, \\
0 \leftarrow \mathrm{Hom}(A, X) \leftarrow \mathrm{Hom}(B, X) \leftarrow \mathrm{Hom}(C, X) \leftarrow \\
\leftarrow \mathrm{Ext}(A, X) \leftarrow \mathrm{Ext}(B, X) \leftarrow \mathrm{Ext}(C, X) \leftarrow 0.
\end{gathered}$$

1.4.4. Формулы универсальных коэффициентов

Группы гомологий и когомологий с произвольными коэффициентами выражаются через группы гомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}$. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4.5 (формулы универсальных коэффициентов). *Для любой абелевой группы* G *имеют место точные последовательности*

$$0 \to H_k(K) \otimes G \to H_k(K; G) \to \mathrm{Tor}(H_{k-1}(K), G) \to 0,$$

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(H_k(K), G) \leftarrow H^k(K; G) \leftarrow \mathrm{Ext}(H_{k-1}(K), G) \leftarrow 0,$$

где $H_k(K) = H_k(K, \mathbb{Z})$. *Эти точные последовательности расщепляются, поэтому имеют место (не канонические) изоморфизмы*

$$H_k(K; G) \cong (H_k(K) \otimes G) \oplus \mathrm{Tor}(H_{k-1}(K), G),$$

$$H^k(K;G) \cong \mathrm{Hom}(H_k(K), G) \oplus \mathrm{Ext}(H_{k-1}(K), G).$$

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность цепных комплексов

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Z_k & \xrightarrow{i} & C_k & \xrightarrow{\partial} & B_{k-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow \partial = 0 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial = 0 & & \\
0 & \to & Z_{k-1} & \xrightarrow{i} & C_{k-1} & \xrightarrow{\partial} & B_{k-2} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array}$$

Здесь имеется в виду, что $C_k = C_k(K, \mathbb{Z})$ и т.п.

Группа B_{k-1} свободная, поэтому после тензорного умножения на G снова получаем точную последовательность:

$$0 \to Z_k \otimes G \xrightarrow{i \otimes 1} C_k \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes 1} B_{k-1} \otimes G \to 0.$$

Короткая точная последовательность цепных комплексов индуцирует точную последовательность гомологий. Учитывая, что группы гомологий цепного комплекса с нулевыми граничными гомоморфизмами совпадают с группами цепей, получаем точную последовательность

$$\to B_k \otimes G \to Z_k \otimes G \to H_k(C_* \otimes G) \to B_{k-1} \otimes G \to Z_{k-1} \otimes G \to$$

Непосредственно из определения связывающего гомоморфизма в точной последовательности гомологий видно, что здесь отображение $B_k \otimes G \to Z_k \otimes G$ индуцировано вложением $j : B_k \to Z_k$. Поэтому получаем точную последовательность

$$0 \to Z_k \otimes G / B_k \otimes G \to H_k(C_* \otimes G) \to \mathrm{Ker}(B_{k-1} \otimes G \xrightarrow{j \otimes 1} Z_{k-1} \otimes G) \to 0.$$

Здесь $Z_k \otimes G / B_k \otimes G = H_k \otimes G$ и $H_k(C_* \otimes G) = H_k(K;G)$. Кроме того, $\mathrm{Ker}(B_{k-1} \otimes G \xrightarrow{j \otimes 1} Z_{k-1} \otimes G) = \mathrm{Tor}(H_{k-1}(K), G)$, поскольку точная последовательность

$$0 \to B_{k-1} \to Z_{k-1} \to H_{k-1} \to 0$$

является свободной резольвентой для группы $H_{k-1} = H_{k-1}(K; \mathbb{Z})$.

Для когомологий аналогично получаем точную последовательность

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(H_k(K), G) \leftarrow H^k(K;G) \leftarrow \mathrm{Ext}(H_{k-1}(K), G) \leftarrow 0.$$

Остаётся проверить, что эти точные последовательности расщепляются. В точной последовательности гомологий гомоморфизм $\varphi : H_k(K) \otimes G \to H_k(K;G)$ на уровне циклов устроен следующим образом: $\varphi((\sum n_i \Delta_i^k) \otimes g) = \sum n_i g \Delta_i^k$. Требуется построить гомоморфизм

$\Phi : H_k(K;G) \to H_k(K) \otimes G$, для которого $\Phi\varphi = \mathrm{id}$. Точная последовательность

$$0 \to Z_k \xrightarrow{i} C_k \xrightarrow{\partial} B_{k-1} \to 0$$

расщепляется, поскольку группа B_{k-1} свободна. Пусть $I : C_k \to Z_k$ — расщепляющее отображение, т.е. $Ii = \mathrm{id}_{Z_k}$. Если композицию отображений

$$C_k \otimes G \xrightarrow{I\otimes 1} Z_k \otimes G \to H_k \otimes G$$

ограничить на циклы комплекса $C_* \otimes G$, то полученное отображение индуцирует гомоморфизм $\Phi : H_k(K;G) \to H_k(K) \otimes G$, поскольку при отображении $I \otimes 1$ граница переходит в границу. Ясно также, что если $\sum n_i\Delta_i^k$ — цикл в C_k, то $\Phi\varphi((\sum n_i\Delta_i^k) \otimes g) = \Phi(\sum n_i g\Delta_i^k) = (\sum n_i\Delta_i^k) \otimes g$.

Для когомологий расщепимость точной последовательности следует из теоремы 1.4.2 б). □

Следствие. *Если $G = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то $H_k(K;G) \cong H_k(K) \otimes G$ и $H^k(K;G) \cong \mathrm{Hom}(H_k(K), G)$.*

При вычислении групп Tor и Ext можно пользоваться следующими достаточно очевидными изоморфизмами:

$$\mathrm{Ext}(A_1 \oplus A_2, B) \cong \mathrm{Ext}(A_1, B) \oplus \mathrm{Ext}(A_2, B),$$

$$\mathrm{Tor}(A_1 \oplus A_2, B) \cong \mathrm{Tor}(A_1, B) \oplus \mathrm{Tor}(A_2, B).$$

Замечание. Для бесконечных семейств абелевых групп имеют место следующие изоморфизмы:

$$\mathrm{Ext}(\oplus_\alpha A_\alpha, B) = \prod_\alpha \mathrm{Ext}(A_\alpha, B); \qquad \mathrm{Ext}(A, \prod_\alpha B) = \prod_\alpha \mathrm{Ext}(A, B_\alpha);$$
$$\mathrm{Tor}(\oplus_\alpha A_\alpha, B) = \oplus_\alpha \mathrm{Tor}(A_\alpha, B); \qquad \mathrm{Tor}(A, \oplus_\alpha B) = \oplus_\alpha \mathrm{Tor}(A, B_\alpha).$$

Задача 1.4.13. *Докажите, что если K — связный симплициальный комплекс и $H_1(K) \cong \mathbb{Z}^r \oplus T_1$, где T_1 — конечная группа, то $H^1(K;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$.*

Задача 1.4.14. *Пусть $H_i(K;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{n_i} \oplus T_i$ и $H^i(K;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{m_i} \oplus T^i$, где T_i и T^i — конечные группы. Докажите, что $m_i = n_i$ и $T^i \cong T_{i-1}$.*

1.5. Некоторые вычисления

1.5.1. Фундаментальный класс

Многие гомологические свойства многообразий связаны с тем, что для замкнутого ориентируемого многообразия M^n группа $H_n(M^n;\mathbb{Z})$ нетривиальна и порождена одним классом гомологий; для произвольного замкнутого многообразия то же самое верно для гомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$. Такими же гомологическими свойствами обладают и псевдомногообразия.

Теорема 1.5.1. *Пусть M^n — псевдомногообразие, G — произвольная абелева группа.*

а) Если край M^n не пуст, то $H_n(M^n;G)=0$.

б) Если M^n замкнуто, то

$$H_n(M^n;G) \cong \begin{cases} G, & \text{если } M^n \text{ ориентируемо;} \\ \operatorname{Ker}(G \xrightarrow{\times 2} G), & \text{если } M^n \text{ неориентируемо.} \end{cases}$$

Доказательство. Группа $H_n(M^n;G)$ состоит из цепей $c_n=\sum a_i\Delta_i^n$, $a_i\in G$, для которых $\partial c_n=0$. Предположим, что симплексы Δ_i^n и Δ_j^n имеют общую грань Δ_s^{n-1}. Согласно условию неразветвлённости грань Δ_s^{n-1} является гранью только этих двух симплексов, поэтому она входит в ∂c_n с коэффициентом $\pm a_i\pm a_j$; если ориентации симплексов Δ_i^n и Δ_j^n согласованы, то коэффициент равен $\pm(a_i-a_j)$, а если не согласованы, то он равен $\pm(a_i+a_j)$. Коэффициент $\pm a_i\pm a_j$ может быть равен нулю лишь в том случае, когда $a_i=\pm a_j$. Поэтому из условия сильной связности следует, что если $\partial c_n=0$, то $c_n=\sum \pm a\Delta_i^n$, где суммирование ведётся по всем n-мерным симплексам.

Если симплекс Δ^{n-1} принадлежит краю M^n, то он входит в ∂c_n с коэффициентом $\pm a$. Поэтому из равенства $\partial c_n=0$ следует, что $a=0$, т.е. $H_n(M^n;G)=0$ для любой группы коэффициентов G.

Изменив при необходимости ориентации некоторых симплексов, можно считать, что $c_n=\sum a\Delta_i^n$. Если псевдомногообразие M^n замкнуто и $2a\neq 0$, то $\partial c_n=0$ тогда и только тогда, когда все симплексы Δ_i^n ориентированы согласованно; если же $2a=0$, то $\partial c_n=0$. Поэтому если M^n ориентируемо, то $H_n(M^n;G)\cong G$, а если M^n неориентируемо, то $H_n(M^n;G)\cong \operatorname{Ker}(G\xrightarrow{\times 2} G)$. □

Для произвольного замкнутого псевдомногообразия M^n гомологический класс цикла $\sum\Delta_i^n$ в $H_n(M^n;\mathbb{Z}_2)$ называют *фундаментальным классом* (более формально этот цикл следовало бы записать как

$\sum 1 \cdot \Delta_i^n$, $1 \in \mathbb{Z}_2$). Для замкнутого ориентированного псевдомногообразия M^n гомологический класс цикла $\sum \Delta_i^n$ в $H_n(M^n;\mathbb{Z})$ (ориентации всех симплексов Δ_i^n согласованы с ориентацией M^n) тоже называют *фундаментальным классом.* Фундаментальный класс псевдомногообразия M^n обозначают $[M^n]$; для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ иногда используют обозначение $[M^n]_2$.

Задача 1.5.1. *Докажите, что если M^n — замкнутое ориентируемое многообразие, то утверждение задачи 1.3.9 на с. 30 остаётся верным и при $k = n - 1$. Существенна ли здесь замкнутость многообразия M^n? А его ориентируемость?*

Для псевдомногообразий с краем теми же самыми методами можно доказать, что

$$H_n(M^n, \partial M^n; G) \cong \begin{cases} G, & \text{если } M^n \text{ ориентируемо;} \\ \operatorname{Ker}(G \xrightarrow{\times 2} G), & \text{если } M^n \text{ неориентируемо.} \end{cases}$$

Действительно, если симплекс Δ^{n-1} принадлежит ∂M^n, то он даёт нулевой вклад в относительную цепь. Фундаментальный класс в относительных группах гомологий определяется точно так же, как и в абсолютных.

Пусть M^n и N^n — замкнутые ориентированные псевдомногообразия. Отображение $f : M^n \to N^n$ переводит фундаментальный класс $[M^n]$ в некоторый элемент группы $H_n(N^n;\mathbb{Z})$, а любой элемент этой группы имеет вид $k[N^n]$, $k \in \mathbb{Z}$. Целое число $\deg f$, для которого $(\deg f)[N^n] = f_*([M^n])$, называют *степенью* отображения f. Если псевдомногообразия M^n и N^n замкнутые, но не обязательно ориентируемые, то аналогично можно определить *степень по модулю 2*.

Если M^n и N^n — псевдомногообразия с краем, то для отображения $f : (M^n, \partial M^n) \to (N^n, \partial N^n)$ тоже можно рассмотреть образ фундаментального класса $[M^n]$ в группе $H_n(N^n, \partial N^n; \mathbb{Z})$ (или в группе $H_n(N^n, \partial N^n; \mathbb{Z}_2)$) и определить степень (или степень по модулю 2).

Теорема 1.5.2. *Пусть $i_* : H_n(\partial W^{n+1}) \to H_n(W^{n+1})$ — гомоморфизм, индуцированный естественным включением. Тогда если псевдомногообразие W^{n+1} ориентируемо, а его край ∂W^{n+1} связен, то $i_* = 0$ для коэффициентов $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$, а если оно неориентируемо, то $i_* = 0$ для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$.*

Доказательство. Группа $H_n(\partial W^{n+1})$ циклическая, поэтому достаточно проверить, что в W^{n+1} фундаментальный цикл $[\partial W^{n+1}]$ является границей некоторого цикла. Ясно, что он является границей фундаментального цикла $[W^{n+1}]$. Если псевдомногообразие W^{n+1} неориентируемо, то его фундаментальный цикл определён только для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$. □

Следствие. *Если $f : \partial W^{n+1} \to M^n$ — ограничение некоторого непрерывного отображения $F : W^{n+1} \to M^n$, причём псевдомногообразие W^{n+1} ориентируемо, а его край ∂W^{n+1} связен, то* $\deg f = 0$.

Доказательство. Гомоморфизм $f_* : H_n(\partial W^{n+1}) \to H_n(M^n)$ представляется в виде композиции $f_* = F_* i_*$, поэтому $f_* = 0$. □

Задача 1.5.2. *Сопоставим отображению $f : S^n \to S^n$ отображение $\Sigma f : \Sigma S^n \to \Sigma S^n$, отображающее $S^n \times \{t\}$ в $S^n \times \{t\}$ посредством f для всех t. Докажите, что* $\deg f = \deg \Sigma f$, *используя изоморфизм надстройки.*

1.5.2. Клеточные гомологии

Если на симплициальном комплексе K задана структура CW-комплекса X, причём каждый остов X^k является подкомплексом в K, то гомологии K с коэффициентами $\mathbb{Z}$ можно вычислить, используя цепной комплекс C_*, в котором C_k — свободная группа, образующие которой находятся во взаимно однозначном соответствии с k-мерными клетками X. Это существенно облегчает вычисление гомологий, поскольку количество клеток X может быть во много раз меньше, чем количество симплексов K. Например, минимальная триангуляция сферы S^n содержит $2^{n+1} - 1$ симплексов (всех размерностей), а минимальное клеточное разбиение состоит всего из двух клеток (n-мерной и 0-мерной).

Лемма. $H_i(X^k, X^{k-1}) = 0$ *при* $i \neq k$ *и* $H_k(X^k, X^{k-1})$ *— свободная абелева группа, образующие которой находятся во взаимно однозначном соответствии с k-мерными клетками X.*

Доказательство. Любая цепь $c_i \in C_i(X^k, X^{k-1})$ однозначно представляется в виде (конечной) суммы цепей $c_{i\alpha} \in C_i(e^k_\alpha, \partial e^k_\alpha) \cong C_i(D^k, S^{k-1})$, где $\{e^k_\alpha\}$ — k-мерные клетки X. При этом $\partial c_i = \sum \partial c_{i\alpha}$. Следовательно, $H_i(X^k, X^{k-1})$ — прямая сумма групп $H_i(D^k, S^{k-1})$. □

Точная последовательность

$$H_{i+1}(X^{k+1}, X^k) \to H_i(X^k) \to H_i(X^{k+1}) \to H_i(X^{k+1}, X^k)$$

показывает, что $H_i(X^k) \cong H_i(X^{k+1})$ при $i \neq k, k+1$. Поэтому $H_{k-1}(X^k) \cong H_{k-1}(X^{k+1}) \cong H_{k-1}(X^{k+2}) \cong \ldots \cong H_{k-1}(X)$.

Положим $C_k = H_k(X^k, X^{k-1})$ и определим отображение $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ следующим образом. Запишем точные последовательности пар (X^k, X^{k-1}) и (X^{k-1}, X^{k-2}) горизонтально и вертикально:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & H_k(X^k) & \to & C_k & \to & H_{k-1}(X^{k-1}) & \to & H_{k-1}(X^k) & \to & 0 \\ & & & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & & & C_{k-1} & & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & & & H_{k-2}(X^{k-2}) & & & & \end{array}$$

Отображение $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ определяется как композиция горизонтальной и вертикальной стрелки. Группу $H_k(X^k)$ можно рассматривать как подгруппу в C_k. При этом $H_k(X^k)$ отождествляется с $\operatorname{Ker} \partial_k$, поскольку если $\varphi = h\varphi'$, где h — мономорфизм, то $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \varphi'$. Отождествив аналогично $H_{k-1}(X^{k-1})$ с $\operatorname{Ker} \partial_{k-1}$, получим $H_{k-1}(X^k) \cong \operatorname{Ker} \partial_{k-1} / \operatorname{Im} \partial_k$.

Отображение $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ устроено следующим образом. Пусть образующей $c_\alpha^k \in C_k$ соответствует клетка e_α^k. Рассмотрим абсолютную цепь $[e_\alpha^k]$, представляющую относительный фундаментальный класс $(e_\alpha^k, \partial e_\alpha^k)$. На уровне гомологий $H_{k-1}(X^{k-1})$ имеем равенство $\partial [e_\alpha^k] = \sum n_{\alpha\beta} [e_\beta^{k-1}]$. В таком случае $\partial c_\alpha^k = \sum n_{\alpha\beta} c_\beta^{k-1}$. Число $n_{\alpha\beta}$ равно степени отображения $S^{k-1} \to e_\beta^{k-1} / \partial e_\beta^{k-1} = S^{k-1}$, индуцированного характеристическим отображением клетки e_α^k.

Равенство $\partial\partial = 0$ следует из того, что $\partial\partial[e_\alpha^k] = 0$.

Гомологии с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ вычисляются аналогично; в этом случае вместо степени берётся степень по модулю 2.

В качестве примера вычислим гомологии замкнутых двумерных поверхностей. Группы H_0 и H_2 мы уже вычислили, поэтому займёмся вычислением H_1.

Пример 1.5.1. *$H_1(nT^2) = \mathbb{Z}^{2n}$ и $H_1(nT^2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{2n}$.*

Доказательство. Воспользуемся стандартным представлением nT^2 с помощью $4n$-угольника. В таком случае комплекс для вычисления клеточных гомологий имеет вид

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^{2n} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \to 0.$$

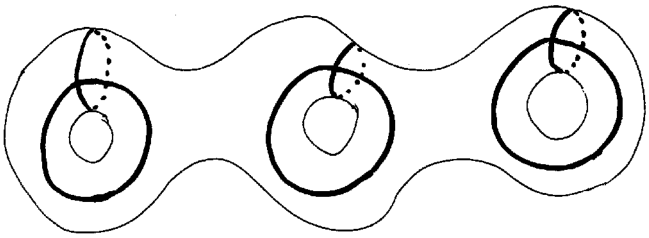

Рис. 1.3. Базисные циклы

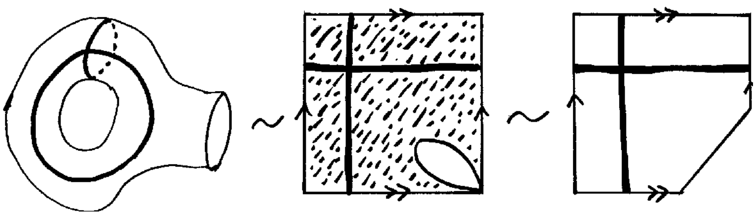

Рис. 1.4. Базисные циклы на одной ручке

Здесь $\partial_1 = 0$, поскольку 0-мерная клетка ровно одна, и $\partial_2 = 0$, поскольку в границу 2-мерной клетки каждая 1-мерная клетка входит дважды, причём с противоположными ориентациями.

Для группы коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ вычисления аналогичны. □

Для сферы с n ручками $2n$ циклов, порождающих группу 1-мерных гомологий, можно выбрать так, как показано на рис. 1.3. Чтобы доказать это, нужно проверить, что указанные циклы гомологичны сторонам $4n$-угольника, из которого склеивается сфера с ручками. Рассмотрим сначала одну ручку, из которой вырезан диск (рис. 1.4). Теперь ясно, что циклам, изображённым на рис. 1.3, соответствуют циклы, изображённые на рис. 1.5; эти циклы гомологичны сторонам многоугольника.

Пример 1.5.2. *$H_1(mP^2) = \mathbb{Z}^{m-1} \oplus \mathbb{Z}_2$ и $H_1(mP^2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^m$.*

Доказательство. Комплекс для вычисления клеточных гомологий mP^2 имеет вид

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \to 0.$$

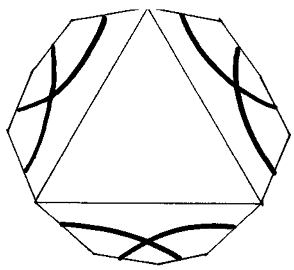

Рис. 1.5. Базисные циклы на многоугольнике

Здесь снова $\partial_1 = 0$, но $\partial_2(1) = (2, \ldots, 2)$, поскольку каждая 1-мерная клетка входит в границу 2-мерной клетки дважды, причём с одной и той же ориентацией. Группу $\mathbb{Z}^m$ нужно профакторизовать по подгруппе, порождённой элементом $(2, \ldots, 2)$. Пусть $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, ..., $e_{m-1} = (0, \ldots, 0, 1, 0)$ и $e_m = (1, \ldots, 1)$. Тогда

$$(a_1, \ldots, a_m) = (a_1 - a_m)e_1 + \ldots + (a_{m-1} - a_m)e_m + a_m e_m.$$

Условие $(a_1, \ldots, a_m) \in \operatorname{Im} \partial_2$ эквивалентно тому, что $a_1 - a_m = 0$, ..., $a_{m-1} - a_m = 0$ и $a_m \equiv 0 \pmod 2$. Поэтому факторгруппа $\mathbb{Z}^m / \operatorname{Im} \partial_2$ изоморфна $\mathbb{Z}^{m-1} \oplus \mathbb{Z}_2$; образующими $\mathbb{Z}^{m-1}$ служат $e_1, \ldots, e_{m-1}$, а образующей $\mathbb{Z}_2$ служит e_m.

Для группы коэффициентов $\mathbb{Z}_2$, как и в предыдущем примере, $\partial_2 = 0$. □

Для бутылки Клейна циклы α и β, порождающие группу гомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}$, изображены на рис. 1.6. При этом на уровне гомологий $2\beta = 0$, поскольку граница листа Мёбиуса, заштрихованного на рис. 1.6 (а), гомологична 2β.

Задача 1.5.3. *Вычислите группы гомологий замкнутых двумерных поверхностей с коэффициентами $\mathbb{Z}_p$, $p \neq 2$.*

Задача 1.5.4. *Вычислите группы когомологий замкнутых двумерных поверхностей с коэффициентами $\mathbb{Z}$.*

Задача 1.5.5. *Пусть H — тело с g ручками, т.е. замкнутая ε-окрестность букета g незаузленных и незацепленных окружностей в $\mathbb{R}^3$. Вложим H произвольно в S^3 и рассмотрим $X = \overline{S^3 \setminus H}$. Докажите, что $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^g$; опишите геометрически образующие этой группы.*

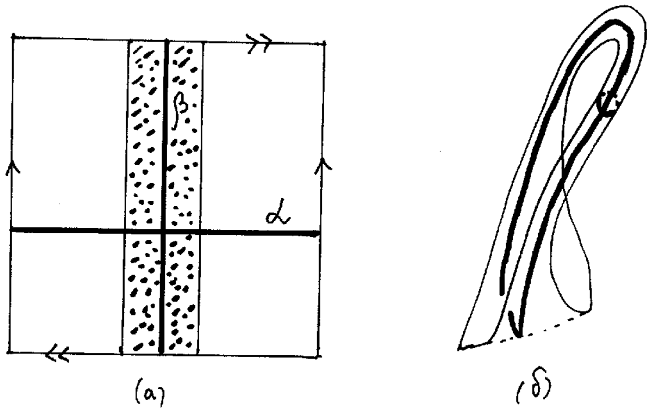

Рис. 1.6. Базисные циклы на бутылке Клейна

Пример 1.5.3.

$$H_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{при } k = 0,\, 2,\, 4, \ldots, 2n; \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. На $\mathbb{C}P^n$ можно задать структуру CW-комплекса с клетками $\mathbb{C}P^k \setminus \mathbb{C}P^{k-1}$. Триангуляцию $\mathbb{C}P^n$, для которой каждый остов $X^{2k+1} = X^{2k} = \mathbb{C}P^k$ является симплициальным подкомплексом, можно построить тем же самым способом, как в части I строилась триангуляция многообразия с краем.

Цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий $\mathbb{C}P^n$ имеет вид

$$\mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Группы гомологий такого цепного комплекса совпадают с группами цепей. □

Пример 1.5.4. *а)* $H_{2k}(\mathbb{R}P^n) = 0$ *при* $k > 0$ *и* $H_{2k+1}(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ *при* $0 \leqslant k < \frac{n-1}{2}$*;*

б) $H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ *при* $0 \leqslant k \leqslant n$*.*

Доказательство. Зададим на $\mathbb{R}P^n$ структуру CW-комплекса с клетками $\mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1}$. Тогда $C_k = \mathbb{Z}$ при $0 \leqslant k \leqslant n$. Центральная симметрия сферы S^{k-1} сохраняет ориентацию при чётном k и изменяет ориентацию при нечётном k. Поэтому граничный гомоморфизм $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$

переводит 1 в $1 + 1 = 2$ при чётном k и в $1 - 1 = 0$ при нечётном k. Цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий $\mathbb{R}P^n$ при чётном n имеет вид

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \to \ldots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0,$$

а при нечётном n он имеет вид

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \to \ldots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0.$$

Следовательно,

$$H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{для } k = 0 \text{ и } k = n, \text{ где } n \text{ нечётно;} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{для нечётных } k, \text{ где } 0 < k < n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ все граничные гомоморфизмы нулевые. □

Задача 1.5.6. *Вычислите группы гомологий n-мерного тора T^n с коэффициентами $\mathbb{Z}$.*

Задача 1.5.7. *Вычислите группы когомологий $\mathbb{R}P^n$ с коэффициентами $\mathbb{Z}$.*

Задача 1.5.8. *Приведите пример нестягиваемого ацикличного 2-мерного CW-комплекса с 1-мерным остовом $S^1 \vee S^1$.*

1.5.3. Индекс пересечения и двойственность Пуанкаре

Предположим, что замкнутое ориентированное многообразие M^n двумя разными способами разбито на клетки так, что между открытыми k-мерными клетками одного разбиения и открытыми $(n-k)$-мерными клетками другого разбиения имеется взаимно однозначное соответствие. Соответственные открытые клетки будем обозначать σ_i и σ_i^*. Предположим, далее, что $\sigma_i \cap \sigma_j^* = \varnothing$ при $i \neq j$, а клетки σ_i и σ_i^* трансверсально пересекаются в одной точке. Будем также предполагать, что клетки σ_i и σ_i^* ориентированы так, что если $e_1, \ldots, e_k$ и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-k}$ положительно ориентированные базисы[1] для σ_i и для σ_i^*, то $e_1, \ldots, e_k, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-k}$ — положительно ориентированный базис для M^n. Наконец, предположим, что группа коэффициентов является аддитивной группой коммутативного ассоциативного кольца R с единицей.

[1] Для симплекса $[v_0, \ldots, v_k]$ положительно ориентирован базис $v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0$.

В таком случае для цепей $\sum a_i\sigma_i$ и $\sum b_i\sigma_i^*$ можно определить их *индекс пересечения*

$$\langle\langle \sum a_i\sigma_i, \sum b_i\sigma_i^*\rangle\rangle = \sum \delta_{ij}a_ib_j = \sum a_ib_i.$$

Требуемую пару клеточных разбиений K и K^* можно построить, например, следующим образом. В качестве K возьмём произвольную триангуляцию многообразия M^n. Пусть K' — барицентрическое подразделение этой триангуляции. Для каждого симплекса Δ^k триангуляции K рассмотрим множество всех симплексов из K', пересекающих Δ^k в точности по его барицентру. Их объединение представляет собой замкнутую $(n-k)$-мерную клетку $(\Delta^k)^*$. Такие клетки образуют разбиение K^*.

С помощью индекса пересечения можно построить билинейное отображение

$$\varphi : H_k(M^n; R) \times H_{n-k}(M^n; R) \to R.$$

А именно, рассмотрим клеточные разбиения K и K^*, реализуем классы гомологий $\alpha \in H_k(M^n; R)$ и $\beta \in H_{n-k}(M^n; R)$ циклами $\sum a_i\sigma_i$ и $\sum b_i\sigma_i^*$ и определим $\varphi(\alpha, \beta)$ как индекс пересечения этих цепей (циклов). Теперь нужно проверить, что этот индекс пересечения не зависит от выбора циклов, представляющих гомологические классы α и β.

Лемма. *Пусть Δ_i и Δ_j — симплексы размерностей k и $k-1$. Тогда*

$$\langle\langle \partial\Delta_i, \Delta_j^*\rangle\rangle = (-1)^k\langle\langle \Delta_i, \partial(\Delta_j^*)\rangle\rangle.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что выражения в обеих частях равенства отличны от нуля тогда и только тогда, когда Δ_j — грань Δ_i. При этом $\langle\langle \partial\Delta_i, \Delta_j^*\rangle\rangle = \langle\langle \pm\Delta_j, \Delta_j^*\rangle\rangle = \pm 1$ и $\langle\langle \Delta_i, \partial(\Delta_j^*)\rangle\rangle = \langle\langle \Delta_i, \pm\Delta_i^*\rangle\rangle = \pm 1$. Остаётся выяснить, с каким знаком входят Δ_j в $\partial\Delta_i$ и Δ_i^* в $\partial(\Delta_j^*)$.

Пусть $v_1, \dots, v_k$ — вершины Δ_j, $v_{k+1}, \dots, v_n$ — вершины Δ_i^*, v_0 — барицентр Δ_i. Знак, с которым Δ_j входит в $\partial\Delta_i$, соответствует ориентации базиса $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$, а знак, с которым Δ_i^* входит в $\partial\Delta_j^*$, соответствует ориентации базиса $v_2 - v_0', \dots, v_k - v_0', v_0 - v_0', v_{k+1} - v_0', \dots, v_n - v_0'$, где v_0' — барицентр Δ_j. В последнем базисе вместо v_0' можно взять v_1; его ориентация от этого не изменится. Ясно также, что отношение знаков ориентаций базисов $e_1, \dots, e_n$ и $e_2 - e_1, \dots, e_k - e_1, -e_1, e_{k+1} - e_1, \dots, e_n - e_1$ равно $(-1)^k$. □

Из леммы следует корректность определения $\varphi(\alpha, \beta)$, так как если $c_1 = \partial c'$ и $\partial c_2 = 0$, то $\langle\langle c_1, c_2\rangle\rangle = \langle\langle \partial c', c_2\rangle\rangle = \pm\langle\langle c', \partial c_2\rangle\rangle = 0$.

Используя клеточные разбиения K и K^*, цепи $\sum a_i\sigma_i$ можно сопоставить цепь $\sum a_i\sigma_i^*$. Но с точки зрения гомологий такое сопоставление не интересно, потому что цепи $(\partial\sigma)^*$ и $\partial(\sigma^*)$ лежат в разных пространствах (если $\dim\sigma = k$, то $\dim(\partial\sigma)^* = n-k+1$, а $\dim\partial(\sigma^*) = n-k-1$). Более естественно цепи $c_k = \sum a_i\sigma_i$ сопоставить коцепь c^{n-k}, для которой $\langle c^{n-k}, \sigma_i^*\rangle = a_i$, т.е.

$$\langle c^{n-k}, \sum b_i\sigma_i^*\rangle = \sum a_i b_i = \langle\langle c_k, \sum b_i\sigma_i^*\rangle\rangle.$$

Тогда

$$\langle\delta c^{n-k}, d_{n-k+1}\rangle = \langle c^{n-k}, \partial d_{n-k+1}\rangle = \langle\langle c_k, \partial d_{n-k+1}\rangle\rangle = (-1)^k\langle\langle\partial c_k, d_{n-k+1}\rangle\rangle,$$

т.е. цепи ∂c_k сопоставляется коцепь $\pm\delta c^{n-k}$. Это, в частности, означает, что циклу сопоставляется коцикл, а границе — кограница. Следовательно, изоморфизм пространства k-мерных цепей в K на пространство $(n-k)$-мерных коцепей в K^* индуцирует изоморфизм группы $H_k(M^n; R)$ на группу $H^{n-k}(M^n; R)$.

Для группы коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ об ориентациях заботиться не нужно, поэтому для замкнутого, но не обязательно ориентируемого многообразия можно определить индекс пересечения по модулю 2 и получить изоморфизм $H_k(M^n; \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z}_2)$.

Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1.5.3 (двойственность Пуанкаре). *а) Пусть M^n — замкнутое ориентируемое многообразие, R — аддитивная группа коммутативного ассоциативного кольца с единицей. Тогда $H_k(M^n; R) \cong H^{n-k}(M^n; R)$.*

б) Пусть M^n — замкнутое многообразие. Тогда $H_k(M^n, \mathbb{Z}_2) \cong H^{n-k}(M^n, \mathbb{Z}_2)$.

Следствие. *а) Если M^n — замкнутое ориентируемое многообразие, а F — аддитивная группа некоторого поля, то $H_k(M^n; F) \cong H_{n-k}(M^n; F)$.*

б) Если M^n — замкнутое многообразие, то $H_k(M^n, \mathbb{Z}_2) \cong H_{n-k}(M^n, \mathbb{Z}_2)$.

Подгруппу, образованную элементами конечного порядка в $H_k(M^n) = H_k(M^n; \mathbb{Z})$ или в $H^k(M^n; \mathbb{Z})$, называют *кручением*.

Задача 1.5.9. *Пусть M^n — замкнутое ориентируемое многообразие, $H_k(M^n) \cong \mathbb{Z}^{a_k} \oplus T_k$ и $H^k(M^n) \cong \mathbb{Z}^{b_k} \oplus T^k$, где T_k и T^k — кручения. Докажите, что $a_k = a_{n-k}$, $b_k = b_{n-k}$, $T_k \cong T_{n-k-1}$, $T^k \cong T^{n-k+1}$ и $T^1 = 0$.*

Используя двойственность Пуанкаре и формулы универсальных коэффициентов можно доказать следующие свойства групп гомологий и когомологий многообразий.

Теорема 1.5.4. *а) Если M^n — замкнутое (связное) многообразие, а R — аддитивная группа коммутативного ассоциативного кольца с единицей, то*

$$H^n(M^n; R) \cong \begin{cases} R & \text{для ориентируемого } M^n; \\ R/2R & \text{для неориентируемого } M^n. \end{cases}$$

б) Если M^n — замкнутое ориентируемое многообразие, то группа $H_{n-1}(M^n; \mathbb{Z})$ не имеет кручения, а если M^n — замкнутое неориентируемое (связное) многообразие, то подгруппа кручения в $H_{n-1}(M^n; \mathbb{Z})$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$.

Доказательство. Группа $Z^n(M^n; R)$ порождена коцепями, двойственными одинаково ориентированным n-мерным симплексам M^n. При этом две коцепи, двойственные одинаково ориентированным n-мерным симплексам с общей $(n-1)$-мерной гранью, отличаются на кограницу. Поэтому для ориентируемого многообразия $H^n(M^n; R) \cong R$, а для неориентируемого многообразия $H^n(M^n; R) \cong R/2R$, поскольку в неориентируемом случае для коцепи c^n, двойственной симплексу, возникает соотношение $2c^n = 0$.

Для ориентируемого многообразия согласно двойственности Пуанкаре $T_{n-1} \cong T^1 = 0$, а для неориентируемого многообразия $T_{n-1} \cong T^n = \mathbb{Z}_2$. □

Упражнение. *Пусть M^4 — замкнутое ориентируемое многообразие. Докажите, что если группа $H_1(M^4)$ не имеет кручения, то все остальные группы $H_k(M^4)$ тоже не имеют кручения.*

Задача 1.5.10. *Пусть M^n — замкнутое ориентируемое многообразие, причём его надстройка ΣM^n гомеоморфна некоторому замкнутому ориентируемому многообразию. Докажите, что M^n — гомологическая сфера, т.е. $H_k(M^n) \cong H_k(S^n)$ для всех k.*

Билинейное отображение $\varphi : H_k(M^n) \times H_{n-k}(M^n) \to \mathbb{Z}$, построенное с помощью индекса пересечения, обладает следующим свойством невырожденности.

Теорема 1.5.5. *Пусть M^n — замкнутое ориентированное многообразие. Тогда любой гомоморфизм $h : H_k(M^n) \to \mathbb{Z}$ можно представить* *в виде* $h(\alpha) = \varphi(\alpha, \beta_h)$, *где* $\beta_h \in H_{n-k}(M^n)$. *Элемент* β_h *определяется гомоморфизмом* h *однозначно с точностью до элемента конечного порядка.*

Доказательство. Точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{k-1}(M^n), \mathbb{Z}) \to H^k(M^n; \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}(H_k(M^n), \mathbb{Z}) \to 0$$

показывает, что гомоморфизму h соответствует элемент группы $H^k(M^n; \mathbb{Z})$, определённый с точностью до элемента группы $\operatorname{Ext}(H_{k-1}(M^n), \mathbb{Z})$; последняя группа конечна. Ясно также, что равенство $h(\alpha) = \varphi(\alpha, \beta)$ выполняется для всех α тогда и только тогда, когда коцепь, соответствующая представителю класса гомологий β, лежит в классе когомологий, который отображается в h.

Отметим, что если $m\beta = 0$, то $m\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, m\beta) = 0$, поэтому $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. □

Если группа коэффициентов F является аддитивной группой некоторого поля ($F = \mathbb{Z}_2$, если M^n неориентируемо), то билинейное отображение $\varphi : H_k(M^n; F) \times H_{n-k}(M^n; F) \to F$ невырожденно в обычном смысле.

Теорема 1.5.6. *Любое линейное отображение* $h : H_k(M^n; F) \to F$ *можно представить в виде* $h(\alpha) = \varphi(\alpha, \beta_h)$, *где элемент* $\beta_h \in H_{n-k}(M^n; F)$ *определён однозначно.*

Доказательство. Линейное отображение h является элементом двойственного к $H_k(M^n; F)$ пространства, т.е. элементом пространства $H^k(M^n; F)$, которое изоморфно $H_{n-k}(M^n; F)$. При этом изоморфизме h переходит в β_h. □

Следствие. *В пространствах* $H_k(M^n; F)$ *и* $H_{n-k}(M^n; F)$ *можно выбрать базисы* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *и* $\beta_1, \ldots, \beta_m$ *так, что* $\langle\langle \alpha_i, \beta_j \rangle\rangle = \delta_{ij}$.

Доказательство. Базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ выбираем произвольно, а в качестве β_j берём элемент, соответствующий линейному отображению $h_j(\sum x_i \alpha_i) = x_j$. Тогда $\langle\langle \alpha_i, \beta_j \rangle\rangle = \varphi(\alpha_i, \beta_j) = h_j(\alpha_i) = \delta_{ij}$. □

Аналогично можно доказать, что если M^n — замкнутое ориентируемое многообразие, то в свободных группах $H_k(M^n)/T_k$ и $H_{n-k}(M^n)/T_{n-k}$, где T_k и T_{n-k} — подгруппы кручения, можно выбрать базисы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $\beta_1, \ldots, \beta_m$ так, что $\langle\langle \alpha_i, \beta_j \rangle\rangle = \delta_{ij}$.

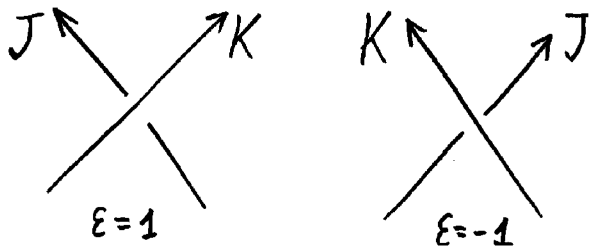

Рис. 1.7. Два типа перекрёстков

Коэффициент зацепления

Пусть c_1 и c_2 — замкнутые ориентированные кривые в S^3. Им можно сопоставить 1-мерные циклы (с коэффициентами $\mathbb{Z}$), которые мы тоже будем обозначать c_1 и c_2. Пусть d_1 — 2-мерная цепь, для которой $\partial d_1 = c_1$. Индекс пересечения $\langle\langle d_1, c_2\rangle\rangle$ называют *коэффициентом зацепления* кривых c_1 и c_2 и обозначают $\mathrm{lk}(c_1, c_2)$. Легко проверить, что индекс пересечения $\langle\langle d_1, c_2\rangle\rangle$ не зависит от выбора цепи d_1. Действительно, если d_1' — другая цепь, для которой $\partial d_1' = \partial d_1$, то $d_1' - d_1$ — цикл, а значит, граница (поскольку 2-мерные гомологии S^3 нулевые). Пусть e — 3-мерная цепь, для которой $d_1' - d_1 = \partial e$. Тогда $\langle\langle d_1' - d_1, c_2\rangle\rangle = \langle\langle \partial e, c_2\rangle\rangle = \langle\langle e, \partial c_2\rangle\rangle = 0$.

Нетрудно убедиться, что такое определение коэффициента зацепления эквивалентно другому определению, приведённому, например, в [Пр3]. Напомним, что там коэффициент зацепления замкнутых ориентированных кривых J и K определяется так. Рассмотрим диаграмму ориентированного зацепления, образованного этими кривыми. Будем учитывать только те перекрёстки, на которых кривая J проходит под K. Такие перекрёстки бывают двух типов (рис. 1.7). Для каждого рассматриваемого перекрёстка возьмём соответствующее значение $\varepsilon_i = \pm 1$ и сложим все числа ε_i. Полученное в результате число называют коэффициентом зацепления замкнутых ориентированных кривых J и K.

Чтобы убедиться в эквивалентности этих двух определений, расположим кривые c_1 и c_2 так, чтобы они выходили из плоскости диаграммы лишь в малых окрестностях перекрёстков. Поверхность d_1 можно выбрать так, чтобы она была расположена над плоскостью диаграммы за исключением малых окрестностей перекрёстков (рис. 1.8). Нас интересуют только перекрёстки, на которых кривая c_2 проходит над c_1. Им

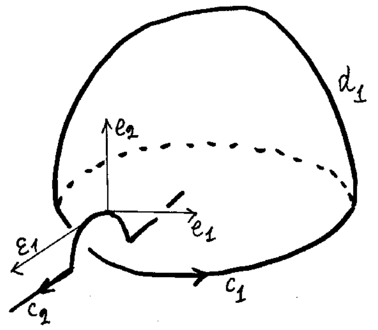

Рис. 1.8. Поверхность d_1

как раз соответствуют точки пересечения кривой c_2 с поверхностью d_1. Со знаками тоже всё в порядке. Например, на рис. 1.8 базис e_1, e_2, ε_1 положительно ориентирован (мы пользуемся теми же обозначениями, что и при определении индекса пересечения); это как раз соответствует положительному типу перекрёстка.

Коэффициент зацепления кривых J и K можно определить и многими другими способами. Построим, например, отображение $f : J \times K \to S^2$ следующим образом:

$$f(x, y) = \frac{K(y) - J(x)}{\|K(y) - J(x)\|}$$

(J и K мы одновременно рассматриваем и как окружности и как отображения $J, K : S^1 \to \mathbb{R}^3$).

Задача 1.5.11. *Докажите, что* $\deg f = \pm \operatorname{lk}(J, K)$. *Укажите, как нужно выбрать ориентации тора* $J \times K$ *и сферы* S^2, *чтобы выполнялось равенство* $\deg f = \operatorname{lk}(J, K)$.

Когомологии с компактными носителями и гомологии с замкнутыми носителями

Для некомпактных многообразий теорема двойственности Пуанкаре в том виде, как она была сформулирована, неверна. Это видно уже на примере многообразия $\mathbb{R}^n$. Тем не менее, для некомпактного многообразия тоже можно построить двойственные разбиения и после этого можно попытаться сопоставить цепи c_k коцепь c^{n-k}, а коцепи c^{n-k} цепь

c_k. Здесь нас, естественно, ожидает неудача, но можно проследить за тем, что происходит, и попытаться это исправить.

Напомним, что по определению любая цепь c_k является суммой конечного числа симплексов, поэтому когда мы сопоставляем цепи c_k коцепь c^{n-k}, в случае некомпактного многообразия у нас получаются не все коцепи, а лишь коцепи, каждая из которых обращается в нуль на симплексах, лежащих вне некоторого компактного множества. Такие коцепи называют *коцепями с компактными носителями*. Ясно, что применение оператора δ к коцепи с компактным носителем даёт коцепь с компактным носителем. Поэтому с помощью коцепей с компактными носителями можно построить группы *когомологий с компактными носителями* $H_c^k(K)$. Если K и K^* — двойственные разбиения ориентируемого многообразия, то мы получаем изоморфизм $H_k(K; R) \cong H_c^{n-k}(K^*; R)$; изоморфизм имеет место уже на уровне (ко)цепей.

Попытаемся теперь сопоставить коцепи c^{n-k} цепь c_k. Когда мы сопоставляли цепи коцепь, у нас получилось нечто меньшее, чем множество всех коцепей. Теперь наоборот получится нечто большее, чем множество всех цепей. А именно, получатся не конечные суммы симплексов, $\sum a_i \Delta_i^k$, а произвольные суммы k-мерных симплексов, в которые каждый симплекс входит с определённым коэффициентом, но самих симплексов может быть бесконечно много. Такие «цепи» называют *цепями с замкнутыми носителями*, потому что объединение всех симплексов, входящих в цепь с ненулевым коэффициентом, представляет собой замкнутое множество (возможно некомпактное).

Отметим, что при определении цепей с замкнутыми носителями для произвольных симплициальных комплексов нужно дополнительно потребовать, чтобы каждая точка принадлежала лишь конечному числу симплексов, входящих в сумму $\sum a_i \Delta_i^k$. Иначе может оказаться, что некий симплекс является гранью бесконечного числа симплексов, входящих в сумму $\sum a_i \Delta_i^k$, и поэтому цепь $\partial(\sum a_i \Delta_i^k)$ нельзя определить. Но для триангулированных многообразий каждый симплекс является гранью лишь конечного числа симплексов, поэтому оба условия эквивалентны.

С помощью цепей с замкнутыми носителями можно построить группы *гомологий с замкнутыми носителями* $H_k^{cl}(K)$. Если K и K^* — двойственные разбиения ориентируемого многообразия, то мы получаем изоморфизм $H_k^{cl}(K; R) \cong H^{n-k}(K^*; R)$; изоморфизм имеет место уже на уровне (ко)цепей.

Замечание. Обратите внимание, что группы $H_c^*(K)$ и $H_*^{cl}(K)$ в отли-

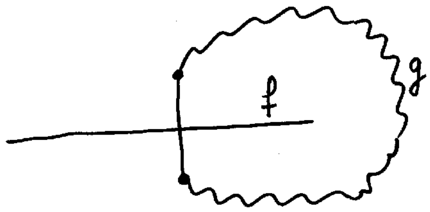

Рис. 1.9. Построение кривой g

чие от обычных групп когомологий и гомологий не являются гомотопическими инвариантами K. Например, $H_c^n(\mathbb{R}^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ и $H_n^{cl}(\mathbb{R}^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

1.5.4. Реализация гомологических классов поверхностей

Любая гладкая кривая $f : S^1 \to M^2$ индуцирует гомоморфизм $f_* : H_1(S^1) \to H_1(M^2)$. Будем говорить, что кривая f *реализует* гомологический класс $f_*[S^1] \in H_1(M^2)$. Достаточно очевидно, что если допустить самопересекающиеся кривые, то можно реализовать любой гомологический класс замкнутого двумерного многообразия M^2. Поэтому займёмся вопросом о реализации гомологических классов несамопересекающимися кривыми. Мы ограничимся рассмотрением только ориентируемых многообразий.

Будем называть гомологический класс α над $\mathbb{Z}$ *примитивным*, если $\alpha \neq m\beta$, где $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, и β — некоторый гомологический класс над $\mathbb{Z}$. Отметим, что если $m\alpha = 0$, то $\alpha = (m+1)\alpha$, поэтому элемент конечного порядка не может быть примитивным.

Теорема 1.5.7. *Предположим, что замкнутая несамопересекающаяся кривая f реализует гомологический класс $\alpha \in H_1(M^2)$, где M^2 — замкнутое ориентируемое многообразие. Тогда либо $\alpha = 0$, либо α — примитивный гомологический класс.*

Доказательство. (Самельсон) Если кривая f разбивает M^2, то $\alpha = 0$. Если же кривая f не разбивает M^2, то существует замкнутая несамопересекающаяся кривая g, трансверсально пересекающая f ровно

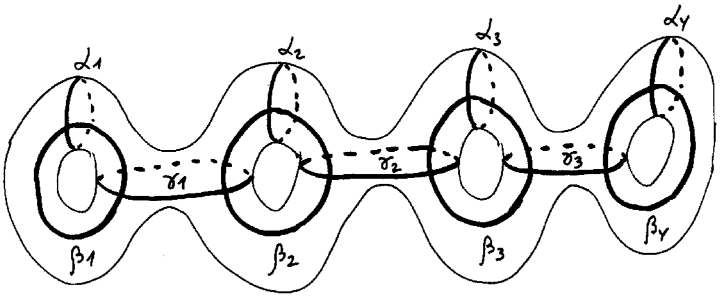

Рис. 1.10. Кривые на сфере с ручками

в одной точке. Чтобы построить такую кривую, нужно взять маленький отрезок, трансверсально пересекающий f, и соединить его концы кривой в $M^2 \setminus f$ (рис. 1.9). Пусть γ — гомологический класс, реализованный кривой g. Тогда $\langle\langle \alpha, \gamma \rangle\rangle = \pm 1$. С другой стороны, если $\alpha = m\beta$, то $\langle\langle \alpha, \gamma \rangle\rangle = m\langle\langle \beta, \gamma \rangle\rangle$. □

Замечание. Ориентируемостью многообразия мы пользовались для того, чтобы определить целое число $\langle\langle \alpha, \gamma \rangle\rangle$. Образующая группы $H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$ не примитивна, но она реализуется замкнутой несамопересекающейся кривой.

Теорема 1.5.8. *([Me]) Любой примитивный гомологический класс замкнутого ориентируемого многообразия M^2 реализуется замкнутой несамопересекающейся кривой.*

Доказательство. Чтобы упростить обозначения, будем обозначать кривую и представленный ей гомологический класс одинаково. На сфере с g ручками выберем кривые $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$, $\beta_1, \ldots, \beta_g$ и $\gamma_1, \ldots, \gamma_{g-1}$ так, как показано на рис. 1.10 (для $g = 4$). Гомологические классы $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$, $\beta_1, \ldots, \beta_g$ являются образующими 1-мерной группы гомологий. Гомологический класс $a_1\alpha_1 + \ldots + a_g\alpha_g + b_g\beta_1 + \ldots + b_g\beta_g$ будем обозначать $(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g)$. Этот класс примитивен тогда и только тогда, когда НОД$(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g) = 1$.

Для каждой замкнутой несамопересекающейся кривой γ на двумерной ориентируемой поверхности M^2 можно определить гомеоморфизм $M^2 \to M^2$, называемый *скручиванием Дена* вдоль кривой γ. А именно,

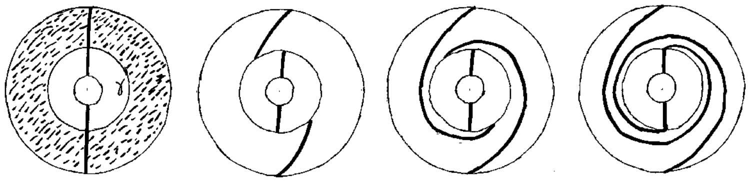

Рис. 1.11. Скручивание Дена

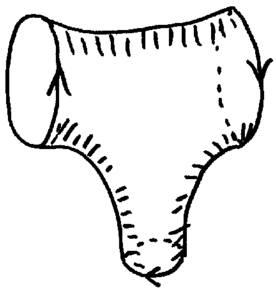

Рис. 1.12. Гомологичность циклов

рассмотрим малую окрестность кривой γ и выберем одну из двух частей, на которые её разбивает γ (на рис. 1.11 слева выбранная часть заштрихована). Сделаем разрез вдоль кривой γ и будем деформировать выбранную часть окрестности γ так, чтобы точки внешней границы оставались неподвижными, а точки кривой γ скользили по γ. После поворота на 360° точки разреза возвращаются на исходные места и в результате получается гомеоморфизм. Подробно скручивания Дена обсуждаются в [Пр3] и в [Пр1].

Если кривая α трансверсально пересекает кривую γ в одной точке, то скручивание Дена вдоль кривой γ переводит гомологический класс α в $\alpha \pm \gamma$ (знак определяется выбором направления вращения при скручивании Дена). Легко также проверить, что гомологический класс γ_k равен $\pm(\alpha_k - \alpha_{k+1})$ (см. рис. 1.12). Поэтому скручивания Дена следующим образом действуют на гомологические классы:

$$\alpha_k \xrightarrow{\beta_k} \alpha_k \pm \beta_k, \quad \beta_k \xrightarrow{\alpha_k} \beta_k \pm \alpha_k;$$
$$\beta_k \xrightarrow{\gamma_k} \beta_k \pm (\alpha_k - \alpha_{k+1}), \quad \beta_{k+1} \xrightarrow{\gamma_k} \beta_{k+1} \pm (\alpha_k - \alpha_{k+1}).$$

Пусть $(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g)$ — некоторый элемент группы $H_1(M^2)$. Используя алгоритм Евклида, с помощью скручиваний вдоль α_1 и β_1 этот элемент можно перевести в $(d_1, 0, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g)$, где $d_1 = \pm \text{НОД}(a_1, b_1)$. Аналогично полученный элемент можно перевести в $(d_1, 0, d_2, 0, \ldots, d_g, 0)$, где $d_k = \pm \text{НОД}(a_k, b_k)$.

Операции $(0, d_k) \xrightarrow{\beta_k} (d_k, d_k) \xrightarrow{\alpha_k} (d_k, 0)$ и $(d_k, 0, 0, d_{k+1}) \xrightarrow{\gamma_k} \xrightarrow{\gamma_k} (0, \pm d_k, 0, d_{k+1} \pm d_k)$ позволяют применить алгоритм Евклида к числам d_k и d_{k+1}. Поэтому можно последовательно получить элементы

$$(0, 0, \pm \text{НОД}(d_1, d_2), 0, d_3, \ldots),\ \ldots,\ (0, 0, \ldots, 0, \pm \text{НОД}(d_1, \ldots, d_g), 0).$$

Если исходный элемент $(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g)$ примитивен, то $\text{НОД}(d_1, \ldots, d_g) = \pm 1$, поэтому полученный элемент представлен кривой $\pm \alpha_g$. Это означает, что существует гомеоморфизм $h : M^2 \to M^2$, для которого отображение $h_* : H_1(M^2) \to H_1(M^2)$ переводит элемент $(a_1, \ldots, b_g)$ в элемент, представленный несамопересекающейся кривой. Образ этой кривой при гомеоморфизме h^{-1} представляет элемент $(a_1, \ldots, b_g)$. □

1.6. Эйлерова характеристика и теорема Лефшеца

1.6.1. Эйлерова характеристика

Пусть K — конечный симплициальный комплекс размерности n. Его *эйлеровой характеристикой* называют число

$$\chi(K) = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n,$$

где a_i — количество i-мерных симплексов в K.

Теорема 1.6.1. *Пусть $b_k = \dim H_k(K; F)$, где F — аддитивная группа некоторого поля. Тогда*

$$\chi(K) = b_0 - b_1 + b_2 - \ldots + (-1)^n b_n.$$

Доказательство. Из точности последовательности

$$0 \to Z_k(K; F) \xrightarrow{i} C_k(K; F) \xrightarrow{\partial} B_{k-1}(K; F) \to 0$$

следует, что $\dim Z_k + \dim B_{k-1} = \dim C_k = a_k$. Поэтому

$$\begin{aligned}\chi(K) &= \sum(-1)^k \dim Z_k + \sum(-1)^k \dim B_{k-1} = \\ &= \sum(-1)^k(\dim Z_k - \dim B_k) = \\ &= \sum(-1)^k \dim H_k(K;F),\end{aligned}$$

поскольку $H_k(K;F) = Z_k/B_k$. □

Следствие. *Эйлеровы характеристики гомотопически эквивалентных симплициальных комплексов одинаковы.*

Пример 1.6.1. $\chi(D^n) = 1$.

Пример 1.6.2. $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ нечётном}; \\ 2 & \text{при } n \text{ чётном}. \end{cases}$

Пример 1.6.3. $\chi(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ нечётном}; \\ 1 & \text{при } n \text{ чётном}. \end{cases}$

Пример 1.6.4. $\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1$.

Упражнение. *а) Пусть конечный симплициальный комплекс K покрыт двумя подкомплексами K_1 и K_2. Докажите, что*

$$\chi(K) = \chi(K_1) + \chi(K_2) - \chi(K_1 \cap K_2).$$

б) Пусть конечный симплициальный комплекс K покрыт подкомплексами K_1, K_2, ..., K_m. Докажите, что

$$\chi(K) = \sum \chi(K_i) - \sum_{i<j} \chi(K_i \cap K_j) + \sum_{i<j<k} \chi(K_i \cap K_j \cap K_k) - \dots$$

Задача 1.6.1. *Пусть K и L — конечные симплициальные комплексы, $p: K \to L$ — n-листное накрытие. Докажите, что $\chi(K) = n\chi(L)$.*

Задача 1.6.2. *Пусть K — конечный симплициальный комплекс, $f: K \to K$ — непрерывное отображение, для которого отображение $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n}$ тождественно. Докажите, что если $\chi(K) \not\equiv 0 \pmod{n}$, то отображение f имеет неподвижную точку.*

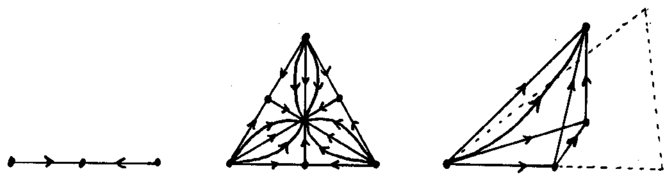

Рис. 1.13. Построение векторного поля

Для замкнутого многообразия M^n эйлерова характеристика определялась в части I как сумма индексов особых точек любого гладкого векторного поля (с изолированными особыми точками). С другой стороны, M^n можно триангулировать и вычислить эйлерову характеристику полученного симплициального комплекса. Эквивалентность этих двух определений вытекает из следующего утверждения.

Теорема 1.6.2. *Предположим, что замкнутое многообразий M^n триангулировано. Тогда на M^n существует гладкое векторное поле, особыми точками которого служат барицентры симплексов триангуляции, причём барицентр k-мерного симплекса имеет индекс $(-1)^k$.*

Доказательство. Построим на триангулированном многообразии M^n векторное поле индукцией по размерности остова. При этом дополнительные интегральные траектории при переходе от $(k-1)$-мерного остова к k-мерному для барицентров симплексов размерности k («новые» особые точки) будут входящими, а для барицентров симплексов размерности меньше k («старые» особые точки) будут выходящими. Построение этого векторного поля для симплексов размерности 1, 2 и 3 изображено на рис. 1.13.

В окрестности барицентра симплекса размерности k построенное векторное поле имеет вид $v(x) = Ax$, где

$$A = \operatorname{diag}(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k}, 1, \ldots, 1).$$

Индекс такой особой точки равен $(-1)^k$. □

Теорема 1.6.3. *Если M^{2n+1} — замкнутое многообразие, то $\chi(M^{2n+1}) = 0$.*

Доказательство. Одно доказательство этой теоремы уже было приведено в части I. Другое доказательство можно получить с помощью изоморфизма $H_k(M^{2n+1};\mathbb{Z}_2) \cong H_{2n+1-k}(M^{2n+1};\mathbb{Z}_2)$. Действительно, пусть $b_k = \dim H_k(M^{2n+1};\mathbb{Z}_2)$. Тогда $b_k = b_{2n+1-k}$, поэтому

$$\begin{aligned}\chi(M^{2n+1}) &= \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k b_k = \sum_{k=0}^{n}\big((-1)^k b_k + (-1)^{2n+1-k} b_{2n+1-k}\big) = \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(b_k - b_{2n+1-k}) = 0.\end{aligned}$$

□

Теорема 1.6.4. *Если* M^{2n} *— замкнутое многообразие, то* $\chi(M^{2n}) \equiv \dim H_n(M^{2n};\mathbb{Z}_2) \pmod 2$.

Доказательство. Пусть $b_k = \dim H_k(M^{2n};\mathbb{Z}_2)$. Тогда $b_k = b_{2n-k}$, поэтому

$$\begin{aligned}\chi(M^{2n}) &= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k b_k = b_n + \sum_{k=0}^{n-1}\big((-1)^k b_k + (-1)^{2n-k} b_{2n-k}\big) = \\ &= b_n + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(b_k + b_{2n-k}) \equiv b_n \pmod 2.\end{aligned}$$

□

Теорема 1.6.5. *Если замкнутое многообразие* M^m *является краем компактного многообразия* W^{m+1}*, то* $\chi(M^m)$ *— чётное число.*

Доказательство. Нужно рассмотреть лишь случай $m = 2n$, потому что иначе $\chi(M^m) = 0$. Триангулируем многообразие W^{2n+1} и рассмотрим замкнутое многообразие $\tilde{W}^{2n+1}$, которое получается из двух экземпляров W^{2n+1} склейкой их краёв M^{2n}. Одновременно $\tilde{W}^{2n+1}$ является симплициальным комплексом с подкомплексом M^{2n}. При этом все симплексы, не лежащие в M^{2n}, разбиты на пары. Следовательно, $\chi(\tilde{W}^{2n+1}) \equiv \chi(M^{2n}) \pmod 2$. Но $\chi(\tilde{W}^{2n+1}) = 0$. □

Следствие. *Многообразия* $\mathbb{R}P^{2n}$ *и* $\mathbb{C}P^{2n}$ *не являются краями компактных многообразий.*

Покажем, что многообразия $\mathbb{R}P^{2n+1}$ и $\mathbb{C}P^{2n+1}$ являются краями компактных многообразий. Для этого можно, например, воспользоваться следующим утверждением.

Теорема 1.6.6. *Пусть M^n — замкнутое многообразие и $\sigma : M^n \to M^n$ — гладкая инволюция без неподвижных точек, т.е. $\sigma(\sigma(x)) = x$ и $\sigma(x) \neq x$ для всех $x \in M^n$. Тогда M^n — край компактного многообразия.*

Доказательство. Рассмотрим факторпространство

$$W^{n+1} = (M^n \times [0,\, 1])/(x, 0) \sim (\sigma(x), 0).$$

Инволюция σ не имеет неподвижных точек, поэтому в W^{n+1} окрестность любой точки $(x, 0)$ гомеоморфна шару, который склеен из двух полушаров D_+^{n+1} и σD_+^{n+1}. Следовательно, W^{n+1} — многообразие с краем $M^n \times \{1\}$. □

Инволюции без неподвижных точек на $\mathbb{R}P^{2n+1}$ и $\mathbb{C}P^{2n+1}$ строятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma(x_0, x_1, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}) &= (-x_1, x_0, \dots, -x_{2n+1}, x_{2n}); \\ \sigma(z_0, z_1, \dots, z_{2n}, z_{2n+1}) &= (-\bar{z}_1, \bar{z}_0, \dots, -\bar{z}_{2n+1}, \bar{z}_{2n}). \end{aligned}$$

Упражнение. *Докажите, что ориентирующая накрывающая замкнутого многообразия является краем компактного многообразия.*

Теорема 1.6.7. *Если замкнутое многообразие M^{2n} является краем компактного многообразия, то размерность пространства $H_n(M^{2n}; \mathbb{Z}_2)$ чётна.*

Доказательство. Согласно теореме 1.6.4 $\chi(M^{2n}) \equiv \dim H_n(M^{2n}; \mathbb{Z}_2) \pmod 2$, а согласно теореме 1.6.5 число $\chi(M^{2n})$ чётно. □

Задача 1.6.3. *Дана конечная точная последовательность векторных пространств*

$$\dots \to V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i-1} \to \dots$$

Докажите, что $\sum (-1)^i \dim V_i = 0$.

Если A — конечный симплициальный комплекс, а B — его подкомплекс, то можно определить *эйлерову характеристику пары* (A, B) следующим образом:

$$\chi(A, B) = \sum (-1)^i \dim H_i(A, B),$$

где гомологии берутся с коэффициентами в некотором поле.

Задача 1.6.4. *Докажите, что* $\chi(A, B) = \chi(A) - \chi(B)$.

Задача 1.6.5. **[Wa1] Пусть K — евклидов клеточный комплекс, для которого $|K| \approx M^n$, где M^n — замкнутое многообразие. Рассмотрим альтернированную сумму*

$$\Psi(K) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij},$$

где α_{ij} — количество упорядоченных пар непересекающихся (замкнутых) граней K размерностей i и j. (Отметим, что $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ и α_{ii} — это удвоенное количество неупорядоченных пар непересекающихся граней размерности i.) Докажите, что $\Psi(K) = \chi^2(M^n) - \chi(M^n)$, где $\chi(M^n)$ — эйлерова характеристика многообразия M^n.

Нередко геометрические условия влекут разного рода условия на эйлерову характеристику. Одним из примеров такого рода являются транснормальные вложения (см. [Ro1]). Вложение многообразия M^k в $\mathbb{R}^n$ называют *транснормальным*, если из того, что точка $x \in M^k$ лежит в нормальном подпространстве в точке $y \in M^k$, следует, что нормальные подпространства в точках x и y совпадают. Примерами транснормальных вложений служат стандартные вложения $\mathbb{R}^k$ и S^k в $\mathbb{R}^n$. При изучении свойств транснормальных вложений весьма полезна функция $f(x) = \|x - a\|^2$ (см. часть I, с.???).

Задача 1.6.6. *Докажите, что число точек пересечения транснормально вложенного (связного) многообразия многообразия M^k не зависит от выбора нормальной плоскости. (Если это число равно r, то вложение называют* r-транснормальным.*)*

Задача 1.6.7. *Докажите, что если для замкнутого многообразия M^k существует r-транснормальное вложение, то число r чётно.*

Задача 1.6.8. *Докажите, что если для замкнутого многообразия M^k существует r-транснормальное вложение, то $\chi(M^k) = 0$ или r.*

Задача 1.6.9. *Пусть M^k — замкнутое многообразие, для которого существует транснормальное вложение. Докажите, что если $\chi(M^k) \neq 0$, то $H_i(M^k; G) = 0$ для всех нечётных i.*

1.6.2. Теорема Лефшеца о неподвижной точке

Пусть K — конечный симплициальный комплекс, $f : |K| \to |K|$ — непрерывное отображение. Индуцированное отображение $(f_*)_k : H_k(|K|; \mathbb{R}) \to H_k(|K|; \mathbb{R})$ является линейным оператором в конечномерном пространстве, поэтому можно рассмотреть его след $\operatorname{tr}(f_*)_k$. *Числом Лефшеца* отображения f называют число $\Lambda(f) = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \operatorname{tr}(f_*)_k$.

Если комплекс K линейно связен, то $(f_*)_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — тождественное отображение, поэтому $\operatorname{tr}(f_*)_0 = 1$.

Пример 1.6.5. *Если комплекс K ацикличен относительно коэффициентов $\mathbb{R}$, то $\Lambda(f) = 1$ для любого непрерывного отображения $f : |K| \to |K|$.*

Пример 1.6.6. $\Lambda(\mathrm{id}_K) = \chi(K)$.

Теорема 1.6.8 ([Le1]). *Если $\Lambda(f) \neq 0$, то отображение f имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Предположим, что отображение f не имеет неподвижных точек. Тогда из компактности K следует, что некоторое его подразделение K' обладает следующим свойством: для любой точки $x \in |K|$ расстояние между x и $f(x)$ во много раз больше наибольшего диаметра симплексов K'. Из этого, в свою очередь, следует, что если K'' — подразделение K' и $\varphi : K'' \to K'$ — симплициальная аппроксимация отображения f, то для любого симплекса $\Delta'' \subset K''$ множества Δ'' и $\varphi(\Delta'')$ не пересекаются. Таким образом, чтобы доказать теорему Лефшеца, достаточно дать такую интерпретацию числа $\Lambda(\varphi)$, что если $\Delta'' \cap \varphi(\Delta'') = \varnothing$ для всех симплексов $\Delta'' \subset K''$, то $\Lambda(\varphi) = 0$.

Лемма. *а)* (Хопф [Ho3]) *Пусть K — конечный симплициальный комплекс, $\varphi_k : C_k(K,\mathbb{R}) \to C_k(K,\mathbb{R})$ — цепное отображение. Тогда*

$$\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \operatorname{tr}\varphi_k = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \operatorname{tr}(\varphi_*)_k.$$

б) ([Sh2]) *Пусть K — конечный симплициальный комплекс, K' — его конечное подразделение, $\varphi : K' \to K$ — симплициальное отображение. Тогда*

$$\Lambda(\varphi) = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \Phi_k,$$

где Φ_k — количество k-мерных симплексов $\Delta^k \subset K$, для которых $\Delta^k \subset \varphi(\Delta^k)$, с учетом знака[1].

[1]Если симплексы Δ^k и $\varphi(\Delta^k)$ одинаково ориентированы, то берётся знак плюс, а если они противоположно ориентированы, то берётся знак минус.

Доказательство. а) Достаточно проверить, что

$$\operatorname{tr}\varphi_k = \operatorname{tr}(\varphi_k|_{B_k}) + \operatorname{tr}(\varphi_k)_* + \operatorname{tr}(\varphi_{k-1}|_{B_{k-1}}).$$

Пусть $C_k = Z_k \oplus \tilde{C}_k$. Линейный оператор φ_k переводит Z_k в Z_k, поэтому он индуцирует оператор $\tilde{\varphi}_k : \tilde{C}_k \to \tilde{C}_k$; при этом $\operatorname{tr}\varphi_k = \operatorname{tr}(\varphi_k|_{Z_k}) + \operatorname{tr}\tilde{\varphi}_k$.

Пусть $Z_k = B_k \oplus \tilde{Z}_k$. Тогда $\tilde{Z}_k \cong H_k(K;\mathbb{R})$ и оператор в пространстве $H_k(K;\mathbb{R})$, индуцированный оператором φ_k, совпадает с $(\varphi_*)_k$. Поэтому $\operatorname{tr}(\varphi_k|_{Z_k}) = \operatorname{tr}(\varphi_k|_{B_k}) + \operatorname{tr}(\varphi_*)_k$.

Отображение $\partial : C_k \to B_{k-1}$ индуцирует изоморфизм $\tilde{C}_k \to B_{k-1}$. Равенство $\partial\varphi_k = \varphi_{k-1}\partial$ показывает, что при этом изоморфизме оператор $\tilde{\varphi}_k$ переходит в φ_{k-1}.

б) Симплициальное отображение $\varphi : K' \to K$ индуцирует цепное отображение $\varphi_k : C_k(K';\mathbb{R}) \to C_k(K;\mathbb{R})$. Рассмотрим также цепное отображение $i_k : C_k(K;\mathbb{R}) \to C_k(K';\mathbb{R})$, которое сопоставляет симплексу $\Delta \subset K$, разрезанному на симплексы $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$, их сумму $\Delta_1 + \ldots + \Delta_s$ (ориентации этих симплексов согласованы с ориентацией Δ; формальное определение отображения i_k для барицентрического подразделения приведено на с. 18). Композиция $\varphi_k i_k : C_k(K;\mathbb{R}) \to C_k(K;\mathbb{R})$ сопоставляет симплексу Δ сумму симплексов $\varphi(\Delta_1) + \ldots + \varphi(\Delta_s)$. Поэтому $\Phi_k = \operatorname{tr}(\varphi_k i_k)$. Согласно (а)

$$\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \operatorname{tr}(\varphi_k i_k) = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \operatorname{tr}(\varphi_*)_k;$$

здесь мы пользуемся тем, что после отождествления $H_k(K';\mathbb{R})$ с $H_k(K;\mathbb{R})$ посредством изоморфизма i_* отображение гомологий, индуцированное цепным отображением $\varphi_k i_k$, совпадает с $(\varphi_*)_k$. $\square$

Теорема Лефшеца следует из утверждения (б) леммы, поскольку если $\Delta' \cap \varphi(\Delta') = \varnothing$ для всех симплексов $\Delta' \subset K'$, то $\Phi_k = 0$ для всех k. $\square$

Пример 1.6.7. *Для отображения $f : S^n \to S^n$ выполняется равенство $\Lambda(f) = 1 + (-1)^n \deg f$, поэтому если $\deg f \neq (-1)^{n+1}$, то отображение f имеет неподвижную точку.*

Следствие. *На сфере S^{2n} не существует непрерывного векторного поля без особых точек.*

Доказательство. Пусть v — векторное поле на S^{2n}, $v(x)$ — вектор этого поля в точке $x \in S^{2n}$, $f(x)$ — точка пересечения S^{2n} с лучом, идущим из центра сферы в конец вектора $v(x)$ (рис. 1.14). Ясно, что

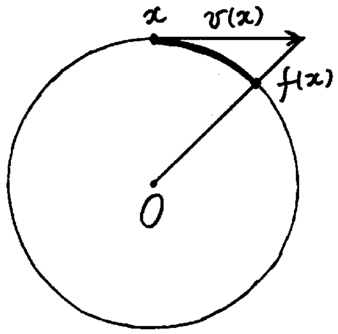

Рис. 1.14. Построение отображения f

$f \sim \mathrm{id}_{S^{2n}}$, поэтому $\deg f = 1 \neq -1 = (-1)^{2n+1}$. Следовательно, отображение f имеет неподвижную точку x_0; при этом $v(x_0) = 0$. □

Пример 1.6.8. *Для группы коэффициентов* $\mathbb{R}$ *пространство* $\mathbb{R}P^{2n}$ *ациклично, поэтому любое отображение* $f : \mathbb{R}P^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$ *имеет неподвижную точку.*

Задача 1.6.10. *Пусть* K *— конечный симплициальный комплекс,* $f : K \to K$ *— непрерывное отображение,* p *— простое число,* $f^p = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{p}$. *Докажите, что* $\Lambda(f^p) \equiv \Lambda(f) \pmod p$.

Глава 2.

Кольцо когомологий

2.1. Умножение в когомологиях

Применения когомологий во многом связаны с тем, что на множестве $H^*(K) = \oplus H^k(K)$ есть не только структура группы, но и структура кольца, задаваемая cup-произведением. Чтобы определить cup-произведение для симплициального комплекса, нужно занумеровать его вершины. Это определение неинвариантно на уровне коцепей, но оно инвариантно на уровне когомологий. Для доказательства инвариантности нам потребуется вспомогательный объект — тотальный цепной комплекс.

2.1.1. Гомологии тотального цепного комплекса

В некоторых случаях бывает удобно предполагать, что задана нумерация вершин симплекса. Важнейшие примеры подобных ситуаций — определение умножения в когомологиях и доказательство изоморфности сингулярных и симплициальных гомологий. Для этих целей попробуем определить гомологии симплициального комплекса, рассматривая не ориентированный симплексы, а упорядоченные наборы $(v_0, \ldots, v_k)$, где $v_0, \ldots, v_k$ — попарно различные вершины некоторого симплекса. Простейший пример показывает, что эта попытка неудачна. Действительно, при таком подходе для $K = [v_0, v_1]$ получаем, что группа $\operatorname{Ker} \partial_1$ порождена элементом $(v_0, v_1) + (v_1, v_0)$, а $\operatorname{Im} \partial_2 = 0$.

Причина этой неудачи достаточно понятна: мы фактически занялись вычислением гомологий CW-комплекса, гомеоморфного окружности (рис. 2.1). Удивительным образом положение очень легко исправля-

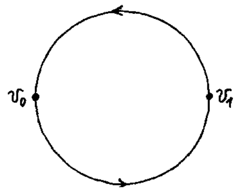

Рис. 2.1. CW-комплекс, гомеоморфный окружности

ется: достаточно отказаться от, казалось бы, естественного условия, что вершины $v_0, \ldots, v_k$ должны быть попарно различны. Это действительно неожиданное явление, потому что теперь для вычисления гомологий $K = [v_0, v_1]$ используется бесконечный цепной комплекс, имеющий 2^{k+1} образующих размерности k для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ Но зато теперь, по крайней мере, 1-мерная группа гомологий оказывается такой, как нужно. Действительно, группа $\operatorname{Ker} \partial_1$ порождена элементами $(v_0, v_1) + (v_1, v_0)$, (v_0, v_0) и (v_1, v_1), но все они входят в $\operatorname{Im} \partial_2$: $(v_0, v_0) = \partial(v_0, v_0, v_0)$, $(v_1, v_1) = \partial(v_1, v_1, v_1)$ и $(v_0, v_1) + (v_1, v_0) = \partial(v_0, v_1, v_0) + \partial(v_0, v_0, v_0)$.

Цепной комплекс $\hat{C}_*(K)$, порождённый упорядоченными наборами $(v_0, \ldots, v_k)$, где $v_0, \ldots, v_k$ — вершины одного и того же симплекса в K (среди них могут быть совпадающие), будем называть *тотальным*, или *упорядоченным*, цепным комплексом. Граничный гомоморфизм для $\hat{C}_*(K)$ определяется точно так же, как и для $C_*(K)$.

Теорема 2.1.1. *Пусть K — симплициальный комплекс, вершины которого занумерованы*[1]*. Тогда группы гомологий цепных комплексов $\hat{C}_*(K)$ и $C_*(K)$ канонически изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : \hat{C}_*(K) \to C_*(K)$, при котором $(v_0, \ldots, v_k)$ переходит в $[v_0, \ldots, v_k]$, если все точки $v_0, \ldots, v_k$ различны, и в 0, если среди этих точек есть совпадающие. Можно проверить, что φ — цепное отображение; это делается примерно так же, как при доказательстве того, что симплициальное отображение $K \to L$ индуцирует цепное отображение $C_*(K) \to C_*(L)$: снова нужно отдельно рассмотреть случай, когда среди точек $v_0, \ldots, v_k$ есть ровно две совпадающие. Рассмотрим также гомоморфизм $\Phi : C_*(K) \to \hat{C}_*(K)$, индуци-

[1] Или частично упорядочены так, что любое конечное множество вершин линейно упорядочено.

рованный нумерацией вершин комплекса. А именно, мы предполагаем, что ориентация симплекса задаётся упорядоченным набором вершин, номера которых идут в порядке возрастания; ориентированному симплексу сопоставляется именно этот упорядоченный набор вершин. Отображение Φ тоже цепное.

Отображение $\varphi\Phi : C_*(K) \to C_*(K)$ тождественно. Отображение $\Phi\varphi$ не тождественно, но оно цепно гомотопно тождественному. Чтобы доказать это, мы воспользуемся такими же рассуждениями, как и при доказательстве теоремы об ацикличных носителях (теорема 1.2.1 на с. 16). Но вместо того, чтобы сопоставлять симплексу $\Delta \subset K$ ацикличный подкомплекс $L(\Delta)$, мы сопоставим упорядоченному набору вершин $v = (v_0, \ldots, v_k)$, являющихся вершинами симплекса $\Delta_v \subset K$, цепной подкомплекс $\hat{C}_*(\Delta_v) \subset \hat{C}_*(K)$. При этом выполняются следующие свойства:

- если $\Delta' \subset \Delta$, то $\hat{C}_*(\Delta') \subset \hat{C}_*(\Delta)$;
- цепной комплекс $\hat{C}_*(\Delta_v)$ является носителем цепей $\Phi\varphi(v)$ и $v = \mathrm{id}(v)$.

Если v_0 — вершина, то $\Phi\varphi(v_0) = v_0 = \mathrm{id}(v_0)$. Поэтому остаётся проверить, что если z — цикл в $\hat{C}_k(\Delta_v)$, $k \geqslant 1$, то $z = \partial d$, где $d \in \hat{C}_{k+1}(\Delta_v)$. Каждой цепи $c \in \hat{C}_k(\Delta_v)$ можно сопоставить цепь $(v_0, c) \in \hat{C}_{k+1}(\Delta_v)$. При этом $\partial(v_0, c) = c - (v_0, \partial c)$ в случае $k \geqslant 1$. Если же z — цикл, то $z = \partial(v_0, z)$, поскольку $\partial z = 0$. $\square$

Любое симплициальное отображение $f : K \to L$ индуцирует гомоморфизм $\hat{f}_k : \hat{C}_k(K) \to \hat{C}_k(L)$, заданный формулой

$$\hat{f}_k((v_0, \ldots, v_k)) = (f(v_0), \ldots, f(v_k)).$$

Легко проверить, что $\hat{f}_k$ — цепное отображение (при проверке не нужно заботиться о том, чтобы точки $f(v_i)$ и $f(v_j)$ были различны).

Легко также проверить, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_k(\hat{C}_*(K)) & \xrightarrow{\hat{f}_*} & H_k(\hat{C}_*(L)) \\ \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* \\ H_k(K) & \xrightarrow{f_*} & H_k(L) \end{array}$$

коммутативна. Действительно, уже на уровне цепей выполняется равенство $f_k\varphi = \varphi\hat{f}_k$. Из равенства $f_*\varphi_* = \varphi_*\hat{f}_*$ следует равенство $\Phi_* f_* = \hat{f}_*\Phi_*$, поскольку $\Phi_* = \varphi_*^{-1}$ (но только на уровне гомологий, а не на уровне цепей).

2.1.2. Определение умножения в когомологиях

Тотальный цепной комплекс естественным образом задаёт коцепной комплекс. Когомологии тотального цепного комплекса тоже канонически изоморфны симплициальным когомологиям. Это следует из того, что цепно гомотопные цепные отображения индуцируют не только одинаковые отображения гомологий, но и одинаковые отображения когомологий. Чтобы доказать это, прежде всего отметим, что цепное отображение $\varphi_k : C_k \to C'_k$ индуцирует коцепное отображение $\varphi^k : \mathrm{Hom}(C'_k, G) \to \mathrm{Hom}(C_k, G)$. Пусть φ_k и ψ_k — цепно гомотопные цепные отображения и $\alpha = \varphi^k - \psi^k$. Тогда если c_2 — цикл, то

$$\langle \alpha c^1, c_2 \rangle = \langle c^1, (\partial D + D\partial) c_2 \rangle = \langle c^1, \partial D c_2 \rangle = \langle \delta c^1, D c_2 \rangle.$$

Ясно, что если c^1 — коцикл, то последнее выражение равно нулю.

Предположим, что группа коэффициентов R является аддитивной группой коммутативного ассоциативного кольца с единицей. Тогда для коцепей $c^p \in \hat{C}^p(K; R)$ и $c^q \in \hat{C}^q(K; R)$ можно определить их *cup-произведение* $c^p \smile c^q \in \hat{C}^{p+q}(K; R)$ следующим образом:

$$\langle c^p \smile c^q, (v_0, \ldots, v_{p+q}) \rangle = \langle c^p, (v_0, \ldots, v_p) \rangle \cdot \langle c^q, (v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}) \rangle;$$

здесь имеется в виду произведение $\langle c^p, (v_0, \ldots, v_p) \rangle$ и $\langle c^q, (v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}) \rangle$ как элементов кольца.

Для определённого таким образом умножения коцепей единицей является коцепь c^0, принимающая значение $1 \in R$ на каждой вершине v. Коцепь c^0 является коциклом. Действительно, если $c_1 = \sum a_i [v_{i1}, v_{i2}]$, то $\partial c_1 = \sum a_i v_{i1} - \sum a_i v_{i2}$, поэтому

$$\langle \delta c^0, c_1 \rangle = \langle c^0, \partial c_1 \rangle = \sum a_i - \sum a_i = 0.$$

Замечание. Cup-произведение можно определить и в несколько более общей ситуации. Пусть $c^p \in \hat{C}^p(K; G)$ и $c^q \in \hat{C}^q(K; G')$. Тогда коцепь $c^p \smile c^q \in \hat{C}^{p+q}(K; G \otimes G')$ задаётся формулой

$$\langle c^p \smile c^q, (v_0, \ldots, v_{p+q}) \rangle = \langle c^p, (v_0, \ldots, v_p) \rangle \otimes \langle c^q, (v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}) \rangle.$$

В том случае, когда $G = G' = R$ — аддитивная группа коммутативного кольца с единицей, умножение в кольце задаёт отображение $R \otimes R \to R$, и мы приходим к предыдущему определению.

Ясно, что cup-произведение билинейно и ассоциативно. Оказывается, что его можно перенести в когомологии благодаря следующему свойству.

Лемма. $\delta(c^p \smile c^q) = (\delta c^p) \smile c^q + (-1)^p c^p \smile (\delta c^q)$.

Доказательство. Значения коцепей $(\delta c^p) \smile c^q$ и $(-1)^p c^p \smile (\delta c^q)$ на $(v_0, \ldots, v_{p+q+1})$ равны

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant p+1} (-1)^i c^p(v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{p+1}) c^q(v_{p+1}, \ldots, v_{p+q+1}),$$

$$(-1)^p \sum_{p \leqslant i \leqslant p+q+1} (-1)^{i-p} c^p(v_0, \ldots, v_p) c^q(v_p, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{p+q+1}).$$

Последний член первой суммы сокращается с первым членом второй суммы, а сумма всех остальных членов этих сумм как раз равна значению коцепи $\delta(c^p \smile c^q)$ на $(v_0, \ldots, v_{p+q+1})$. □

Выражение для $\delta(c^p \smile c^q)$ показывает, что если z^p и z^q — коциклы, то $\delta(z^p \smile z^q)$ тоже коцикл. Кроме того, когомологический класс cup-произведения двух коциклов зависит только от их когомологических классов, поскольку

$$\begin{aligned} (z^p + \delta c^{p-1}) \smile z^q &= z^p \smile z^q + \delta(c^{p-1} \smile z^q), \\ z^p \smile (z^q + \delta c^{q-1}) &= z^p \smile z^q + (-1)^p \delta(z^p \smile c^{q-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, cup-произведение определено для когомологий.

Непосредственно из определений видно, что если $f : K \to L$ — симплициальное отображение, то $\hat{f}^*(c^p \smile c^q) = (\hat{f}^* c^p) \smile (\hat{f}^* c^q)$, где $\hat{f}^*$ — индуцированное отображение когомологий тотального цепного комплекса.

Изоморфизм $\varphi^* : H^*(K) \to H^*(\hat{C}_*(K))$ позволяет перенести cup-произведение в симплициальные когомологии. А именно, если α, $\beta \in H^*(K)$, то мы определим $\alpha \smile \beta$ как элемент $H^*(K)$, для которого $\varphi^*(\alpha \smile \beta) = (\varphi^* \alpha) \smile (\varphi^* \beta)$. На уровне коциклов cup-произведение в симплициальных когомологиях устроено так: коцикл $z^p \smile z^q$ лежит в том же самом классе когомологий, что и коцикл z, заданный формулой

$$\langle z, [v_0, \ldots, v_{p+q}] \rangle = \langle z^p, [v_0, \ldots, v_p] \rangle \cdot \langle z^q, [v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}] \rangle. \qquad (1)$$

Здесь предполагается, что вершины симплициального комплекса K занумерованы и мы записываем вершины ориентированного симплекса в порядке возрастания их номеров. Иначе формула (1) не задаёт никакого коцикла z, потому что при перестановке вершин $v_0, \ldots, v_{p+q}$ правая часть изменяется непредсказуемым образом.

Тотальный цепной комплекс нам был нужен для чисто технических целей. Теперь для сингулярных когомологий cup-произведение можно определить следующим образом. Фиксируем нумерацию вершин и положим

$$\langle c^p \smile c^q, [v_{i_0}, \dots, v_{i_{p+q}}]\rangle = \langle c^p, [v_{i_0}, \dots, v_{i_p}]\rangle \cdot \langle c^q, [v_{i_p}, v_{i_{p+1}}, \dots, v_{i_{p+q}}]\rangle,$$

где $i_0 < i_1 < \dots < i_{p+q}$. Такое умножение коцепей задаёт корректно определённое умножение классов когомологий, которое не зависит от выбора нумерации. Тотальный цепной комплекс нужен только для доказательства этого факта и для доказательства естественности cup-произведения в том смысле, что если $f : |K| \to |L|$ — непрерывное отображение, то $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$.

Умножение в когомологиях обладает следующим свойством *косокоммутативности*.

Теорема 2.1.2. *Если $\alpha \in H^p(K)$ и $\beta \in H^q(K)$, то $\alpha \smile \beta = (-1)^{pq}\beta \smile \alpha$.*

Доказательство. Пусть z^p и z^q — коциклы, представляющие α и β. Вычислим $z^p \smile z^q$, используя одну нумерацию вершин K, а $z^q \smile z^p$ — используя другую, а именно, противоположную. В результате получим

$$\begin{aligned}
\langle z^p \smile z^q, [v_0, \dots, v_{p+q}]\rangle &= \langle z^p, [v_0, \dots, v_p]\rangle \cdot \langle z^q, [v_p, \dots, v_{p+q}]\rangle, \\
\langle z^q \smile z^p, [v_{p+q}, \dots, v_0]\rangle &= \langle z^q, [v_{p+q}, \dots, v_p]\rangle \cdot \langle z^p, [v_p, \dots, v_0]\rangle.
\end{aligned}$$

Ясно также, что $[v_r, \dots, v_0] = (-1)^{r(r+1)/2}[v_0, \dots, v_r]$ и $(p+q)(p+q+1) - p(p+1) - q(q+1) = 2pq$. $\square$

Для относительных когомологий cup-произведение определяется точно так же, как и для абсолютных. При этом если $\alpha \in H^p(K, L_1)$ и $\beta \in H^q(K, L_2)$, то $\alpha \smile \beta \in H^{p+q}(K, L_1 \cup L_2)$. Действительно, пусть z^p и z^q — коциклы, представляющие α и β, $[v_0, \dots, v_{p+q}]$ — симплекс в $L_1 \cup L_2$. Симплекс $[v_0, \dots, v_{p+q}]$, как и любой симплекс из $L_1 \cup L_2$, целиком лежит в L_1 или в L_2. В первом случае $[v_0, \dots, v_p]$ лежит в L_1, а во втором случае $[v_p, \dots, v_{p+q}]$ лежит в L_2. Следовательно,

$$\langle z^p \smile z^q, [v_0, \dots, v_{p+q}]\rangle = \langle z^p, [v_0, \dots, v_p]\rangle \cdot \langle z^q, [v_p, \dots, v_{p+q}]\rangle = 0.$$

Поэтому коцикл $z^p \smile z^q$ лежит в $C^{p+q}(K, L_1 \cup L_2)$.

Задача 2.1.1. *Пусть $\alpha, \beta \in H^*(K, L)$. Докажите, что $(\alpha|_K) \smile \beta = \alpha \smile \beta$, где $\alpha|_K$ — образ элемента α при естественном гомоморфизме $H^*(K, L) \to H^*(K)$.*

Задача 2.1.2. *а) Пусть $K = \bigcup_{i=1}^n L_i$, где L_i — стягиваемые подкомплексы. Докажите, что для любых n элементов $\alpha_i \in H^{p_i}(K)$, $p_i > 0$, произведение $\alpha_1 \smile \dots \smile \alpha_n$ равно нулю.*

б) Докажите, что когомологическое умножение в ΣK тривиально, т.е. cup-произведение любых двух когомологических классов положительной размерности равно нулю.

Задача 2.1.3. *Пусть многообразие M^k вложено в S^n. Докажите, что в кольце $H^*(S^n, M^k)$ произведение любых двух классов положительной размерности равно нулю.*

Задача 2.1.4. *Пусть $A \subset X$ — подкомплекс, являющийся ретрактом.*

а) Докажите, что $H_*(X) = \operatorname{Im} i_* \oplus \operatorname{Ker} r_*$ и $H^*(X) = \operatorname{Ker} i^* \oplus \operatorname{Im} r^*$, где $i : A \to X$ — естественное включение, $r : X \to A$ — ретракция.

б) В случае когомологий докажите, что $\operatorname{Ker} i^*$ — идеал, а $\operatorname{Im} r^*$ — подкольцо.

Задача 2.1.5. *Опишите умножение в кольце $H^*(X \vee Y)$, если известны умножения в кольцах $H^*(X)$ и $H^*(Y)$.*

Задача 2.1.6. *Пусть $p, q \geqslant 1$. Докажите, что $S^p \vee S^q = (S^p \times \{x_0\}) \cup (\{y_0\} \times S^q)$ не является ретрактом $S^p \times S^q$.*

Задача 2.1.7. *а) Докажите, что при $m < n$ стандартно вложенное $\mathbb{R}P^m \subset \mathbb{R}P^n$ не является ретрактом.*

б) Докажите, что при $m < n$ стандартно вложенное $\mathbb{C}P^m \subset \mathbb{C}P^n$ не является ретрактом.

2.1.3. Кольца когомологий двумерных поверхностей

Вычислим теперь кольца когомологий замкнутых двумерных поверхностей исходя непосредственно из определения cup-умножения. Отметим, что если воспользоваться некоторыми общими теоремами о когомологиях многообразий, то требуемый результат можно получить без труда (см. § 2.2.3).

Для двумерных поверхностей нужно вычислить только cup-произведение элементов группы H^1, поскольку произведение элементов групп H^1 и H^2 лежит в $H^3 = 0$. Прежде чем заняться вычислениями, обсудим геометрический смысл коциклов и кограниц.

Каждому (ориентированному) k-мерному симплексу симплициального комплекса соответствует двойственная ему k-мерная коцепь, принимающая на нём значение 1 и обращающаяся в нуль на всех остальных k-мерных симплексах. Мы будем рассматривать только коцепи, являющиеся суммами коцепей, двойственных различным симплексам. Коцепи

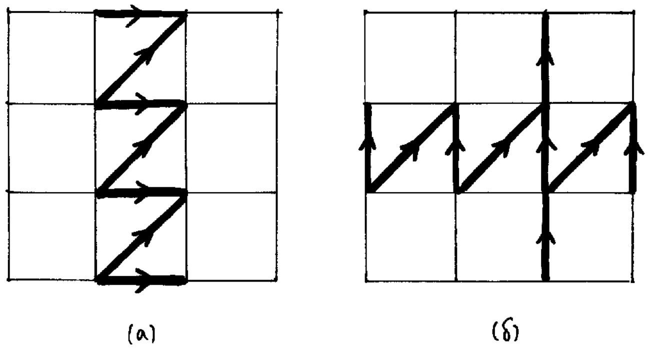

Рис. 2.2. Базисные коциклы на торе

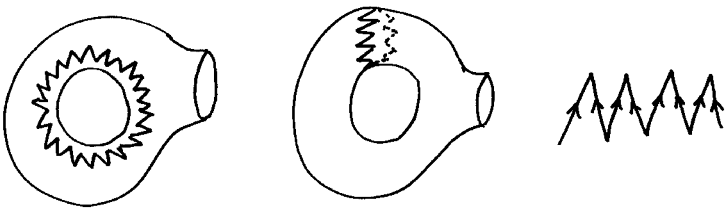

Рис. 2.3. Базисные коциклы на ручке

такого вида отождествляются с наборами ориентированных симплексов.

Формула $\langle \delta c^1, c_2 \rangle = \langle c^1, \partial c_2 \rangle$ показывает, что 1-мерная коцепь c^1 указанного вида является коциклом тогда и только тогда, когда для любого 2-мерного симплекса либо ни один из трёх 1-мерных симплексов его границы не входит в c^1, либо в c^1 входят ровно два из трёх симплексов границы, причём для коэффициентов $\mathbb{Z}$ они должны входить в c^1 с разными ориентациями по отношению к ориентации границы 2-мерного симплекса. Пример коцикла на торе изображён на рис. 2.2 (а); другой коцикл вместе с двойственным ему на уровне гомологий циклом изображён на рис. 2.2 (б). Эти два коцикла двойственны циклам, образующим базис гомологий тора, поэтому они образуют базис когомологий (как для коэффициентов $\mathbb{Z}$, так и для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$).

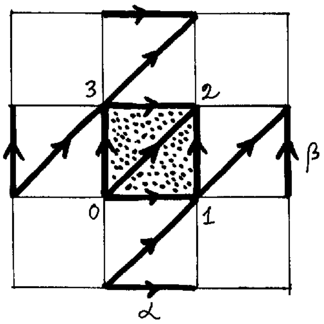

Рис. 2.4. Вычисление $\alpha \smile \beta$ для тора

Аналогичным образом строится базис когомологий для сферы с любым числом ручек. На рис. 2.3 изображены базисные коциклы для отдельной ручки. На том же рисунке справа показано, как ориентированы звенья ломаной.

Базис 2-мерных когомологий сферы с ручками образует любая коцепь, двойственная 2-мерному симплексу. Если симплексы $\Delta_1^2, \ldots, \Delta_p^2$ одинаково ориентированы, то коцепь $\sum a_i(\Delta_i^2)^*$ является образующей тогда и только тогда, когда $\sum a_i = \pm 1$. Это следует из того, что коцепи, двойственные одинаково ориентированным 2-мерным симплексам, когомологичны. Например, разность двух коцепей, двойственных одинаково ориентированным 2-мерным симплексам с общим ребром Δ^1, является кограницей коцепи, двойственной Δ^1.

Формула $\langle \alpha \smile \beta, [ijk] \rangle = \langle \alpha, [ij] \rangle \cdot \langle \beta, [jk] \rangle$ показывает, что при вычислении $\alpha \smile \beta$ нужно рассматривать лишь те 2-мерные симплексы, которые имеют общую границу как с α, так и с β. Для выбранных ранее базисных коциклов в 1-мерных когомологиях тора таких 2-мерных симплексов два (на рис. 2.4 они заштрихованы). При этом

$$\langle \alpha, [01] \rangle \cdot \langle \beta, [12] \rangle = 1, \quad \langle \alpha, [02] \rangle \cdot \langle \beta, [23] \rangle = 0,$$

поскольку $\langle \beta, [23] \rangle = 0$. Таким образом, $\alpha \smile \beta$ — базисный элемент 2-мерных когомологий тора.

Для коэффициентов $\mathbb{Z}$ из кососимметричности cup-произведения следует, что $\alpha \smile \alpha = 0$ для любого класса когомологий нечётной размерности. Но коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ бывают 1-мерные классы когомологий, для которых $\gamma \smile \gamma \neq 0$. Поэтому приведём доказательство равенств $\alpha \smile \alpha = 0$ и $\beta \smile \beta = 0$ для выбранных ранее базисных коциклов α и

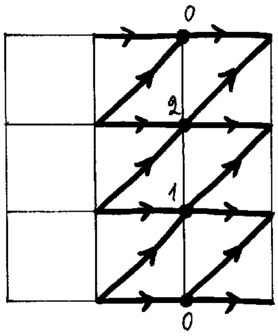

Рис. 2.5. Когомологичные коциклы на торе

β в 1-мерных когомологиях тора, которое годится как для коэффициентов $\mathbb{Z}$, так и для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$.

Коцикл α когомологичен коциклу α' (см. рис. 2.5). Чтобы это доказать, выясним, как устроена кограница коцепи, двойственной точке. Формула

$$\langle \delta c^0, [v_0, v_1] \rangle = \langle c^0, \partial [v_0, v_1] \rangle = \langle c^0, v_1 \rangle - \langle c^0, v_0 \rangle$$

показывает, что кограница коцепи, двойственной точке w_0, представляет собой сумму коцепей, двойственных 1-симплексам вида $[v, w_0]$, т.е. отрезкам, направленным в точку w_0. Поэтому если из коцикла α вычесть кограницу суммы коцепей, двойственных точкам 0, 1 и 2, то в результате получится коцикл α'.

На уровне когомологий выполняется равенство $\alpha \smile \alpha = \alpha \smile \alpha'$. Но ни один из 2-мерных симплексов не имеет общей границы одновременно с α и с α'. Поэтому $\alpha \smile \alpha' = 0$.

Аналогичные рассуждения можно применить к отдельным ручкам, пользуясь тем, что коцепь, двойственная любому 2-мерному симплексу, является образующей 2-мерной группы когомологий. В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 2.1.3. *В 1-мерных когомологиях сферы с n ручками (с коэффициентами $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_2$) можно выбрать базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ так, что $\alpha_i \smile \alpha_j = 0$, $\beta_i \smile \beta_j = 0$, $\alpha_i \smile \beta_j = 0$ при $i \neq j$ и $\alpha_i \smile \beta_i = \Lambda$, где Λ — образующая 2-мерных когомологий.*

При этом cup-произведение коциклов, относящихся к разным ручкам, равно нулю уже на уровне коцепей по очевидным причинам.

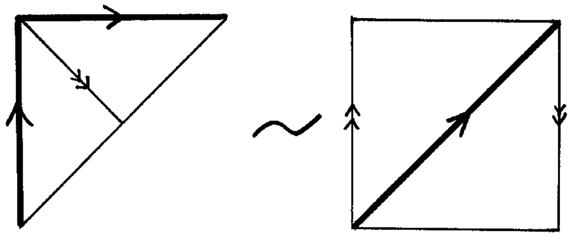

Рис. 2.6. Базисный цикл на листе Мёбиуса

Обратимся теперь к когомологиям неориентируемых двумерных поверхностей. В отличие от гомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}$ 2-мерные когомологии с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ замкнутой неориентируемой поверхности нетривиальны. Образующая группы 2-мерных когомологий устроена так. На многоугольнике, из которого склеена неориентируемая 2-мерная поверхность, все симплексы $\Delta_1^2, \ldots, \Delta_p^2$ можно ориентировать согласованным образом. Тогда коцепи $(\Delta_i^2)^*$ и $(\Delta_j^2)^*$, как и в ориентируемом случае, когомологичны. Но в неориентируемом случае найдутся два симплекса Δ_i^2 и Δ_j^2, которые на самой поверхности ориентированы противоположно. Поэтому на уровне когомологий выполняются равенства $(\Delta_i^2)^* = (\Delta_j^2)^*$ и $(\Delta_i^2)^* = -(\Delta_j^2)^*$, а значит, $2(\Delta_i^2)^* = 0$. В итоге получаем, что коцепь $\sum a_i(\Delta_i^2)^*$ является образующей группы когомологий тогда и только тогда, когда число $\sum a_i$ нечётно; если же число $\sum a_i$ чётно, то эта коцепь представляет нулевой класс когомологий.

Вычислим кольцо когомологий поверхности mP^2 с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$. Каждому листу Мёбиуса, вклеенному в S^2, соответствует одно прямое слагаемое $\mathbb{Z}_2$ в одномерных гомологиях и когомологиях. Для листа Мёбиуса, вклеенного в сферу, базисный цикл представляется диагональю прямоугольника (рис. 2.6). На рис. 2.7 базисный цикл изображён пунктиром; двойственный ему коцикл α изображён на том же рисунке ломаной.

При вычислении $\alpha \smile \alpha$ можно поступить так же, как и в случае ручки, т.е. заменить α на коцикл α', который получается из α добавлением некоторых кограниц коцепей, двойственных точкам. Но в неориентируемом случае полностью развести коциклы в разные стороны не удаётся, потому что A и B на рис. 2.8 (a) — это одна и та же точка. Добавим к α кограницы коцепей, двойственных точкам $A_1, A_2, \ldots, A_k$. В резуль-

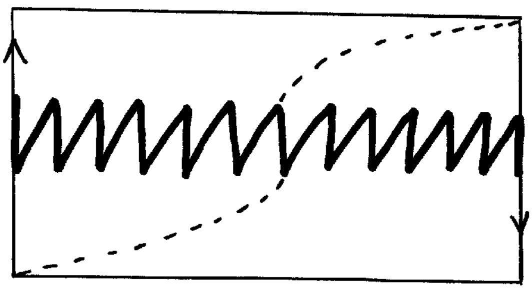

Рис. 2.7. Базисный коцикл на листе Мёбиуса

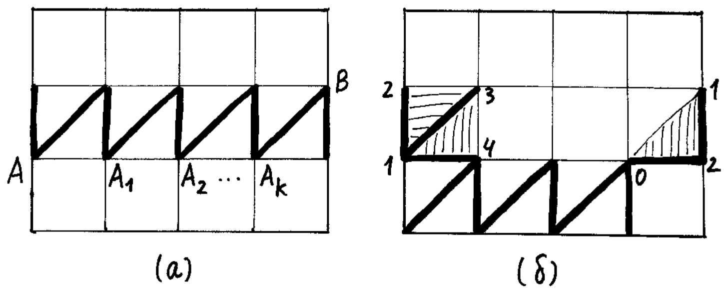

Рис. 2.8. Базисный коцикл α' на листе Мёбиуса

тате получим коцикл α', изображённый на рис. 2.8 (б). С коциклами α и α' имеют общую границу три 2-мерных симплекса; на рис. 2.8 (б) они заштрихованы. Занумеруем их вершины. Для такой нумерации, как на рис. 2.8 (б), получим

$$\begin{aligned}\langle\alpha\smile\alpha',[012]\rangle &= 1;\\ \langle\alpha\smile\alpha',[123]\rangle &= 0,\ \text{поскольку}\ \langle\alpha',[23]\rangle = 0;\\ \langle\alpha\smile\alpha',[134]\rangle &= 0,\ \text{поскольку}\ \langle\alpha',[34]\rangle = 0.\end{aligned}$$

Поэтому коцикл $\alpha\smile\alpha'$ представляет образующую 2-мерной группы когомологий. Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2.1.4. *В 1-мерных когомологиях с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ сферы с вклеенными m листами Мёбиуса можно выбрать базис $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ так, что $\alpha_i\smile\alpha_j=0$ при $i\neq j$ и $\alpha_i\smile\alpha_i=\Lambda$, где Λ — образующая 2-мерных когомологий.*

Задача 2.1.8. *Пусть M_1^2 и M_2^2 — замкнутые ориентируемые двумерные поверхности, отличные от сферы S^2.*

а) Пусть $f: M_1^2\to M_2^2$ — непрерывное отображение. Докажите, что гомоморфизм $f_2^*: H^2(M_2^2)\to H^2(M_1^2)$ полностью определяется гомоморфизмом $f_1^*: H^1(M_2^2)\to H^1(M_1^2)$.

б) Докажите, что существует гомоморфизм $h: H^1(M_2^2)\to H^1(M_1^2)$, который не может быть индуцирован никаким непрерывным отображением $f: M_1^2\to M_2^2$.

2.2. Гомологии и когомологии многообразий

Важнейшую роль при изучении гомологий и когомологий многообразий играет изоморфизм (двойственность) Пуанкаре, который выражается через cap-произведение. Cap-произведение определяется для произвольных симплициальных комплексов, но основные его применения связаны с многообразиями.

2.2.1. Cap-произведение

Cap-произведение — это билинейное отображение

$$\frown: H^p(K;R)\times H_{p+q}(K;R)\to H_q(K;R),$$

где R — аддитивная группа коммутативного ассоциативного кольца с единицей. Сар-произведение можно корректно определить для тотального цепного комплекса, а затем перенести в симплициальные гомологии и когомологии. Но мы не будем повторять эту процедуру, а сразу фиксируем нумерацию вершин комплекса и будем работать с симплициальными цепями и коцепями, не повторяя проверку корректности определений (на уровне гомологий и когомологий).

Мы будем предполагать, что симплициальный комплекс K линейно связен. Для $c^p \in C^p(K; R)$ положим

$$c^p \frown [v_0, \ldots, v_{p+q}] = \langle c^p, [v_q, \ldots, v_{p+q}]\rangle [v_0, \ldots, v_q];$$

здесь предполагается, что номера вершин $v_0, \ldots, v_{p+q}$ идут в порядке возрастания. При $q = 0$ полагаем

$$c^p \frown [v_0, \ldots, v_p] = \langle c^p, [v_0, \ldots, v_p]\rangle \in R \cong C_0(K; R).$$

Продолжая это отображение по линейности, получаем билинейное отображение

$$\frown\colon C^p(K; R) \times C_{p+q}(K; R) \to C_q(K; R),$$

Это отображение индуцирует отображение для (ко)гомологий благодаря следующему свойству.

Лемма. $\partial(d^p \frown c_{p+q}) = (-1)^q(\delta d^p \frown c_{p+q}) + d^p \frown \partial c_{p+q}$.

Доказательство. Требуемое равенство достаточно проверить для $c_{p+q} = [v_0, \ldots, v_{p+q}]$. Согласно определению

$$\begin{aligned} d^p \frown \partial[v_0, \ldots, v_{p+q}] = &\sum_{0 \leqslant i \leqslant q-1} (-1)^i \langle d^p, [v_q, \ldots, v_{p+1}]\rangle [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_q] + \\ &+ \sum_{q \leqslant i \leqslant p+q} (-1)^i \langle d^p, [v_{q-1}, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{p+q}]\rangle [v_0, \ldots, v_{q-1}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)^q \delta d^p \frown [v_0, \ldots, v_{p+q}] &= (-1)^q \langle \delta d^p, [v_{q-1}, \ldots, v_{p+q}]\rangle [v_0, \ldots, v_{q-1}] = \\ &= \sum_{q-1 \leqslant i \leqslant p+q} (-1)^{i+1} \langle d^p, [v_{q-1}, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{p+q}]\rangle [v_0, \ldots, v_q]. \end{aligned}$$

Если вторую сумму для первого выражения сложить со вторым выражением, то все слагаемые, кроме слагаемого с $i = q$, взаимно сокращаются. Ясно также, что если к первой сумме (для первого выражения) добавить это слагаемое, то как раз получится $\partial(d^p \frown [v_0, \ldots, v_{p+q}])$. □

Формула для $\partial(d^p \frown c_{p+q})$ показывает, что сар-произведение определено для (ко)гомологий.

Теорема 2.2.1. *Cap-произведение естественно в том смысле, что если $f : |K| \to |L|$ — непрерывное отображение, то $f_*(f^*\alpha \frown \beta) = \alpha \frown f_*(\beta)$.*

Доказательство. Требуемое равенство выполняется уже на уровне (ко)цепей:

$$\begin{aligned} f_*(f^*c^p \frown [v_0, \ldots, v_{p+q}]) &= f_*(\langle f^*c^p, [v_q, \ldots, v_{p+q}]\rangle [v_0, \ldots, v_q]) = \\ &= \langle f^*c^p, [v_q, \ldots, v_{p+q}]\rangle f_*[v_0, \ldots, v_q] = \\ &= \langle c^p, f_*[v_q, \ldots, v_{p+q}]\rangle f_*[v_0, \ldots, v_q] = \\ &= c^p \frown f_*[v_q, \ldots, v_{p+q}]. \end{aligned}$$

□

Теорема 2.2.2. *Cap-произведение двойственно cup-произведению в том смысле, что*

$$\langle \alpha^q, \beta^p \frown \gamma_{p+q}\rangle = \langle \alpha^q \smile \beta^p, \gamma_{p+q}\rangle.$$

Доказательство. Требуемое равенство выполняется уже на уровне (ко)цепей:

$$\begin{aligned} \langle c^q, c^p \frown [v_0, \ldots, v_{p+q}]\rangle &= \langle c^q, \langle c^p, [v_q, \ldots, v_{p+q}]\rangle [v_0, \ldots, v_q]\rangle \\ &= \langle c^q, [v_0, \ldots, v_q]\rangle \langle c^p, [v_q, \ldots, v_{p+q}]\rangle \\ &= \langle c^q \smile c^p, [v_0, \ldots, v_{p+q}]\rangle. \end{aligned}$$

□

Теорема 2.2.3. *Cap-произведение и cup-произведение связаны формулой*

$$\alpha^p \frown (\beta^q \frown \gamma_{p+q+r}) = (\alpha^p \smile \beta^q) \frown \gamma_{p+q+r}.$$

Доказательство. Требуемое равенство выполняется уже на уровне (ко)цепей. Если $\gamma_{p+q+r} = [v_0, \ldots, v_{p+q+r}]$, то оба выражения равны

$$\langle \alpha^p, [v_r, \ldots, v_{r+p}]\rangle \langle \beta^q, [v_{r+p}, \ldots, v_{p+q+r}]\rangle [v_0, \ldots, v_r].$$

□

В относительном случае аналогичное определение cap-произведения даёт отображение

$$\frown : H^p(K, L_1) \times H_{p+q}(K, L_1 \cup L_2) \to H_q(K, L_2).$$

Действительно, пусть симплекс $[v_0, \ldots, v_{p+q}]$ лежит в $L_1 \cup L_2$. Тогда он целиком лежит в L_1 или в L_2. Если он лежит в L_1, то любая коцепь из $C^p(K, L_1)$ принимает нулевое значение на симплексе $[v_q, \ldots, v_{p+q}]$, а если он лежит в L_2, то симплекс $[v_0, \ldots, v_q]$ соответствует нулевому элементу группы $C_q(K, L_2)$.

Важное значение cap-произведения в топологии многообразий связано с тем, что определённый на с. 56 изоморфизм (двойственность) Пуанкаре $H^{n-k}(M^n; R) \to H_k(M^n; R)$, где M^n — замкнутое многообразие ($R = \mathbb{Z}_2$, если M^n неориентируемо), с помощью cap-произведения описывается следующим образом.

Теорема 2.2.4. *Изоморфизм Пуанкаре имеет вид* $\alpha^{n-k} \mapsto \alpha^{n-k} \frown [M^n]$, *где* $[M^n]$ *— фундаментальный класс многообразия* M^n.

Доказательство. Пусть K — триангуляция многообразия M^n, K' — её барицентрическое подразделение. Занумеруем вершины K' так, чтобы наименьшие номера имели вершины K, за ними шли барицентры 1-мерных симплексов K, затем барицентры 2-мерных симплексов и т.д. В качестве представителя гомологического класса $[M^n]$ выберем сумму $\sum \pm[v_0, \ldots, v_n]$, где суммирование ведётся по всем симплексам K', вершины которых записаны в порядке возрастания их номеров; знак соответствует согласованности ориентаций симплекса и многообразия.

Нумерация вершин K' выбрана так, что любой симплекс $[v_0, \ldots, v_k]$ содержится в одном из k-мерных симплексов σ_i, входящих в K. Вершина v_k однозначно задаёт k-мерный симплекс σ_i. При этом $(n-k)$-мерная клетка σ_i^* представляется в виде $\sum \pm[v_k, \ldots, v_n]$; здесь вершины снова записаны в порядке возрастания номеров.

На уровне (ко)цепей при изоморфизме Пуанкаре цепи $c_k = \sum a_i \sigma_i$ сопоставляется коцепь c^{n-k}, для которой $\langle c^{n-k}, \sigma_i^* \rangle = a_i$. Поэтому

$$\begin{aligned} c^{n-k} \frown \sum \pm[v_0, \ldots, v_n] &= \sum \langle c^{n-k}, \pm[v_k, \ldots, v_n] \rangle [v_0, \ldots, v_k] = \\ &= \langle c^{n-k}, \sigma_i^* \rangle = \sum a_i \sigma_i = c_k, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Теперь можно объединить эти два подхода к двойственности Пуанкаре и извлечь из этого важные следствия:

- отображение $\alpha^{n-k} \mapsto \alpha^{n-k} \frown [M^n]$ является изоморфизмом $H^{n-k}(M^n; R)$ на $H_k(M^n; R)$;
- сопоставление цепи c_k коцепи c^{n-k}, не инвариантное на уровне (ко)цепей, инвариантно на уровне (ко)гомологий.

С помощью инвариантного определения двойственности Пуанкаре можно также получить инвариантное определение индекса пересечения циклов, представляющих гомологические классы циклов $\alpha_k \in H_k(M^n;R)$ и $\beta_{n-k} \in H_{n-k}(M^n;R)$. А именно, пусть $\alpha_k = \alpha^{n-k} \frown [M^n]$ и $\beta_{n-k} = \beta^k \frown [M^n]$. Тогда

$$\langle\langle \alpha_k, \beta_{n-k}\rangle\rangle = (\alpha^{n-k} \smile \beta^k) \frown [M^n] = \langle \alpha^{n-k} \smile \beta^k, [M^n]\rangle. \qquad (1)$$

Действительно, пусть на уровне цепей $\alpha_k = \sum a_i\sigma_i$ и $\beta_{n-k} = \sum b_i\sigma_i^*$. Тогда

$$\begin{aligned}(\alpha^{n-k} \smile \beta^k) \frown [M^n] &= \alpha^{n-k} \frown (\beta^k \frown [M^n]) = \alpha^{n-k} \frown \beta_{n-k} = \\ &= \langle \alpha^{n-k}, \sum b_i\sigma_i^*\rangle = \sum b_i\langle \alpha^{n-k}, \sigma_i^*\rangle = \sum b_i a_i.\end{aligned}$$

Формулу (1) можно переписать по-другому, чтобы выразить cup-произведение через индекс пересечения. А именно, пусть Λ — такой элемент $H^n(M^n;R)$, что $\Lambda \frown [M^n] = 1 \in H_0(M^n;R) \cong R$. Тогда

$$\alpha_{n-k} \smile \beta^k = \langle\langle \alpha_k, \beta_{n-k}\rangle\rangle\Lambda. \qquad (2)$$

Из формулы (1) и кососкоммутативности cup-произведения следует, что

$$\langle\langle \alpha_k, \beta_{n-k}\rangle\rangle = (-1)^{k(n-k)}\langle\langle \beta_{n-k}, \alpha_k\rangle\rangle \qquad (3)$$

Формула (3) очевидна на уровне цепей, если в качестве представителей классов α_k и β_{n-k} выбраны цепи из цепных комплексов $C_k(K)$ и $C_{n-k}(K^*)$. Поэтому формула (3) следует также непосредственно из инвариантности определения индекса пересечения.

Задача 2.2.1. *а) Вычислите кольцо когомологий $S^k \times S^k$ с коэффициентами $\mathbb{Z}$.*

б) Найдите индекс самопересечения диагонали в $S^k \times S^k$.

Задача 2.2.2. *Докажите, что при $m, n > 0$ любое отображение $f : S^{n+m} \to S^n \times S^m$ индуцирует тривиальное отображение $f^* : H^{n+m}(S^n \times S^m) \to H^{n+m}(S^{n+m})$.*

2.2.2. Двойственность Лефшеца

Теорема двойственности Лефшеца обобщает теорему двойственности Пуанкаре на случай компактных ориентируемых многообразий с краем. Она устанавливает изоморфизм между группами $H^{n-k}(M^n)$ и $H_k(M^n, \partial M^n)$ и между группами $H^{n-k}(M^n, \partial M^n)$ и $H_k(M^n)$. Оба изоморфизма задаются одной и той же формулой $x \mapsto x \frown [M^n]$, где

$[M^n] \in H_n(M^n, \partial M^n)$ — фундаментальный класс. Дело в том, что сарумножение

$$\frown\colon H^{n-k}(K, L_1) \times H_n(K, L_1 \cup L_2) \to H_k(K, L_2),$$

где $K = M^n$ и $L_1 \cap L_2 = \partial M^n$, можно задать двумя разными способами. Во-первых, можно положить $L_1 = \varnothing$ и $L_2 = \partial M^n$, а во-вторых, можно положить $L_1 = \partial M^n$ и $L_2 = \varnothing$.

При доказательстве теоремы двойственности Лефшеца нам понадобится следующее утверждение, которое часто бывает полезно при работе с многообразиями с краем.

Теорема 2.2.5 (о воротнике). *Пусть M^n — компактное многообразие с краем ∂M^n. Тогда существует гладкое вложение $F : \partial M^n \times [0,\, 1) \to M^n$, для которого $F(x, 0) = x$ при $x \in \partial M^n$.*

Доказательство. Рассмотрим координатные окрестности в M^n и выберем среди них конечный набор $U_1, \ldots, U_m$, покрывающий ∂M^n. Пусть $\{\lambda_i\}$ — гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию $\{U_i \cap \partial M^n\}$. Множество U_i можно отождествить с подмножеством в $\mathbb{R}^n$ так, чтобы ∂M^n задавалось уравнением $x_1 = 0$ и вектор $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ был направлен внутрь M^n. Рассмотрим на множестве U_i векторное поле $w_i(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_i(x_2, \ldots, x_n)e_i$. На множестве $U = \bigcup_{i=1}^m U_i$ определено векторное поле $\sum_{i=1}^m w_i$; это векторное поле нигде не обращается в нуль и на ∂M^n направлено внутрь M^n. Пусть $H_t(x)$ — сдвиг точки x за время t по траектории этого векторного поля. Из компактности ∂M^n следует, что можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, что сдвиг $H_t(x)$ будет определён для всех $x \in \partial M^n$ и всех $t \in [0, \varepsilon]$. Отображение $F(x, t) = H_t(x)$ является требуемым гладким вложением $\partial M^n \times [0, \varepsilon) \to M^n$. □

Пусть M — компактное многообразие с краем ∂M. Рассмотрим замкнутое многообразие $\tilde{M}$, которое получено из двух экземпляров многообразия M отождествлением соответствующих точек их краёв; эти экземпляры будем обозначать M и M'. Из теоремы о воротнике следует, что в $\tilde{M}$ можно выбрать подмногообразие $N \approx \partial M^n \times [-1, 1]$ (∂M соответствует подмножеству $\partial M \times \{0\}$) так, что замыкание $\tilde{M} \setminus N$ состоит из двух непересекающихся подмножеств L и L', гомеоморфных M (рис. 2.9). Многообразие $\tilde{M}$ можно триангулировать так, чтобы его подмногообразия N, L и L' были подкомплексами.

Запишем относительную последовательность Майера–Вьеториса

$$\to H_k(\tilde{M}, L \cap L') \to H_k(\tilde{M}, L') \oplus H_k(\tilde{M}, L) \to H_k(\tilde{M}, L \cup L') \to$$

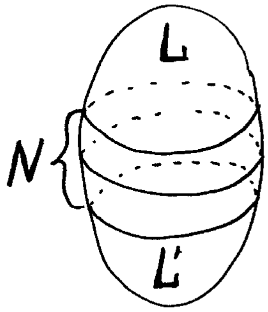

Рис. 2.9. Многообразие $\tilde{M}$

В этой последовательности $H_k(\tilde{M}, L \cap L') \cong H_k(\tilde{M})$, поскольку $L \cap L' = \varnothing$. Чтобы преобразовать остальные группы гомологий мы воспользуемся изоморфизмом $H_*(A, B) \cong H_*(A \cup C, B \cup C)$, где $A \cup C$ — симплициальный комплекс, A и C — его подкомплексы, B — подкомплекс A. Этот изоморфизм очевиден уже на уровне относительных цепей.

Ясно, что пары $(\tilde{M}, M')$ и $(\tilde{M}, L')$ гомотопически эквивалентны и $(\tilde{M}, M') = (M \cup M', \partial M \cup M')$, поэтому $H_k(\tilde{M}, L') \cong H_k(M, \partial M)$. Кроме того, $(\tilde{M}, L \cup L') = \big(N \cup (L \cup L'), \partial N \cup (L \cup L')\big)$, поэтому $H_k(\tilde{M}, L \cup L') \cong H_k(N, \partial N)$. Покажем, что $H_k(N, \partial N) \cong H_{k-1}(\partial M)$ при $k > 1$. Если к N приклеить два экземпляра конусов над ∂M, то получится симплициальный комплекс, гомеоморфный $\Sigma(\partial M)$. Поэтому $H_k(N, \partial N) \cong H_k\big(\Sigma(\partial M), C \cup C'\big)$, где $C' \approx C = C(\partial M)$. Точная последовательность пары $\big(\Sigma(\partial M), C \cup C'\big)$ показывает, что $H_k(N, \partial N) \cong H_k\big(\Sigma(\partial M)\big)$ при $k > 1$. Кроме того, $H_k\big(\Sigma(\partial M)\big) \cong H_{k-1}(\partial M)$.

В новой точной последовательности

$$\to H_k(\tilde{M}) \to H_k(M, \partial M) \oplus H_k(M', \partial M') \to H_{k-1}(\partial M) \to H_{k-1}(\tilde{M}) \to$$

гомоморфизм $H_k(M, \partial M) \to H_{k-1}(\partial M)$ представляет собой композицию гомоморфизмов

$$H_k(M, \partial M) \to H_k(N, \partial N) \to H_k\big(\Sigma(\partial M), C \cup C'\big) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(\partial M),$$

поэтому он совпадает с гомоморфизмом ∂_*, который сопоставляет относительному циклу его абсолютную границу. Остальные два гомоморфизма индуцированы вложениями.

Запишем ещё одну последовательность Майера–Вьеториса, на этот раз абсолютную:

$$\to H^{n-k}(\tilde{M}) \to H^{n-k}(M) \oplus H^{n-k}(M') \to H^{n-k}(\partial M) \to$$

Эту точную последовательность можно отобразить в первую точную последовательность следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & H^{n-k}(\tilde{M}) & \to & H^{n-k}(M)\oplus H^{n-k}(M') & \to & H^{n-k}(\partial M) & \to & H^{n-k+1}(\tilde{M}) & \to \\
& \big\downarrow{\scriptstyle \frown[\tilde{M}]} & & \big\downarrow{\scriptstyle \frown[M]\oplus[M']} & & \big\downarrow{\scriptstyle \frown[\partial M]} & & \big\downarrow{\scriptstyle \frown[\tilde{M}]} & \\
\to & H_k(\tilde{M}) & \to & H_k(M,\partial M)\oplus H_k(M',\partial M') & \to & H_{k-1}(\partial M) & \to & H_{k-1}(\tilde{M}) & \to
\end{array}$$

В полученной диаграмме левый квадрат коммутативен, потому что все встречающиеся там операции (в том числе и переход от $[\tilde{M}]$ к $[M]$ и $[M']$) индуцированы вложениями и ограничениями.

Средний квадрат тоже коммутативен, потому что если z^{n-k} — коцикл, то $\partial(z^{n-k} \frown [M]) = (-1)^k(\delta z^{n-k} \frown [M]) + z^{n-k} \frown \partial[M] = z^{n-k} \frown [\partial M]$.

В правом квадрате верхнее отображение $H^{n-k}(\partial M) \to H^{n-k+1}(\tilde{M})$ устроено следующим образом. Возьмём коцикл $z^{n-k} \in C^{n-k}(\partial M)$. Ему можно сопоставить коцепь $c^{n-k} \in C^{n-k}(M)$, ограничение которой на ∂M совпадает с z^{n-k}. Рассмотрим в $C^{n-k+1}(\tilde{M})$ коцепь d^{n-k+1}, которая совпадает с δc^{n-k} на M и равна нулю вне M (это можно сделать, потому что δc^{n-k} обращается в нуль на ∂M). Искомое отображение имеет вид $[z^{n-k}] \mapsto [d^{n-k+1}]$. Нижнее отображение $i_* : H_{k-1}(\partial M) \to H_{k-1}(\tilde{M})$ в этом квадрате индуцировано включением. Ясно, что $d^{n-k+1} \frown [\tilde{M}] = \delta c^{n-k} \frown [M]$ и $i_*(z^{n-k} \frown [\partial M]) = i_*\big(i^*(c^{n-k}) \frown [\partial M]\big) = c^{n-k} \frown i_*[\partial M] = c^{n-k} \frown [\partial M]$. Наконец, равенство $\partial(c^{n-k} \frown [M]) = (-1)^k(\delta c^{n-k} \frown [M]) + c^{n-k} \frown [\partial M]$ показывает, что цепи $(-1)^{k+1}\delta c^{n-k} \frown [M]$ и $c^{n-k} \frown [\partial M]$ отличаются на границу, т.е. они лежат в одном классе гомологий. Таким образом, правый квадрат коммутативен с точностью до знака.

Мы построили диаграмму, которая коммутативна с точностью до знака. Отображения $\frown [\tilde{M}]$ и $\frown [\partial M]$ в этой диаграмме являются изоморфизмами в силу теоремы двойственности Пуанкаре. Поэтому из 5-леммы следует, что отображение $H^{n-k}(M) \xrightarrow{\frown[M]} H_k(M, \partial M)$ является изоморфизмом.

Аналогично можно построить диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & H^{n-k+1}(\partial M) & \longrightarrow & H^{n-k}(M,\partial M)\oplus H^{n-k}(M',\partial M) & \longrightarrow & H^{n-k}(\tilde M) & \longrightarrow \\
& \Big\downarrow{\scriptstyle \frown[\partial M]} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \frown[M]\oplus[M']} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \frown[\tilde M]} & \\
\longrightarrow & H_k(\partial M) & \longrightarrow & H_k(M)\oplus H^k(M') & \longrightarrow & H_k(\tilde M) & \longrightarrow
\end{array}$$

и показать, что отображение $H^{n-k}(M,\partial M)\xrightarrow{\frown[M]}H_k(M)$ является изоморфизмом. В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 2.2.6 (двойственность Лефшеца [Le2]). *Пусть M^n — компактное ориентируемое многообразие с краем ∂M^n. Тогда отображения $H^{n-k}(M)\xrightarrow{\frown[M]}H_k(M,\partial M)$ и $H^{n-k}(M,\partial M)\xrightarrow{\frown[M]}H_k(M)$ являются изоморфизмами.*

Такие же изоморфизмы имеют место и для (ко)гомологий с коэффициентами R, где R — аддитивная группа коэффициентов некоторого кольца.

Для неориентируемого многообразия такие изоморфизмы имеют место в случае коэффициентов $\mathbb{Z}_2$.

Из теоремы двойственности Лефшеца можно вывести ещё одну важную теорему двойственности.

Теорема 2.2.7 (двойственность Александера [Al1]). *Пусть $M \subsetneqq S^n$ — замкнутое подмногообразие. Тогда $\tilde H^k(M)\cong \tilde H_{n-k-1}(S^n\setminus M)$ при $0\leqslant k\leqslant n-1$.*

Доказательство. Начнём с того, что докажем изоморфизм $H^k(S^n,M)\cong H_{n-k}(S^n\setminus M)$. Выколов из S^n точку $x\notin M$, отождествим $S^n\setminus\{x\}$ с $\mathbb{R}^n$ и применим к $M\subset\mathbb{R}^n$ теорему о трубчатой окрестности. Пусть M_ε — открытая трубчатая окрестность M. Тогда пара (S^n,M) гомотопически эквивалентна (S^n,M_ε), а пространство $S^n\setminus M$ гомотопически эквивалентно $S^n\setminus M_\varepsilon$. Согласно теореме двойственности Лефшеца $H^k(S^n\setminus M_\varepsilon,\partial M_\varepsilon)\cong H_{n-k}(S^n\setminus M_\varepsilon)$. Кроме того, $H^k(S^n\setminus M_\varepsilon,\partial M_\varepsilon)\cong H^k(S^n,M_\varepsilon)\cong H^k(S^n,M)$ и $H_{n-k}(S^n\setminus M_\varepsilon)\cong H_{n-k}(S^n\setminus M)$.

Чтобы получить требуемый изоморфизм, рассмотрим точную последовательности пары (S^n,M):

$$\tilde H^k(S^n)\to\tilde H^k(M)\xrightarrow{\delta^*}H^{k+1}(S^n,M)\to\tilde H^{k+1}(S^n).$$

Если k отлично от $n-1$, то $\tilde H^k(S^n)=\tilde H^{k+1}(S^n)=0$, поэтому δ^* — изоморфизм. Следовательно, $\tilde H^k(M)\cong H^{k+1}(S^n,M)\cong H_{n-k-1}(S^n\setminus M)$; здесь $n-k-1\neq 0$, поэтому $H_{n-k-1}\cong\tilde H_{n-k-1}$.

В случае, когда $k = n - 1$, рассматриваемая точная последовательность принимает вид

$$0 \to \tilde{H}^{n-1}(M) \xrightarrow{\delta^*} H^n(S^n, M) \xrightarrow{i^*} H^n(S^n) \cong \mathbb{Z}.$$

Здесь гомоморфизм i^* индуцирован включением пар $i : (S^n, \varnothing) \to (S^n, M)$. Рассмотрим также включение $j : (S^n \setminus M) \to S^n$ и индуцированный им гомоморфизм 0-мерных гомологий. Гомоморфизмы i^* и j_* входят в диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^n(S^n, M) & \xrightarrow{i^*} & H^n(S^n) \\ \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\ H_0(S^n \setminus M) & \xrightarrow{j_*} & H_0(S^n), \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки — изоморфизмы Лефшеца и Пуанкаре. Эта диаграмма коммутативна с точностью до знака, поэтому $\operatorname{Ker} i^* \cong \operatorname{Ker} j_*$. Гомоморфизм $p_* : H_0(S^n \setminus M) \to H_0(*)$, где $*$ — точка $S^n \setminus M$, можно представить в виде композиции $H_0(S^n \setminus M) \xrightarrow{j_*} H_0(S^n) \xrightarrow{\cong} H_0(*)$, поэтому $\tilde{H}_0(S^n \setminus M) = \operatorname{Ker} p_* = \operatorname{Ker} j_*$. В итоге получаем $\tilde{H}^{n-1}(M) \cong \operatorname{Im} \delta^* = \operatorname{Ker} i^* \cong \operatorname{Ker} j_* = \tilde{H}_0(S^n \setminus M)$. $\square$

Следствие 1. *Если L — образ при вложении в S^3 несвязного многообразия, состоящего из n окружностей, то $H_1(S^3 \setminus L) \cong H^1(L) \cong \mathbb{Z}^n$ и $H_2(S^3 \setminus L) \cong \tilde{H}^0(L) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$*

Следствие 2. *Пусть $M^{n-1} \subset S^n$ — замкнутое подмногообразие. Тогда M^{n-1} ориентируемо и $S^n \setminus M^{n-1}$ состоит из двух связных компонент.*

Доказательство. Согласно двойственности Александера $H^{n-1}(M^{n-1}) \cong \tilde{H}_0(S^n \setminus M^{n-1})$. Если M^{n-1} — замкнутое неориентируемое многообразие, то $H^{n-1}(M^{n-1}) \cong \mathbb{Z}_2$ (теорема 1.5.4 на с. 57). С другой стороны, группа $\tilde{H}_0(S^n \setminus M^{n-1})$ — свободная абелева. Поэтому многообразие M^{n-1} ориентируемо, а значит, $H^{n-1}(M^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. Равенство $\tilde{H}_0(S^n \setminus M^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ означает, что $S^n \setminus M^{n-1}$ состоит из двух линейно связных компонент. $\square$

Задача 2.2.3. *Предположим, что в сферу S^n, $n \geqslant 3$, вложено m попарно непересекающихся сфер S^{n-2}. Пусть X — их дополнение. Вычислите гомологии X.*

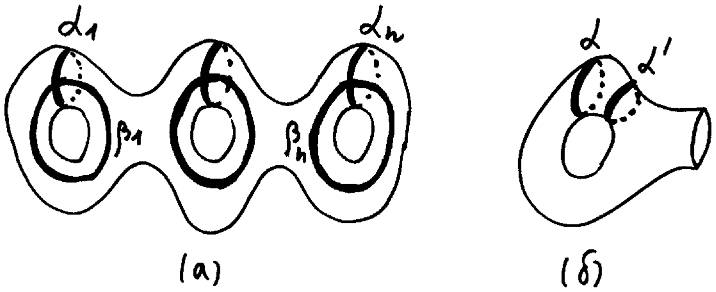

Рис. 2.10. Базисные циклы на сфере с ручками

Задача 2.2.4. *Сфера S^p произвольно вложена в сферу S^{n+1}. Докажите, что пространство $X = S^{n+1} \setminus S^p$ имеет такие же гомологии, как сфера S^{n-p}.*

Задача 2.2.5. *Сферы S^p и S^q произвольно вложены в сферу S^{n+1}. Докажите, что пространство $X = S^{n+1} \setminus (S^p \sqcup S^q)$ имеет такие же гомологии, как $S^{n-p} \vee S^{n-q}$.*

2.2.3. Кольца когомологий многообразий

Двойственность Пуанкаре и формула

$$\alpha^{n-k} \smile \beta^k = \langle\langle \alpha_k, \beta_{n-k} \rangle\rangle \Lambda \qquad (1)$$

существенно облегчают вычисление колец когомологий для многообразий (здесь $\Lambda \in H^n(M^n; \mathbb{R})$ — элемент, для которого $\Lambda \frown [M^n] = 1$, т.е. $\langle \Lambda, [M^n] \rangle = 1$). Например, те вычисления, которые мы провели для замкнутых двумерных поверхностей, теперь становятся почти очевидными, поскольку нужно лишь посмотреть на взаиморасположение двойственных циклов.

Для сферы с n ручками базисные циклы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ изображены на рис. 2.10 (а). Попарно пересекаются только циклы с одинаковыми номерами. Но рис. 2.10 (б) показывает, что для цикла α есть цикл α', который ему гомологичен и с ним не пересекается.

Для листа Мёбиуса, вклеенного в сферу, базисный цикл α представляется диагональю (рис. 2.11). Ему гомологичен цикл α', который трансверсально пересекает α ровно в одной точке. Для проективной плоскости α и α' соответствуют двум проективным прямым.

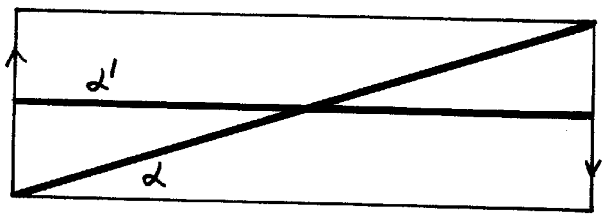

Рис. 2.11. Базисный цикл на листе Мёбиуса

Важную информацию о строении кольца когомологий замкнутого многообразия даёт следующее утверждение.

Теорема 2.2.8. *Пусть M^n — замкнутое многообразие, F — некоторое поле, причём $F = \mathbb{Z}_2$, если M^n неориентируемо. Тогда в пространствах $H^{n-k}(M^n; F)$ и $H^k(M^n; F)$ можно выбрать базисы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $\beta_1, \ldots, \beta_m$ так, что $\alpha_i \smile \beta_j = \delta_{ij}\Lambda$, где Λ — базисный элемент 1-мерного пространства $H^n(M^n; F)$.*

Доказательство. Двойственность Пуанкаре и формула (1) показывают, что эквивалентное утверждение таково: «В пространствах $H_k(M^n; F)$ и $H_{n-k}(M^n; F)$ можно выбрать базисы $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*$ и $\beta_1^*, \ldots, \beta_m^*$ так, что $\langle\langle \alpha_i^*, \beta_j^* \rangle\rangle = \delta_{ij}$.» Это утверждение совпадает со следствием теоремы 1.5.6 на с. 58. □

Аналогичные рассуждения с использованием теоремы 1.5.5 доказывают следующее утверждение.

Теорема 2.2.9. *Пусть M^n — замкнутое ориентируемое многообразие. Тогда в свободных абелевых группах $H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z})/T^{n-k}$ и $H^k(M^n; \mathbb{Z})/T^k$, где T^{n-k} и T^k — подгруппы кручения, можно выбрать базисы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $\beta_1, \ldots, \beta_m$ так, что $\alpha_i \smile \beta_j = \delta_{ij}\Lambda$, где Λ — образующая группы $H^n(M^n; \mathbb{Z})$.*

С помощью теорем 2.2.8 и 2.2.9 можно вычислить кольца когомологий $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ и $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$.

Теорема 2.2.10. *При $0 \leqslant k \leqslant n$ группа $H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ содержит единственный ненулевой элемент α^k, причём*

$$\alpha^k \smile \alpha^l = \begin{cases} \alpha^{k+l} & \text{при } k+l \leqslant n; \\ 0 & \text{при } k+l > n. \end{cases}$$

Доказательство. Мы уже знаем, что $H_k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2$ при $0\leqslant k\leqslant n$, поэтому $H^k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2$ при $0\leqslant k\leqslant n$. Остаётся проверить, что $\alpha^k\smile\alpha^l\neq 0$ при $k+l\leqslant n$. Из теоремы 2.2.8 следует, что $\alpha^k\smile\alpha^l\neq 0$ при $k+l=n$, поскольку α^k и α^l — единственные ненулевые элементы групп $H^k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$ и $H^l(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$. Если же $k+l=m<n$, то в качестве представителей α^k и α^l можно выбрать коциклы, двойственные циклам в $\mathbb{R}P^m\subset\mathbb{R}P^n$. Поэтому $\alpha^k\smile\alpha^l\neq 0$. □

Теорема 2.2.11. *$H^k(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ при $k=0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2n$, а при всех остальных k группа когомологий нулевая. При этом можно выбрать образующие α^2, α^4, $\ldots$, α^{2n} так, что $\alpha^{2k}\smile\alpha^{2l}=\alpha^{2(k+l)}$ при $k+l\leqslant n$.*

Доказательство. Группы когомологий легко вычисляются по группам гомологий с помощью формулы универсальных коэффициентов. Группы когомологий $\mathbb{C}P^n$ не имеют кручения, поэтому теорема 2.2.9 применяется к самим группам когомологий. Пусть β^2, β^4, $\ldots$, β^{2n} — образующие групп когомологий. Согласно теореме 2.2.9 $\beta^{2k}\smile\beta^{2(n-k)}=$ $=\pm\beta^{2n}$. При $k+l=m<n$ можно рассмотреть циклы на $\mathbb{C}P^m$ и аналогично доказать, что $\beta^{2k}\smile\beta^{2l}=\pm\beta^{2m}$. Теперь образующие с правильными знаками можно выбрать так: $\alpha^2=\beta^2$, $\alpha^4=\beta^2\smile\beta^2=\pm\beta^4$, $\alpha^6=\beta^2\smile\beta^2\smile\beta^2=\pm\beta^6$, $\ldots$ □

Задача 2.2.6. *Докажите, что если $m>n$, то любое непрерывное отображение $f\colon\mathbb{R}P^m\to\mathbb{R}P^n$ индуцирует нулевое отображение $f^*\colon H^k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)\to H^k(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2)$ для всех $k\geqslant 1$.*

Задача 2.2.7. *Докажите, что если $m>n$, то любое непрерывное отображение $f\colon\mathbb{R}P^m\to\mathbb{R}P^n$ индуцирует нулевое отображение $f_*\colon H_k(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2)\to H_k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$ для всех $k\geqslant 1$.*

Задача 2.2.8. *а) Докажите, что $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ нельзя представить в виде объединения n стягиваемых подкомплексов.*

б) Представьте $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ в виде объединения $n+1$ стягиваемых подкомплексов.

Задача 2.2.9. *Пусть $f\colon\mathbb{C}P^n\to\mathbb{C}P^n$ — непрерывное отображение. Докажите, что $\Lambda(f)=1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^n$, где $\lambda\in\mathbb{Z}$.*

Задача 2.2.10. *Докажите, что если n чётно, то любое непрерывное отображение $f\colon\mathbb{C}P^n\to\mathbb{C}P^n$ имеет неподвижную точку.*

Задача 2.2.11. *Докажите, что степень отображения $f\colon\mathbb{C}P^n\to\mathbb{C}P^n$ равна λ^n, где $\lambda\in\mathbb{Z}$.*

Задача 2.2.12. *а) Докажите, что при чётном n не существует диффеоморфизма $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$, обращающего ориентацию.*

б) Постройте диффеоморфизм $\mathbb{C}P^{2n+1} \to \mathbb{C}P^{2n+1}$, обращающий ориентацию.

Задача 2.2.13. *Докажите, что пространства $\mathbb{C}P^2$ и $S^2 \vee S^4$ гомотопически не эквивалентны, и выведите из этого, что расслоение Хопфа $S^3 \to S^2$ не гомотопно постоянному отображению.*

2.2.4. Два примера

Здесь мы приведём два примера, показывающие, что *кольца* когомологий не определяются теми данными, которыми полностью задаются *группы* когомологий. Во-первых, CW-комплексы с изоморфными клеточными цепными комплексами могут иметь неизоморфные кольца когомологий. С этим связана необходимость обращаться непосредственно к симплициальной структуре при определении умножения в когомологиях; клеточной структуры для этих целей не достаточно. Во-вторых, кольцо когомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}$ не определяет колец когомологий с другими коэффициентами: пространства с изоморфными кольцами когомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}$ могут иметь неизоморфные кольца когомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$.

Мы будем пользоваться тем, что для любого кольца коэффициентов $H^i(X \vee Y) = H^i(X) \oplus H^i(Y)$ при $i > 0$, причём $(x + y) \smile (x' + y') = x \smile x' + y \smile y'$ (здесь предполагается, что размерности всех этих когомологических классов положительны).

Пример 2.2.1. *Клеточные цепные комплексы для тора T^2 и для пространства $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ изоморфны, но кольца когомологий этих пространств не изоморфны.*

Доказательство. Клеточные цепные комплексы для обоих пространств имеют вид

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0;$$

все граничные гомоморфизмы нулевые.

Для пространства $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ 1-мерные когомологии изоморфны $H^1(S^1 \vee S^1)$, поскольку $H^1(S^2) = 0$. Поэтому произведение любых 1-мерных классов коциклов равно нулю. А для тора произведение образующих $H^1(T^2)$ не равно нулю. □

Задача 2.2.14. *Докажите, что пространства $S^m \times S^n$ и $S^m \vee S^n \vee S^{n+m}$ имеют одинаковые группы когомологий, но кольца когомологий у них разные.*

Пример 2.2.2. *Кольца когомологий пространств $\mathbb{R}P^3$ и $\mathbb{R}P^2 \vee S^3$ с коэффициентами $\mathbb{Z}$ изоморфны, а с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ не изоморфны.*

Доказательство. Для обоих пространств 1-мерные группы когомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}$ нулевые, поэтому умножение в когомологиях тривиальное. В кольце когомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ пространства $\mathbb{R}P^3$ есть элемент α, для которого $\alpha \smile \alpha \smile \alpha \neq 0$. А в кольце когомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ пространства $\mathbb{R}P^2 \vee S^3$ такого элемента нет. Действительно, там есть только такие ненулевые элементы: $\alpha' \in H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$, $\alpha' \smile \alpha' \in H^2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$ и $\beta \in H^3(S^3; \mathbb{Z}_2)$. □

2.2.5. Форма пересечения и сигнатура многообразия

Пусть M^{2n} — замкнутое ориентированное многообразие чётной размерности, F — произвольное поле. Тогда на пространстве $H^n(M^{2n}; F)$ можно определить билинейную форму

$$f(\alpha^n, \beta^n) = \langle \alpha^n \smile \beta^n, [M^{2n}] \rangle,$$

где $[M^{2n}]$ — фундаментальный класс многообразия M^{2n}. При изменении ориентации фундаментальный класс изменяет знак, поэтому билинейная форма f тоже изменяет знак, т.е. $f_- = -f$, где f_- — форма для многообразия с изменённой ориентацией.

На двойственном пространстве $H_n(M^{2n}; F)$ имеется двойственная форма

$$f^*(\alpha_n, \beta_n) = \langle\langle \alpha_n, \beta_n \rangle\rangle.$$

Напомним, что в определении индекса пересечения $\langle\langle \alpha_n, \beta_n \rangle\rangle$ участвует ориентация многообразия, и при изменении ориентации индекс пересечения изменяет знак.

Билинейные формы f и f^* мы будем называть *формами пересечения*.

Форму пересечения можно определить не только над полем F, но и над кольцом $\mathbb{Z}$. Для этого вместо группы $H_n(M^{2n})$ нужно рассмотреть свободную абелеву группу $H_n(M^{2n})/T_n$, где T_n — подгруппа кручения.

Нас будут интересовать только формы пересечения над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{Z}$. Из формулы универсальных коэффициентов следует, что

$$H_n(M^{2n}; \mathbb{R}) \cong H_n(M^{2n}) \otimes \mathbb{R} \cong (H_n(M^{2n})/T_n) \otimes \mathbb{R}.$$

Кроме того, элементы конечного порядка не влияют на индекс пересечения, и непосредственно из определения индекса пересечения видно, что если α_n, $\beta_n \in C_n(M^{2n})$ и $r\alpha_n$, $s\beta_n \in C_n(M^{2n}; \mathbb{R})$, то

$$\langle\langle r\alpha_n, s\beta_n \rangle\rangle = rs \langle\langle \alpha_n, \beta_n \rangle\rangle.$$

Поэтому формы пересечения над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{Z}$ задаются одной и той же матрицей. Из этого, в частности, следует, что в $H_n(M^{2n};\mathbb{R})$ можно выбрать базис так, что форма пересечения имеет целые коэффициенты.

Из кососкоммутативности cup-произведения следует, что форма пересечения симметрична при n чётном и кососимметрична при n нечётном.

Пусть Q — матрица формы пересечения над $\mathbb{Z}$, $m = \dim H_n(M^{2n};\mathbb{R})$. Теорему 2.2.9 можно переформулировать так: существуют квадратные матрицы α и β над $\mathbb{Z}$ порядка m, для которых $\alpha^T Q\beta = I_m$ — единичная матрица. Следовательно, $\det Q = \pm 1$.

Сформулируем доказанные свойства формы пересечения в виде отдельной теоремы.

Теорема 2.2.12. *а) Форма пересечения задаётся невырожденной целочисленной матрицей.*

б) Для многообразия размерности $4k$ форма пересечения задаётся симметрической матрицей, а для многообразия размерности $4k+2$ — кососимметрической.

в) При изменении ориентации многообразия форма пересечения меняет знак.

Из этих свойств формы пересечения можно сделать следующий вывод.

Теорема 2.2.13. *Если M^{4k+2} — замкнутое ориентируемое многообразие, то $\dim H_{2k+1}(M^{4k+2};\mathbb{R})$ — чётное число.*

Доказательство. Матрица формы пересечения многообразия M^{4k+2} кососимметрична, поэтому её ранг чётен (см. [Пр2], с. 147). Но эта матрица невырожденная, поэтому её ранг равен $\dim H_{2k+1}(M^{4k+2};\mathbb{R})$. □

Следствие. *Если M^{4k+2} — замкнутое ориентируемое многообразие, то его эйлерова характеристика $\chi(M^{4k+2})$ чётна.*

Доказательство. Для замкнутого ориентируемого многообразия

$$\chi(M^{2n}) \equiv \dim H_n(M^{2n};\mathbb{R}) \pmod 2.$$

Это доказывается точно так же, как и теорема 1.6.4 (для ориентируемого многообразия рассуждения справедливы не только для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$, но и для коэффициентов $\mathbb{R}$). □

Сигнатурой многообразия M^{4k} называют сигнатуру (индекс) его формы пересечения. Напомним, что сигнатура симметричной билинейной формы над $\mathbb{R}$ определяется следующим образом. Пользуясь симметричностью, выберем базис, для которого $f(\sum x_i e_i, \sum y_i e_i) = \sum \lambda_i x_i y_i$. Сигнатура — это разность между количеством положительных чисел λ_i и количеством отрицательных. Сигнатура формы не зависит от выбора базиса, поэтому сигнатура многообразия, которую обозначают $\sigma(M^{4k})$, — инвариант ориентированного многообразия. При этом $\sigma(-M^{4k}) = -\sigma(M^{4k})$, где $-M^{4k}$ — многообразие M^{4k} с противоположной ориентацией. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2.14. *Если $\sigma(M^{4k}) \neq 0$, то не существует гомеоморфизма $f : M^{4k} \to M^{4k}$, обращающего ориентацию (т.е. гомеоморфизма, для которого $f_*[M^{4k}] = -[M^{4k}]$).*

Из теоремы 2.2.14 следует, что не существует гомеоморфизма $\mathbb{C}P^{2n} \to \mathbb{C}P^{2n}$, обращающего ориентацию, поскольку $\sigma(\mathbb{C}P^{2n}) = \pm 1$. (Другое доказательство этого утверждения приведено в решении задачи 2.2.12.)

На многообразии $\mathbb{C}P^m$ имеется выделенная ориентация, потому что $\mathbb{C}P^m \setminus \mathbb{C}P^{m-1} = \mathbb{C}^m$, а в комплексном пространстве есть выделенная ориентация (все комплексные преобразования, рассматриваемые как преобразования над $\mathbb{R}$, имеют положительный определитель). Обычно предполагают, что $\mathbb{C}P^m$ снабжено именно этой ориентацией. В таком случае $\sigma(\mathbb{C}P^{2n}) = 1$, поскольку ориентация, задаваемая парой трансверсально пересекающихся n-мерных комплексных подпространств в $\mathbb{C}^{2n}$, согласована с ориентацией $\mathbb{C}^{2n}$.

Задача 2.2.15. *Пусть M_1^{4n} и M_2^{4n} — замкнутые ориентируемые многообразия. Докажите, что $\sigma(M_1^{4n} \# M_2^{4n}) = \sigma(M_1^{4n}) + \sigma(M_2^{4n})$.*

Воспользовавшись двойственностью Лефшеца, можно доказать следующее свойство сигнатуры многообразия, которое является краем другого многообразия.

Теорема 2.2.15 (Том [Th1]). *Пусть M^{4k} — замкнутое ориентируемое многообразие, которое является краем компактного ориентируемого многообразия W^{4k+1}. Тогда $\sigma(M^{4k}) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим когомологическую и гомологическую последовательности пары (W^{4k+1}, M^{4k}) и отобразим первую последовательность во вторую посредством изоморфизмов Пуанкаре и Лефшеца:

$$\begin{tikzcd}
H^{2k}(W^{4k+1}) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\frown[W^{4k+1}]"] & H^{2k}(M^{4k}) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\frown[M^{4k}]"] & H^{2k+1}(W^{4k+1}, M^{4k}) \arrow[d, "\frown[W^{4k+1}]"] \\
H_{2k+1}(W^{4k+1}, M^{4k}) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{2k}(M^{4k}) \arrow[r, "i_*"] & H^{2k}(W^{4k+1})
\end{tikzcd}$$

При доказательстве теоремы двойственности Лефшеца мы проверяли, что эта диаграмма коммутативна с точностью до знака. Из точности и коммутативности следует, что $\operatorname{Im} i^* \cong \operatorname{Im} \partial_* = \operatorname{Ker} i_*$.

Если $\alpha, \beta \in \operatorname{Im} i^*$, то $\langle \alpha \smile \beta, [M^{4k}] \rangle = 0$. В самом деле, если $\alpha = i^*(a)$ и $\beta = i^*(b)$, то

$$\begin{aligned}\langle \alpha \smile \beta, [M^{4k}] \rangle &= \langle i^*(a \smile b), \partial_*[W^{4k+1}] \rangle = \\ &= \langle \delta^* i^*(a \smile b), [W^{4k+1}] \rangle = 0,\end{aligned}$$

поскольку $\delta^* i^* = 0$.

Следующий шаг рассуждений удобно проводить, избавившись от кручения, т.е. рассматривая (ко)гомологии с коэффициентами $\mathbb{R}$. В таком случае $H^{2k}(M^{4k})$ и $H^{2k}(W^{4k+1})$ являются линейными пространствами, двойственными пространствам $H_{2k}(M^{4k})$ и $H_{2k}(W^{4k+1})$. При этом отображения i_* и i^* двойственны друг другу.

Лемма. *Пусть отображение* $f^* : W^* \to V^*$ *двойственно отображению* $f : V \to W$. *Тогда* $(\operatorname{Im} f)^* \cong W^* / \operatorname{Ker} f^*$.

Доказательство. Линейные функции на $\operatorname{Im} f$ — это линейные функции на W, рассматриваемые с точностью до функций, обращающихся в нуль на $\operatorname{Im} f$. Равенство $\langle f^*(\eta), v \rangle = \langle \eta, f(v) \rangle$ показывает, что $\operatorname{Ker} f^*$ — это функции на W, обращающиеся в нуль на $\operatorname{Im} f$. □

Воспользовавшись этой леммой, получаем $(\operatorname{Im} i^*) \cong$ $\cong H^{2k}(M^{4k}; \mathbb{R}) / \operatorname{Ker} i_*$. Если учесть, что $\operatorname{Im} i^* \cong \operatorname{Ker} i_*$, то из этого следует, что $\dim \operatorname{Im} i^* = \dim \operatorname{Ker} i_* = \frac{1}{2} \dim H^{2k}(M^{4k}; \mathbb{R})$.

Форма пересечения невырожденная, поэтому размерность подпространства, на котором форма обращается в нуль, не превосходит половины размерности пространства, причём равенство достигается лишь в том случае, когда сигнатура равна нулю. □

2.2.6. Гомоморфизм Бокштейна и двойственность Пуанкаре

Пусть K — симплициальный комплекс, $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ — точная последовательность абелевых групп. Тогда возникает точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to C_k(K;G') \to C_k(K;G) \to C_k(K;G'') \to 0.$$

Как мы уже говорили, связывающий гомоморфизм $\beta_* : H_k(K;G'') \to H_{k-1}(K;G')$ называют гомоморфизмом Бокштейна. Для коцепных комплексов тоже возникает точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(C_k, G') \to \mathrm{Hom}(C_k, G) \to \mathrm{Hom}(C_k, G'') \to 0,$$

где $C_k = C_k(K)$. Связывающий гомоморфизм для когомологий $\beta^* : H^k(K;G'') \to H^{k+1}(K;G')$ тоже называют *гомоморфизмом Бокштейна.*

Теорема 2.2.16. *Для замкнутого ориентируемого многообразия M^n гомоморфизм Бокштейна коммутирует с двойственностью Пуанкаре с точностью до знака, т.е. если $\alpha^k \in H^k(M^n;G'')$, то*

$$(\beta^*\alpha^k) \frown [M^n] = \pm\beta_*(\alpha^k \frown [M^n]),$$

где $[M^n] \in H_n(M^n;G')$ — фундаментальный класс. (Здесь предполагается, что G', G, G'' — аддитивные группы колец с единицей.)

Доказательство. На уровне (ко)циклов гомологический и когомологический гомоморфизмы Бокштейна устроены следующим образом. В случае гомологий для цикла z''_k с коэффициентами $G'' = G/G'$ выбирается представляющая его цепь z_k с коэффициентами G и ей сопоставляется ∂z_k — цикл с коэффициентами $G' \subset G$. В случае когомологий для коцикла $(z^k)''$ со значениями в G'' выбирается представляющая его коцепь z^k со значениями в G и ей сопоставляется коцикл δz^k со значениями в $G' \subset G$.

На уровне (ко)цепей изоморфизм Пуанкаре устроен следующим образом. Пусть K и K^* — двойственные разбиения M^n. Тогда цепи $c_k \in C_k(K)$ сопоставляется коцепь $c^{n-k} \in C^{n-k}(K^*)$. При этом цепи ∂c_k сопоставляется коцепь $\pm\delta c^{n-k}$ (точнее, $(-1)^k\delta c^{n-k}$). Если мы воспользуемся при вычислении гомологического гомоморфизма Бокштейна разбиением K, а при вычислении когомологического гомоморфизма Бокштейна — разбиением K^*, то легко получим требуемое. □

Задача 2.2.16. *Пусть* $a^p \in H^p(K; G'')$ *и* $b^q \in H^q(K; G'')$. *Докажите, что*

$$\beta^*(a^p \smile b^q) = \beta^*(a^p) \smile b^q + (-1)^p a^p \smile \beta^*(b^q).$$

2.2.7. Линзы

Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа, причём $p \geqslant 3$. На единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ зададим действие (без неподвижных точек) группы $\mathbb{Z}_p$ с образующей σ, положив

$$\sigma(z, w) = \left(e^{\frac{2\pi i}{p}} z,\, e^{\frac{2\pi i q}{p}} w\right).$$

Факторпространство по этому действию является трёхмерным многообразием; его называют *линзой* и обозначают $L(p, q)$.

В [Пр3] подробно объяснено, что линзу $L(p, q)$ можно представить в виде CW-комплекса с одной клеткой в каждой из размерностей 0, 1, 2, 3. А именно, возьмём шар D^3, разделим его экватор на p равных частей и отождествим точки нижней полусферы с точками верхней полусферы следующим образом: нижнюю полусферу поворачиваем на угол $2\pi q/p$, а затем отражаем её симметрично относительно экватора. При этом p точек деления экватора сливаются в одну точку; p дуг, на которые разделён экватор, тоже отождествляются. В результате получаем, 0-мерную клетку и 1-мерную клетку; в качестве 2-мерной клетки берём, например, нижнюю полусферу. В границу клетки D^3 2-мерная клетка входит дважды, причём с противоположными ориентациями. Поэтому цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий $L(p, q)$ имеет следующий вид:

$$C_3 \xrightarrow{0} C_2 \xrightarrow{\times p} C_1 \xrightarrow{0} C_0 \to 0,$$

где $C_i \cong \mathbb{Z}$. Поэтому гомологии $L(p, q)$ с коэффициентами $\mathbb{Z}$ таковы:

$$H_3 = \mathbb{Z}, \quad H_2 = 0, \quad H_1 = \mathbb{Z}_p, \quad H_0 = \mathbb{Z}.$$

Для $L(p, q)$ гомологии и когомологии с коэффициентами $\mathbb{Z}_p$ легко вычисляются без формулы универсальных коэффициентов, потому что цепной комплекс с коэффициентами $\mathbb{Z}_p$ имеет очень простой вид:

$$C_3 \xrightarrow{0} C_2 \xrightarrow{0} C_1 \xrightarrow{0} C_0 \to 0,$$

где $C_i \cong \mathbb{Z}_p$. Поэтому $H_k(L(p, q); \mathbb{Z}_p) \cong H^k(L(p, q); \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$ при $k = 0$, 1, 2, 3.

Группы гомологий и когомологий не позволяют различить линзы $L(p, q_1)$ и $L(p, q_2)$. Но гомоморфизм Бокштейна β_*, связанный с точной

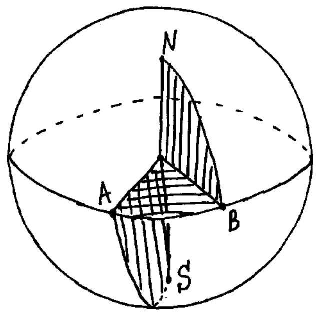

Рис. 2.12. 2-мерная цепь

последовательностью

$$0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_p \to 0,$$

в некоторых случаях позволяет это сделать.

Теорема 2.2.17. *В группе* $H_2(L(p,q);\mathbb{Z}_p)$ *можно выбрать элемент* a *так, что* $q\langle\langle a, \beta_*(a)\rangle\rangle = \pm 1 \in \mathbb{Z}_p$.

Доказательство. Пусть c — описанная выше 2-мерная клетка CW-комплекса $L(p,q)$, d — 1-мерная клетка. В качестве a выберем гомологический класс, представленный циклом (по модулю p) $1 \cdot c$, где $1 \in \mathbb{Z}_p$. Элемент $\beta_*(a) \in H_1(L(p,q);\mathbb{Z}_p)$ строится следующим образом. Рассмотрим цикл $1 \cdot c$ как цепь с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{p^2}$, т.е. будем считать, что $1 \in \mathbb{Z}_{p^2}$ (1 можно заменить на любой элемент вида $1 + kp$). По условию $\partial(1 \cdot c)$ — цикл с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_{p^2}$, где подгруппа $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{Z}_{p^2}$ состоит из элементов вида lp, $l \in \mathbb{Z}_p$. Действительно, $\partial(1 \cdot c) = p \cdot d$. Элемент $\beta_*(a)$ представлен циклом $p \cdot d$, который мы рассматриваем как цикл с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$; для этого элемент $lp \in \mathbb{Z}_{p^2}$ нужно заменить на $l \in \mathbb{Z}_p$. В итоге получаем, что элемент $\beta_*(a)$ представлен циклом $1 \cdot d$.

Вычислить непосредственно индекс пересечения $\langle\langle c, d\rangle\rangle$ нельзя, потому что циклы c и d не трансверсальны. Поэтому вместо цикла d мы рассмотрим другой цикл, который гомологичен циклу qd и пересекает c трансверсально.

Пусть N и S — северный и южный полюс, A — некоторая точка экватора, B — точка экватора, полученная из A поворотом на угол

$2\pi q/p$ (рис. 2.12). Граница 2-мерной цепи, заштрихованной на рис 2.12, состоит из отрезка NS и дуг SA, AB и BN. В $L(p,q)$ дуги SA и BN отождествляются, причём их ориентации противоположны; ясно также, что точки N и S отождествляются. Поэтому цикл NS гомологичен циклу AB. Но цикл AB состоит из q циклов d. Цикл NS трансверсально пересекает цикл c в одной точке, поэтому

$$q\langle\langle c, d\rangle\rangle = \langle\langle c, qd\rangle\rangle = \langle\langle c, NS\rangle\rangle = \pm 1$$

(все равенства здесь по модулю p). □

Следствие. *В группе $H^1(L(p,q);\mathbb{Z}_p)$ можно выбрать элемент α так, что $q\alpha \smile \beta^*(\alpha) = \pm\Lambda_p$, где $\Lambda_p \in H^3(L(p,q);\mathbb{Z}_p)$ — элемент, для которого $\Lambda_p \frown [L(p,q)]_p = 1$.*

Доказательство. Многообразие $L(p,q)$ ориентируемо, поскольку $H_3(L(p,q)) = \mathbb{Z}$. Поэтому гомологический и когомологический гомоморфизмы Бокштейна коммутируют с двойственностью Пуанкаре с точностью до знака. □

Из теоремы 2.2.17 и её следствия легко выводится следующее утверждение.

Теорема 2.2.18. *Предположим, что линзы $L(p,q_1)$ и $L(p,q_2)$ гомотопически эквивалентны. Тогда $q_1 \equiv \pm a^2 q_2 \pmod p$.*

Доказательство. Выберем в $H^1(L(p,q_1);\mathbb{Z}_p)$ и в $H^1(L(p,q_2);\mathbb{Z}_p)$ элементы α_1 и α_2 так, что

$$q_1\alpha_1 \smile \beta^*(\alpha_1) = \pm\Lambda_{p,1}, \quad q_2\alpha_2 \smile \beta^*(\alpha_2) = \pm\Lambda_{p,2}.$$

Пусть $f : L(p,q_1) \to L(p,q_2)$ — гомотопическая эквивалентность. Тогда $f^*(\Lambda_{p,2}) = \pm\Lambda_{p,1}$. Запишем элемент $f^*(\alpha_2)$ в виде $a\alpha_1$, $a \in \mathbb{Z}_p$. Тогда

$$q_1\alpha_1 \smile \beta^*(\alpha_1) = \pm\Lambda_{p,1} = \pm f^*(\Lambda_{p,2}) = \pm a^2 q_2\alpha_1 \smile \beta^*(\alpha_1),$$

поэтому $q_1 \equiv \pm a^2 q_2 \pmod p$. (Равенство $f^*\beta^* = \beta^* f^*$, которым мы воспользовались, легко проверяется на уровне коцепей.) □

Замечание. В части I доказано утверждение, обратное теореме 2.2.18: если $q_1 \equiv \pm a^2 q_2 \pmod p$, то линзы $L(p,q_1)$ и $L(p,q_2)$ гомотопически эквивалентны.

2.3. Теорема Кюннета

Теорема Кюннета позволяет выразить гомологии $K \times L$ через гомологии K и L. У неё есть сравнительно простая геометрическая часть, связанная с выражением цепного комплекса $C_*(K \times L)$ через цепные комплексы $C_*(K)$ и $C_*(L)$, и несколько более сложная алгебраическая часть, связанная с выражением гомологий комплекса $C_*(K \times L)$ через гомологии комплексов $C_*(K)$ и $C_*(L)$.

2.3.1. Цепной комплекс $C_*(K \times L)$

Если известны цепные комплексы $C_*(K)$ и $C_*(L)$, то по ним можно построить цепной комплекс $C_*(K \times L)$ для вычисления клеточных гомологий $K \times L$. Клеточные гомологии $K \times L$ вычислять удобнее, чем симплициальные, потому что произведение открытых клеток является открытой клеткой, а произведение симплексов — это не симплекс.

Мы будем предполагать, что K и L — конечные CW-комплексы, потому что для бесконечных CW-комплексов топология прямого произведения $K \times L$ может не совпадать с топологией $K \times L$ как CW-комплекса.

Открытыми k-мерными клетками $K \times L$ являются прямые произведения $\sigma^p \times \tau^q$, где $p + q = k$, σ^p и τ^q — открытые клетки K и L. Основная трудность связана с выражением граничного гомоморфизма в $C_*(K \times L)$ через граничные гомоморфизмы в $C_*(K)$ и в $C_*(L)$.

Ясно, что $\partial(D^p \times D^q) = (D^p \times \partial D^q) \cup (\partial D^p \times D^q)$ и $(D^p \times \partial D^q) \cap (\partial D^p \times D^q) = S^{p-1} \times S^{q-1}$; здесь ∂ — геометрическая граница. При вычислении $\partial(\sigma^p \times \tau^q)$ нас не интересуют клетки размерности $(p-1) + (q-1) = k - 2$, поэтому

$$\partial(\sigma^p \times \tau^q) = \pm\partial\sigma^p \times \tau^q \pm \sigma^p \times \partial\tau^q.$$

Остаётся выяснить знаки.

Прежде всего нужно ввести соглашение о том, как ориентация клетки индуцирует ориентацию её границы или, более общо, как ориентация многообразия индуцирует ориентацию его края. Для симплекса $[v_0, \ldots, v_n]$ ориентация границы задаётся формулой $\partial[v_0, \ldots, v_n] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$. Мы будем считать, что ориентация симплекса $[v_0, \ldots, v_n]$ задаётся тем, что базис $e_1 = v_1 - v_0, \ldots, e_n = v_n - v_0$ положительно ориентирован. При этом ориентация симплекса $[v_1, \ldots, v_n]$, лежащего на его границе, задаётся тем, что базис $e_2 - e_1 = v_2 - v_1, \ldots, e_n - e_1 = v_n - v_1$ положительно ориентирован, т.е. базис

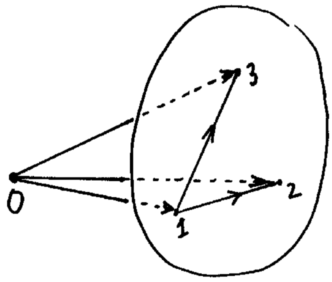

Рис. 2.13. Ориентация границы клетки

$e_2, \ldots, e_n$ положительно ориентирован. В таком виде соглашение об индуцированной ориентации легко переносится на произвольное ориентированное многообразие M^n с краем ∂M^n. А именно, пусть ориентация многообразия M^n задаётся базисом $e_1, \ldots, e_n$ касательного пространства $T_x M^n$ в некоторой точке $x \in \partial M^n$, причём вектор e_1 направлен наружу, а векторы $e_2, \ldots, e_n$ лежат в касательном пространстве к краю. Тогда ориентация края задаётся базисом $e_2, \ldots, e_n$.

Пусть положительные ориентации клеток σ^p и τ^q задаются базисами $e_1, \ldots, e_p$ и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$. Ориентацию клетки $\sigma^p \times \tau^q$ зададим базисом $e_1, \ldots, e_p$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$. Ориентация $\partial\sigma^p$ задаётся базисом $e_2 - e_1, \ldots, e_p - e_1$ (см. рис. 2.13). Ориентация $\partial\sigma^p \times \tau^q$ задаётся базисом

$$e_2 - e_1, \ldots, e_p - e_1,\ \varepsilon_1 - e_1, \ldots, \varepsilon_q - e_1; \tag{1}$$

эта ориентация совпадает с ориентацией $\partial(\sigma^p \times \tau^q)$. Ориентация $\sigma^p \times \partial\tau^q$ задаётся базисом

$$e_2 - \varepsilon_1, \ldots, e_p - \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q - \varepsilon_1; \tag{2}$$

Переставим в базисе (1) вектор $\varepsilon_1 - e_1$ на первое место. Матрица перехода от полученного базиса к базису (2) имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому знак ориентации базиса (2) относительно базиса (1) равен $(-1)^p$.

В итоге получаем
$$\partial(\sigma^p \times \tau^q) = \partial\sigma^p \times \tau^q + (-1)^p \sigma^p \times \partial\tau^q.$$
Теперь задача вычисления гомологий $K \times L$ становится чисто алгебраической.

2.3.2. Алгебраическая теорема Кюннета

Пусть C'_* и C''_* — неотрицательные цепные комплексы с граничными гомоморфизмами ∂' и ∂''. Их *тензорным произведением* называют цепной комплекс C_*, где $C_k = \bigoplus_{p+q=k} C'_p \otimes C''_q$ и
$$\partial(c'_p \otimes c''_q) = \partial' c'_p \otimes c''_q + (-1)^p c'_p \otimes \partial'' c''_q.$$
Знак $(-1)^p$ во втором слагаемом обеспечивает выполнение равенства $\partial\partial = 0$.

Цепной комплекс C_* мы будем обозначать $C'_* \otimes C''_*$. Аналогичное обозначение мы будем использовать для произвольных градуированных абелевых групп $A_* = \oplus A_p$ и $B_* = \oplus B_q$, т.е. будем считать, что $(A_* \otimes B_*)_k = \bigoplus_{p+q=k} A_p \otimes B_q$. Аналогично определим $\big(\operatorname{Tor}(A_*, B_*)\big)_k = \bigoplus_{p+q=k} \operatorname{Tor}(A_p, B_q)$.

Теорема 2.3.1. *Пусть C'_* и C''_* — свободные неотрицательные цепные комплексы. Тогда имеет место точная последовательность*
$$0 \to \big(H_*(C'_*) \otimes H_*(C''_*)\big)_k \to H_k(C'_* \otimes C''_*) \to \big(\operatorname{Tor}(H_*(C'_*), H_*(C''_*)\big)_{k-1} \to 0.$$
Эта точная последовательность расщепляется, но не канонически.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность
$$0 \to Z'_p \xrightarrow{i'} C'_p \xrightarrow{\partial'} B'_{p-1} \to 0.$$
Эта последовательность расщепляется, поскольку группа B'_{p-1} свободная. Поэтому точность сохранится после тензорного умножения на C''_q. Прямая сумма точных последовательностей является точной последовательностью, поэтому получаем точную последовательность
$$0 \to \bigoplus_{p+q=k} (Z'_p \otimes C''_q) \xrightarrow{i' \otimes 1} \bigoplus_{p+q=k} (C'_p \otimes C''_q) \xrightarrow{\partial' \otimes 1} \bigoplus_{p+q=k-1} (B'_p \otimes C''_q) \to 0. \tag{1}$$

Рассмотрим цепные комплексы $Z'_* \otimes C''_*$ и $B'_* \otimes C''_*$; в этих комплексах граничный гомоморфизм имеет вид $\pm 1 \otimes \partial''$. Действительно, $\partial(z'_p \otimes c''_q) = (-1)^p z'_p \otimes \partial'' c''_q$, поскольку $\partial' z'_p = 0$. Отображения $i' \otimes 1$ и

$\partial' \otimes 1$ являются цепными, поэтому из короткой точной последовательности (1) получаем точную гомологическую последовательность

$$\to H_k(B'_* \otimes C''_*) \xrightarrow{\alpha_k} H_k(Z'_* \otimes C''_*) \to H_k(C'_* \otimes C''_*) \to$$
$$\to H_{k-1}(B'_* \otimes C''_*) \xrightarrow{\alpha_{k-1}} H_{k-1}(Z'_* \otimes C''_*) \to \quad (2)$$

Покажем, что $H_k(Z'_* \otimes C''_*) \cong \big(Z'_* \otimes H_*(C''_*)\big)_k$. Группа Z'_p свободная, поэтому из точных последовательностей

$$0 \to Z''_q \to C''_q \xrightarrow{\partial''} B''_{q-1} \to 0,$$
$$0 \to B''_{q-1} \to Z''_{q-1} \to H''_{q-1}(C''_*) \to 0$$

получаем точные последовательности

$$0 \to Z'_p \otimes Z''_q \to Z'_p \otimes C''_q \xrightarrow{1\otimes\partial''} Z'_p \otimes B''_{q-1} \to 0, \quad (3)$$
$$0 \to Z'_p \otimes B''_{q-1} \to Z'_p \otimes Z''_{q-1} \to Z'_p \otimes H''_{q-1}(C''_*) \to 0. \quad (4)$$

Из точной последовательности (3) получаем

$$\mathrm{Ker}(\pm 1 \otimes \partial'') = \mathrm{Ker}(1 \otimes \partial'') = Z'_p \otimes Z''_q,$$
$$\mathrm{Im}(\pm 1 \otimes \partial'') = \mathrm{Im}(1 \otimes \partial'') = Z'_p \otimes B''_{q-1}.$$

Поэтому точная последовательность (4) имеет вид

$$0 \to \mathrm{Im}(\pm 1 \otimes \partial'') \to \mathrm{Ker}(\pm 1 \otimes \partial'') \to Z'_p \otimes H''_{q-1}(C''_*) \to 0.$$

Следовательно, $\mathrm{Ker}(\pm 1 \otimes \partial'')/\,\mathrm{Im}(\pm 1 \otimes \partial'') \cong Z'_p \otimes H''_{q-1}(C''_*)$, а значит, $H_k(Z'_* \otimes C''_*) \cong \big(Z'_* \otimes H_*(C''_*)\big)_{k-1}$.

Аналогично получаем $H_k(B'_* \otimes C''_*) \cong \big(B'_* \otimes H_*(C''_*)\big)_{k-1}$. Непосредственно из определения связывающего гомоморфизма α_k получаем, что при таких отождествлениях он имеет вид

$$j \otimes 1 : \big(B'_* \otimes H_*(C''_*)\big)_k \to \big(Z'_* \otimes H_*(C''_*)\big)_k,$$

где $j : B'_* \to Z'_*$ — естественное включение. Поэтому из свободной резольвенты

$$0 \to B'_* \to Z'_* \to H(C'_*) \to 0$$

получаем точную последовательность

$$0 \to \Big(\mathrm{Tor}\big(H_*(C'_*), H_*(C''_*)\big)\Big)_k \to \big(B'_* \otimes H_*(C''_*)\big)_k \xrightarrow{\alpha_k}$$
$$\xrightarrow{\alpha_k} \big(Z'_* \otimes H_*(C''_*)\big)_k \to \big(H_*(C'_*) \otimes H_*(C''_*)\big)_k \to 0,$$

а значит, $\operatorname{Ker}\alpha_k = \Big(\operatorname{Tor}\big(H_*(C'_*), H_*(C''_*)\big)\Big)_k$ и $\operatorname{Coker}\alpha_k = \big(H_*(C'_*) \otimes H_*(C''_*)\big)_k$. После всех этих вычислений из точной гомологической последовательности (2) получаем точную последовательность

$$0\to\big(H_*(C'_*)\otimes H_*(C''_*)\big)_k\to H_k(C'_*\otimes C''_*)\to\Big(\operatorname{Tor}\big(H_*(C'_*), H_*(C''_*)\big)\Big)_{k-1}\to 0$$

Остаётся проверить, что полученная точная последовательность расщепляется. Для этого воспользуемся тем, что цепной комплекс C''_* свободный (до сих пор мы пользовались только тем, что свободен цепной комплекс C'_*). Пусть $I' : C'_* \to Z'_*$ и $I'' : C''_* \to Z''_*$ — расщепляющие отображения. Тогда ограничение $I' \otimes I''$ на $Z'_* \otimes Z''_*$ индуцирует гомоморфизм

$$H_*(C'_* \otimes C''_*) \to \frac{Z'_* \otimes Z''_*}{B'_* \otimes Z''_* + Z'_* \otimes B''_*} \cong H_*(C'_*) \otimes H_*(C''_*).$$

Этот гомоморфизм является расщепляющим отображением. □

2.3.3. Гомологии прямого произведения

Объединяя алгебраическую теорему Кюннета с вычислением цепного комплекса $C_*(K \times L)$, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.3.2 (Кюннет [Ku1], [Ku2]). *Пусть K и L — конечные симплициальные комплексы. Тогда имеет место точная последовательность*

$$0 \to \big(H_*(K) \otimes H_*(L)\big)_k \to H_k(K \times L) \to \big(\operatorname{Tor}(H_*(K), H_*(L)\big)_{k-1} \to 0.$$

Эта точная последовательность расщепляется, но не канонически.

Замечание. Следует отметить, что обе статьи Кюннета появились до того, как Эмми Нётер обратила внимание на то, что гомологии являются группами. Поэтому в его статья идёт речь о числах Бетти и числах кручения, а не о группах.

Пример 2.3.1. $H_k(T^n) = \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}}$.

Доказательство. Применим индукцию по n и воспользуемся тем, что $T^{n+1} = T^n \times S^1$. При $n = 1$ утверждение верно. Кроме того, $\operatorname{Tor}(H_*(T^n), \mathbb{Z}) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} H_k(T^{n+1}) &\cong \big(H_k(T^n) \otimes H_0(S^1)\big) \oplus \big(H_{k-1}(T^n) \otimes H_1(S^1)\big) \cong \\ &\cong H_k(T^n) \oplus H_{k-1}(T^n). \end{aligned}$$

Остаётся воспользоваться тем, что $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$. □

Для гомологий с коэффициентами в аддитивной группе поля F можно повторить доказательство алгебраической теоремы Кюннета, причём многие рассуждения упростятся, потому что на этот раз мы будем иметь дело с линейными отображениями. Если V и W — векторные пространства над F, то определим $V \otimes_F W$ как группу, которая получается из группы $V \otimes W$, если ввести дополнительное соотношение $\lambda v \otimes w = v \otimes \lambda w$ для любого $\lambda \in F$; группа $V \otimes_F W$ является векторным пространством над F. Начнём повторять доказательство алгебраической теоремы Кюннета, заменив свободные цепные комплексы C'_* и C''_* на $C'_* \otimes F$ и $C''_* \otimes F$, и заменяя всюду в доказательстве $\otimes$ на $\otimes_F$. Вплоть до вычисления ядра отображения α_k всё остаётся без изменений. Но теперь из точной последовательности

$$0 \to B'_p \otimes F \to Z'_p \otimes F \to H_p(C'_* \otimes F) \to 0$$

получается точная последовательность

$$0 \to (B'_p \otimes F) \otimes_F H_q(C''_* \otimes F) \xrightarrow{\alpha_k} (Z'_p \otimes F) \otimes_F H_q(C''_* \otimes F) \to \\ \to H_p(C'_* \otimes F) \otimes_F H_q(C''_* \otimes F) \to 0,$$

т.е. в этом случае $\operatorname{Ker} \alpha_k = 0$ и Tor пропадает. В результате получаем не короткую точную последовательность, а канонический изоморфизм

$$\bigoplus_{p+q=k} H_p(C'_* \otimes F) \otimes_F H_q(C''_* \otimes F) \to H_k(C'_* \otimes C''_* \otimes F).$$

Но $C'_* \otimes C''_* \otimes F \cong (C'_* \otimes F) \otimes_F (C''_* \otimes F)$, поэтому

$$\bigoplus_{p+q=k} H_p(K; F) \otimes_F H_q(L; F) \cong H_k(K \times L; F). \qquad (1)$$

Используя изоморфизм (1), можно доказать следующее свойство эйлеровой характеристики.

Теорема 2.3.3. *Пусть K и L — конечные симплициальные комплексы. Тогда $\chi(K \times L) = \chi(K)\chi(L)$.*

Доказательство. Пусть $b_k = \dim_F H_k(K \times L; F)$, $b'_p = \dim_F H_k(K; F)$ и $b''_q = \dim_F H_k(L; F)$. Из (1) следует, что $b_k = \sum_{p+q=k} b'_p b''_q$. Поэтому $(-1)^k b_k = \sum_{p+q=k} (-1)^p b'_p (-1)^q b''_q$, а значит,

$$\chi(K \times L) = \sum (-1)^k b_k = \left(\sum (-1)^p b'_p\right) \left(\sum (-1)^q b''_q\right) = \chi(K)\chi(L).$$

□

Задача 2.3.1. *Докажите, что произведение двух замкнутых многообразий ориентируемо тогда и только тогда, когда оба эти многообразия ориентируемы.*

Задача 2.3.2. *Докажите, что сфера S^n не является произведением двух многообразий положительной размерности.*

Задача 2.3.3. *Пусть $n > m > 1$. Докажите, что все гомотопические группы пространств $S^n \times \mathbb{R}P^m$ и $S^m \times \mathbb{R}P^n$ изоморфны, а группы гомологий у них разные.*

Задача 2.3.4. *Пусть $n > 1$. Докажите, что все гомотопические группы пространств $S^2 \times \mathbb{R}P^\infty$ и $\mathbb{R}P^2$ изоморфны, а группы гомологий у них разные.*

Задача 2.3.5. *Пусть A и B — конечные связные симплициальные комплексы. Докажите, что*

$$H_{r+1}(A * B) = \bigoplus_{i+j=r} \left(\tilde{H}_i(A) \otimes \tilde{H}_j(B)\right) \oplus \bigoplus_{i+j=r-1} \operatorname{Tor}\bigl(H_i(A), H_j(B)\bigr).$$

2.3.4. Теорема Кюннета для когомологий

Когомологии прямого произведения можно вычислять с помощью формулы универсальных коэффициентов и теоремы Кюннета для гомологий. Но можно и непосредственно получить для когомологий точную последовательность, аналогичную точной последовательности Кюннета для гомологий. Мы ограничимся рассмотрением групп коэффициентов $\mathbb{Z}$ и F (аддитивная группа поля).

Пусть $C'_* = C_*(K;\mathbb{Z})$ и $C''_* = C_*(L;\mathbb{Z})$, где K и L — конечные симплициальные комплексы. Рассмотрим коцепные комплексы $C'^* = \operatorname{Hom}(C'_*, \mathbb{Z})$ и $C''^* = \operatorname{Hom}(C''_*, \mathbb{Z})$, а также их тензорное произведение $C'^* \otimes C''^*$. Любой коцепной комплекс C^* можно формально рассматривать как цепной комплекс D_*, где $D_k = C^{-k}$ (при таком изменении нумерации граничный гомоморфизм будет действовать в нужном направлении). Условие $D_k = 0$ при $k \leqslant c$ эквивалентно тому, что $C^l = 0$ при $l \geqslant -c$. Для всех рассматриваемых коцепных комплексов такое условие выполняется, потому что K и L — конечные симплициальные комплексы.

Применим алгебраическую теорему Кюннета, формально рассматривая коцепные комплексы как цепные. В результате получим точную последовательность

$$0 \to \big(H_*(C'^*) \otimes H_*(C''^*)\big)_k \to H_k(C'^* \otimes C''^*) \to \\ \to \Big(\mathrm{Tor}\big(H_*(C'^*), H_*(C''^*)\big)\Big)_{k+1} \to 0.$$

Обратите внимание, что число $k-1$ заменилось на $k+1$ из-за изменения нумерации: если $(-p)+(-q)=(-k)-1$, то $p+q=k+1$.

К сожалению, полученная точная последовательность — это не совсем то, чего мы хотели. Здесь $H_p(C'^*) = H^p(K;\mathbb{Z})$ и $H_q(C''^*) = H^q(L;\mathbb{Z})$, как и нужно. Но когомологии $K \times L$ вычисляются с помощью коцепного комплекса $\mathrm{Hom}(C'_* \otimes C''_*, \mathbb{Z})$, а не с помощью коцепного комплекса $C'^* \otimes C''^* = \mathrm{Hom}(C'_*, \mathbb{Z}) \otimes \mathrm{Hom}(C''_*, \mathbb{Z})$.

Определим гомоморфизм

$$\theta : \mathrm{Hom}(C'_*, \mathbb{Z}) \otimes \mathrm{Hom}(C''_*, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(C'_* \otimes C''_*, \mathbb{Z})$$

следующим образом:

$$\langle \theta(c'^p \otimes c''^q), c'_r \otimes c''_s \rangle = \langle c'^p, c'_r \rangle \langle c''^q, c''_s \rangle;$$

здесь предполагается, что $\langle c'^p, c'_r \rangle = 0$, если $p \neq r$, и $\langle c''^q, c''_s \rangle = 0$, если $q \neq s$.

Лемма. θ *— коцепное отображение, т.е.* $\delta\theta = \theta\delta$.

Доказательство. По определению

$$\delta(c'^p \otimes c''^q) = \delta' c'^p \otimes c''^q + (-1)^p c'^p \otimes \delta'' c''^q.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\langle \delta\theta(c'^p \otimes c''^q), c'_r \otimes c''_s \rangle &= \langle \theta(c'^p \otimes c''^q), \partial(c'_r \otimes c''_s) \rangle = \\
&= \langle c'^p, \partial' c'_r \rangle \langle c''^q, c''_s \rangle + (-1)^r \langle c'^p, c'_r \rangle \langle c''^q, \partial'' c''_s \rangle, \\
\langle \theta\delta(c'^p \otimes c''^q), c'_r \otimes c''_s \rangle &= \langle \delta' c'^p, c'_r \rangle \langle c''^q, c''_s \rangle + (-1)^p \langle c'^p, c'_r \rangle \langle \delta'' c''^q, c''_s \rangle = \\
&= \langle c'^p, \partial' c'_r \rangle \langle c''^q, c''_s \rangle + (-1)^p \langle c'^p, c'_r \rangle \langle c''^q, \partial'' c''_s \rangle.
\end{aligned}$$

В полученных выражениях у вторых слагаемых могут оказаться разные знаки. Но если $p \neq r$, то $\langle c'^p, c'_r \rangle = 0$. □

На уровне групп легко установить, что θ — изоморфизм. Прежде всего отметим, что если $e_1, \ldots, e_n$ — базис $\mathbb{Z}^n$, то базис в $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ образуют отображения ε^i, для которых $\varepsilon^i(e_j) = \delta_{ij}$. Поэтому $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$, причём выбор базиса однозначно задаёт этот изоморфизм. Выбрав базисы в C'_p и в C''_q, получим изоморфизмы

$\mathrm{Hom}(C'_p, \mathbb{Z}) \cong C'_p$ и $\mathrm{Hom}(C''_q, \mathbb{Z}) \cong C''_q$. Базисы в C'_p и в C''_q задают базис в $C'_p \otimes C''_q$, поэтому

$$\mathrm{Hom}(C'_p, \mathbb{Z}) \otimes \mathrm{Hom}(C''_q, \mathbb{Z}) \cong C'_p \otimes C''_q \cong \mathrm{Hom}(C'_p \otimes C''_q, \mathbb{Z}).$$

Ясно также, что так определённый изоморфизм совпадает с θ.

В итоге получаем канонический изоморфизм

$$H_k({C'}^* \otimes {C''}^*) \to H^k(K \times L; \mathbb{Z}),$$

индуцированный гомоморфизмом θ.

Если в качестве группы коэффициентов вместо $\mathbb{Z}$ взять аддитивную группу поля F, то все рассуждения можно повторить для линейных пространств. В результате получим изоморфизм

$$\bigoplus_{p+q=k} H^p(K; F) \otimes_F H^q(L; F) \to H^k(K \times L; F).$$

2.3.5. Умножение в когомологиях и теорема Кюннета

Диагональное отображение $d\colon |K| \to |K \times K|$, заданное формулой $d(x) = (x, x)$, индуцирует гомоморфизмы гомологий и когомологий: $H_*(K) \xrightarrow{d_*} H_*(K \times K)$ и $H^*(K \times K) \xrightarrow{d^*} H^*(K)$. Для когомологий можно рассмотреть композицию гомоморфизма d^* и канонического мономорфизма $H^*(K) \otimes H^*(K) \to H^*(K \times K)$ из теоремы Кюннета. В результате получим канонический гомоморфизм $H^*(K) \otimes H^*(K) \to H^*(K)$. Образ элемента $\alpha \otimes \beta$ при этом гомоморфизме совпадает с $\alpha \smile \beta$, но проверка этого достаточно сложна, потому что отображение d не симплициальное. Ниже приведено доказательство, основанное на методе ацикличных моделей.

Для гомологий эту конструкцию применить нельзя, потому что гомоморфизм d_* действует в противоположном направлении:

$$H_*(K) \otimes H_*(K) \to H_*(K \times K) \xleftarrow{d_*} H_*(K).$$

Теорему Кюннета мы доказали не только для коэффициентов $\mathbb{Z}$, но и для коэффициентов F, где F — аддитивная группа некоторого поля. При этом в конструкции использовалась и мультипликативная структура поля (например, при определении гомоморфизма, аналогичного θ для коэффициентов $\mathbb{Z}$). Поэтому для когомологий с коэффициентами F тоже есть канонически определённое умножение $H^*(K; F) \otimes_F H^*(K; F) \to H^*(K; F)$. Оно тоже совпадает с cup-произведением.

Теорема об ацикличных моделях

Метод ацикличных моделей, разработанный Эйленбергом и Маклейном [Ei3], является обобщением метода ацикличных носителей. Наиболее естественно теорема об ацикличных моделях формулируется на языке категорий и функторов.

Категория $\mathcal{C}$ состоит из *объектов* и *морфизмов* $\hom(X,Y)$, заданных для каждой пары объектов X и Y. При этом для любых двух морфизмов $f \in \hom(X,Y)$ и $g \in \hom(Y,Z)$ должен быть определён морфизм $g \circ f \in \hom(X,Z)$ и должны выполняться следующие условия:

- $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;
- в $\hom(X,X)$ есть элемент id_X, для которого $f \circ \mathrm{id}_X = f$ и $\mathrm{id}_X \circ g = g$ для всех $f \in \hom(X,Y)$ и $g \in \hom(Y,X)$.

Ковариантный функтор T из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ сопоставляет каждому объекту X категории $\mathcal{C}$ объект $T(X)$ категории $\mathcal{D}$ и каждому морфизму $f \in \hom(X,Y)$ — морфизм $T(f) \in \hom(T(X),T(Y))$. При этом должны выполняться следующие условия: $T(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{T(X)}$ и $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$.

Контравариантный функтор отличается от ковариантного тем, что $T(f) \in \hom(T(Y),T(X))$ и $T(f \circ g) = T(g) \circ T(f)$.

Пусть T_1 и T_2 — ковариантные функторы из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$. *Естественное преобразование* $\tau : T_1 \to T_2$ сопоставляет каждому объекту X категории $\mathcal{C}$ морфизм $\tau(X) : T_1(X) \to T_2(X)$ так, что для любого морфизма $f : X \to Y$ (т.е. $f \in \hom(X,Y)$) коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} T_1(X) & \xrightarrow{T_1(f)} & T_1(Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \tau(X)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tau(Y)} \\ T_2(X) & \xrightarrow{T_2(f)} & T_2(Y). \end{array}$$

Категорией с моделями называют категорию, в которой выделен класс объектов $\mathcal{M} = \{M_\alpha\}$; эти выделенные объекты называют *моделями*. Функтор (ковариантный) T из категории с моделями в категорию свободных неотрицательных цепных комплексов и их цепных отображений называют *свободным* относительно моделей $\mathcal{M}$, если для каждого k можно выбрать подмножество $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}$, и в каждой группе $C_k(M_\alpha)$, $M_\alpha \in \mathcal{M}_k$, можно выбрать элемент e_α^k так, что элементы $T(f)(e_\alpha^k) \in C_k(X)$ попарно различны и образуют базис группы

$C_k(X)$. Здесь подразумевается, что f пробегает все элементы множества $\hom(e^k_\alpha, X)$, а α пробегает все индексы элементов множества $\mathcal{M}_k$.

Функтор T называют *ацикличным* относительно моделей $\mathcal{M}$, если $H_k(T(M_\alpha)) = 0$ при $k > 0$.

Если функтор свободен относительно моделей $\mathcal{M}$ то он свободен и относительно моделей $\mathcal{M}' \supset \mathcal{M}$, а если функтор ацикличен относительно моделей $\mathcal{M}$, то он ацикличен и относительно моделей $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$.

Пример 2.3.2. *Рассмотрим категорию симплициальных комплексов с упорядоченными вершинами и симплициальных отображений, сохраняющих порядок вершин. Функтор, сопоставляющий каждому симплициальному комплексу его цепной комплекс, свободен и ацикличен относительно моделей* $\mathcal{M} = \{[0, 1, \dots, k]\}$, $k = 0, 1, \dots$

Теорема 2.3.4 (об ацикличных моделях). *Предположим, что функтор* T *свободен, а функтор* T' *ацикличен относительно моделей* $\mathcal{M}$. *Тогда любое естественное преобразование* $\varphi : H_0(T) \to H_0(T')$ *индуцировано некоторым естественным цепным отображением* $\tau : T \to T'$. *Более того, любые два естественных цепных отображения* $\tau, \bar{\tau} : T \to T'$, *индуцирующие* φ, *естественно цепно гомотопны.*

Доказательство. Группа H_0 является факторгруппой 0-мерных цепей, поэтому имеются эпиморфизмы $p : T_0(M_\alpha) \to H_0(T(M_\alpha))$ и $p' : T'_0(M_\alpha) \to H_0(T'(M_\alpha))$. Для каждого выбранного элемента $e^0_\alpha \in T_0(M_\alpha)$ существует элемент $\tau_0(e^0_\alpha) \in T'_0(M_\alpha)$, для которого $p'\tau_0(e^0_\alpha) = \varphi p(e^0_\alpha)$.

Элементы $T(f)(e^0_\alpha)$, где $f \in \hom(M_\alpha, X)$, образуют базис группы $T_0(X)$. Положим $\tau_0\big(T(f)(e^0_\alpha)\big) = T'(f)(\tau_0(e^0_\alpha))$; эта формула однозначно задаёт гомоморфизм $\tau_0 : T_0(X) \to T'_0(X)$. Из естественности преобразования φ и того, что $T(f)$ и $T'(f)$ — цепные отображения, следует, что гомоморфизм τ_0 индуцирует в 0-мерных гомологиях исходное отображение $\varphi : H_0(T_0(X)) \to H_0(T'_0(X))$.

Гомоморфизмы $\tau_k : T_k(X) \to T'_k(X)$ будем строить индукцией по k так, чтобы выполнялось равенство $\partial\tau_k = \tau_{k-1}\partial$. А именно, для каждого заданного элемента $e^k_\alpha \in T_k(M_\alpha)$ рассмотрим $\tau_{k-1}(\partial e^k_\alpha) \in T'_{k-1}(M_\alpha)$. Легко проверить, что существует цепь $c^k_\alpha \in H_k(M_\alpha)$, для которой $\partial c^k_\alpha = \tau_{k-1}(\partial e^k_\alpha)$. При $k = 1$ это следует из того, что τ_0 индуцирует отображение 0-мерных гомологий, а при $k > 1$ — из того, что $\partial\tau_{k-1}(\partial e^k_\alpha) = \tau_{k-2}(\partial\partial e^k_\alpha) = 0$, а по условию $H_{k-1}(T'(M_\alpha)) = 0$. Положим $\tau_k(e^k_\alpha) = c^k_\alpha$ и построим гомоморфизм $\tau_k : T_k(X) \to T'_k(X)$ с помощью описанной выше конструкции.

Для цепных отображений $\tau, \bar{\tau} : T \to T'$, индуцирующих одно и то же естественное преобразование $\varphi : H_0(T) \to H_0(T')$, цепная гомотопия $D_k : T_k(X) \to T'_{k+1}(X)$ строится аналогично. Мы хотим, чтобы выполнялись равенства $\partial D_0 = \tau_0 - \bar{\tau}_0$, $\partial D_k = \tau_k - \bar{\tau}_k - D_{k-1}\partial$ при $k > 1$. Для построения такого гомоморфизма D_k достаточно, чтобы для любого выбранного элемента e_α^k цепь $\tau_k(e_\alpha^k) - \bar{\tau}_k(e_\alpha^k) - D_{k-1}\partial e_\alpha^k$ (цепь $\tau_0(e_\alpha^0) - \bar{\tau}_0(e_\alpha^0)$ при $k = 0$) была границей. При $k = 0$ требуемое свойство следует из того, что τ_0 и $\bar{\tau}_0$ индуцируют одно и то же отображение гомологий. А при $k > 1$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \partial\tau_k - \partial\bar{\tau}_k - \partial D_{k-1}\partial &= \tau_{k-1}\partial - \bar{\tau}_{k-1}\partial - \partial D_{k-1}\partial = \\ &= D_{k-2}\partial\partial = 0; \end{aligned}$$

остаётся воспользоваться ацикличностью функтора T'. $\square$

Диагональная аппроксимация Александера–Уитни

Пусть $d : |K| \to |K \times K|$ — диагональное отображение, $d_* : H_*(K) \to H_*(K \times K) \cong H_*(C_*(K) \otimes C_*(K))$ — индуцированное им отображение гомологий. На уровне цепей d_0 сопоставляет вершине v цепь $v \otimes v$. Будем называть *диагональной аппроксимацией* любое естественное цепное отображение $\tau : C_*(K) \to C_*(K) \otimes C_*(K)$, переводящее v в $v \otimes v$.

Функтор $C_*(K)$ свободен относительно моделей $\mathcal{M} = \{\Delta^k\}$ (см. пример 2.3.2), а функтор $C_*(K) \otimes C_*(K)$ ацикличен относительно этих моделей. Поэтому согласно теореме об ацикличных моделях любая диагональная аппроксимация индуцирует в гомологиях отображение d_*.

Для вычислений удобна *диагональная аппроксимация Александера–Уитни*, которая задаётся формулой

$$\tau([v_0, v_1, \ldots, v_n]) = \sum_{i=0}^{n} [v_0, \ldots, v_i] \otimes [v_i, \ldots, v_n].$$

Нужно лишь проверить, что это отображение цепное, т.е. $\tau\partial = \partial\tau$. Ясно, что

$$\begin{aligned}
\tau(\partial[0,1,\dots,n]) &= \tau\bigl(\sum(-1)^i[0,\dots,\hat\imath,\dots,n]\bigr) = \\
&= \sum_{i<j}(-1)^i[0,\dots,\hat\imath,\dots,j]\otimes[j,\dots,n] + \\
&+ \sum_{i<j}(-1)^i[0,\dots,j]\otimes[j,\dots,\hat\imath,\dots,n]; \\
\partial(\tau[0,1,\dots,n]) &= \partial\sum[0,\dots,j]\otimes[j,\dots,n] = \\
&= \sum_i(-1)^i[0]\otimes[0,\dots,\hat\imath,\dots,n] + \\
&+ \sum_{i\leqslant j,\, j\neq 0}(-1)^i[0,\dots,\hat\imath,\dots,j]\otimes[j,\dots,n] + \\
&+ \sum_{i\geqslant j,\, j\neq n}(-1)^i[0,\dots,j]\otimes[j,\dots,\hat\imath,\dots,n] + \\
&+ \sum_i(-1)^i[0,\dots,\hat\imath,\dots,n]\otimes[n].
\end{aligned}$$

Второе выражение отличается от первого дополнительной суммой

$$\begin{array}{rr}
 & +[0]\otimes[1,\dots,n] \\
-[0]\otimes[1,\dots,n] & -[0,1]\otimes[2,\dots,n] \\
+[0,1]\otimes[2,\dots,n] & +[0,1,2]\otimes[3,\dots,n] \\
\dots & \dots \\
(-1)^{n-1}[0,1,\dots,n-2]\otimes[n-1,n] & +(-1)^{n-1}[0,1,\dots,n-1]\otimes[n] \\
(-1)^n[0,1,\dots,n-1]\otimes[n], &
\end{array}$$

но эта сумма равна нулю.

Отображение $C_*(K)\to C_*(K\times K)$, представляющее собой композицию отображений

$$[0,1,\dots,n]\mapsto\sum[0,\dots,i]\otimes[i,\dots,n]\mapsto\sum[0,\dots,i]\times[i,\dots,n],$$

индуцирует в гомологиях отображение d_*, а в когомологиях — отображение d^*. Из этого уже легко вывести, что композиция отображений

$$H^*(K)\otimes H^*(K)\to H^*(K\times K)\xrightarrow{d^*}H^*(K)$$

даёт cup-произведение. Действительно, на уровне коцепей эта композиция сопоставляет коцепи $c^p \otimes c^q$ коцепь c^{p+q}, для которой

$$\begin{aligned}\langle c^{p+q}, [v_0, v_1, \ldots, v_{p+q}]\rangle &= \langle \theta(c^p \otimes c^q), \sum [v_0, \ldots, v_i] \otimes [v_i, \ldots, v_{p+q}]\rangle = \\ &= \sum \langle c^p, [v_0, \ldots, v_p]\rangle \langle c^q, [v_p, \ldots, v_{p+q}]\rangle.\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из того, что остальные слагаемые обращаются в нуль. Таким образом, $c^{p+q} = c^p \smile c^q$, что и требовалось.

2.3.6. Внешнее когомологическое произведение

Пусть K и L — конечные симплициальные комплексы, $C^*(K)$ и $C^*(L)$ — симплициальные коцепные комплексы, $C^*(K \times L)$ — клеточный коцепной комплекс. Коцепям $c^p \in C^p(K)$ и $c^q \in C^q(L)$ можно сопоставить коцепь $c^p \times c^q \in C^{p+q}(K \times L)$ следующим образом:

$$\langle c^p \times c^q, \Delta^{p'} \times \Delta^{q'}\rangle = \delta_{pp'}\delta_{qq'}\langle c^p, \Delta^{p'}\rangle\langle c^q, \Delta^{q'}\rangle.$$

Из равенства $\partial(\Delta^p \times \Delta^q) = \partial\Delta^p \times \Delta^q + (-1)^p\Delta^p \times \partial\Delta^q$ следует, что $\delta(c^p \times c^q) = \delta c^p \times c^q + (-1)^p c^p \times \delta c^q$. Поэтому получаем гомоморфизм групп $H^p(K) \times H^q(L) \to H^{p+q}(K \times L)$, называемый ***внешним когомологическим умножением***.

Легко проверить следующие свойства внешнего когомологического умножения:

- $(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma)$;
- если $p_K : K \times L \to K$ — естественная проекция, то $p_K^*(\alpha^p) = \alpha^p \times 1_L$;
- если отображение $T : X \times Y \to Y \times X$ задано формулой $T(x, y) = (y, x)$, то $T^*(\beta^q \times \alpha^p) = (-1)^{pq}\alpha^p \times \beta^q$.

Внешнее когомологическое умножение тесно связано с cup-умножением. А именно, $\alpha^p \smile \beta^q = d^*(\alpha^p \times \beta^q)$, где отображение $d^* : H^{p+q}(K \times K) \to H^{p+q}(K)$ индуцировано диагональным отображением d. Действительно, $\langle d^*(\alpha^p \times \beta^q), \Delta^{p+q}\rangle = \langle \alpha^p \times \beta^q, d(\Delta^{p+q})\rangle$. Отображение d не клеточное, поэтому $d(\Delta^{p+q})$ нужно заменить на диагональную аппроксимацию Александера–Уитни. В результате получим

$$\begin{aligned}\langle d^*(\alpha^p \times \beta^q), [v_0, \ldots, v_{p+q}]\rangle &= \langle \alpha^p \times \beta^q, \sum_{i=0}^{p+q} [v_0, \ldots, v_i] \times [v_i, \ldots, v_{p+q}]\rangle = \\ &= \langle \alpha^p \times \beta^q, [v_0, \ldots, v_p] \times [v_p, \ldots, v_{p+q}]\rangle = \\ &= \langle \alpha^p \smile \beta^q, [v_0, \ldots, v_{p+q}]\rangle,\end{aligned}$$

что и требовалось.

При вычислении колец когомологий прямых произведений симплициальных комплексов часто бывает полезно следующее утверждение.

Теорема 2.3.5. *В кольце $H^*(K \times L)$ выполняется равенство*

$$(\alpha_1^{p_1} \times \beta_1^{q_1}) \smile (\alpha_2^{p_2} \times \beta_2^{q_2}) = (-1)^{q_1 p_2} (\alpha_1^{p_1} \smile \alpha_2^{p_2}) \times (\beta_1^{q_1} \smile \beta_2^{q_2}).$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned}
(\alpha_1^{p_1} \times \beta_1^{q_1}) \smile (\alpha_2^{p_2} \times \beta_2^{q_2}) &= d^*_{K\times L}\big((\alpha_1^{p_1} \times \beta_1^{q_1}) \times (\alpha_2^{p_2} \times \beta_2^{q_2})\big) = \\
&= d^*_{K\times L}(\alpha_1^{p_1} \times \beta_1^{q_1} \times \alpha_2^{p_2} \times \beta_2^{q_2}), \\
(\alpha_1^{p_1} \smile \alpha_2^{p_2}) \times (\beta_1^{q_1} \smile \beta_2^{q_2}) &= d^*_K(\alpha_1^{p_1} \times \alpha_2^{p_2}) \times d^*_L(\beta_1^{q_1} \times \beta_2^{q_2}).
\end{aligned}$$

Ясно также, что $d_{K\times L} = (\mathrm{id}_K \times T \times \mathrm{id}_L) \circ (d_K \times d_L)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1^{p_1} \times \beta_1^{q_1}) \smile (\alpha_2^{p_2} \times \beta_2^{q_2}) = \\
&\qquad = (d_K \times d_L)^* (\mathrm{id}_K \times T \times \mathrm{id}_L)^* (\alpha_1^{p_1} \times \beta_1^{q_1} \times \alpha_2^{p_2} \times \beta_2^{q_2}) = \\
&\qquad\quad = (-1)^{q_1 p_2} (d_K \times d_L)^* (\alpha_1^{p_1} \times \alpha_2^{p_2} \times \beta_1^{q_1} \times \beta_2^{q_2}) = \\
&\qquad\qquad = (-1)^{q_1 p_2} (d_K \times d_L)^* d^*_K(\alpha_1^{p_1} \times \alpha_2^{p_2}) \times d^*_L(\beta_1^{q_1} \times \beta_2^{q_2}).
\end{aligned}$$

□

Следствие. *Если $\alpha \in H^*(K)$ и $\beta \in H^*(L)$, то $p_K^*\alpha \smile p_L^*\beta = \alpha \times \beta$.*

Доказательство. Прежде всего воспользуемся тем, что $p_K^*\alpha = \alpha \times 1_L$ и $p_L^*\beta = 1_K \times \beta$. Учитывая, что в рассматриваемом случае $q_1 = p_2 = 0$, получаем $(\alpha \times 1_L) \smile (1_K \times \beta) = (\alpha \smile 1_L) \times (1_K \smile \beta) = \alpha \times \beta$. □

Задача 2.3.6. *а) Вычислите кольцо когомологий $\mathbb{R}P^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}P^{n_k}$ с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$.*

б) Вычислите кольцо когомологий $\mathbb{C}P^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{C}P^{n_k}$ с коэффициентами $\mathbb{Z}$.

Задача 2.3.7. *Докажите, что если хотя бы одна из групп $H^*(K)$ и $H^*(L)$ не имеет кручения, то умножение в кольце $H^*(K \times L)$ полностью определяется умножениями в кольцах $H^*(K)$ и $H^*(L)$.*

Задача 2.3.8. *Пусть $K = \mathbb{R}P^2$, $L_1 = \mathbb{R}P^2 \vee S^3$ и $L_2 = \mathbb{R}P^3$. Докажите, что кольца $H^*(L_1)$ и $H^*(L_2)$ изоморфны, а кольца $H^*(K \times L)$ и $H^*(K \times L)$ не изоморфны.*

Сигнатура прямого произведения

С помощью внешнего когомологического умножения можно доказать теорему о сигнатуре прямого произведения двух многообразий. Будем считать, что $\sigma(M^n) = 0$, если n не делится на 4.

Теорема 2.3.6. $\sigma(M^p \times N^q) = \sigma(M^p)\sigma(N^q)$.

Доказательство. Если $p + q$ не делится на 4, то одно из чисел p и q не делится на 4, поэтому $\sigma(M^p \times N^q) = 0$ и $\sigma(M^p)\sigma(N^q) = 0$. В дальнейшем будем считать, что $p + q = 4k$. Для когомологий с коэффициентами $\mathbb{R}$ согласно теореме Кюннета

$$H^{2k}(M^p \times N^q) \cong \bigoplus_{i=0}^{2k} \big(H^i(M^p) \otimes_{\mathbb{R}} H^{2k-i}(N^q)\big).$$

Если $i + j \neq p$, то форма пересечения принимает на элементах $\alpha_1^i \otimes \beta_1^{2k-i}$ и $\alpha_2^j \otimes \beta_2^{2k-j}$ нулевое значение. Поэтому разложим пространство $H^{2k}(M^p \times N^q)$ в сумму пространств

$$\big(H^i(M^p) \otimes_{\mathbb{R}} H^{2k-i}(N^q)\big) \oplus \big(H^{p-i}(M^p) \otimes_{\mathbb{R}} H^{2k+i-p}(N^q)\big), \qquad (2.1)$$

где $i < p$, и ещё пространства $H^{p/2}(M^p) \otimes_{\mathbb{R}} H^{q/2}(N^q)$, которое есть только в том случае, когда числа p и q чётны. Эти пространства взаимно ортогональны относительно формы пересечения.

Докажем, что на каждом подпространстве (2.1) форма пересечения имеет нулевую сигнатуру, т.е. сигнатура $\sigma(M^p \times N^q)$ равна сигнатуре ограничения формы пересечения на подпространство $H^{p/2}(M^p) \otimes_{\mathbb{R}} H^{q/2}(N^q)$. Пусть $i < p/2$. Выберем в $H^i(M^p)$ базис $\{\alpha_s\}$. Пусть $\{\alpha_s^*\}$ — двойственный базис $H^{p-i}(M^p)$, т.е. $\langle \alpha_s \smile \alpha_r^*, [M^p]\rangle = \delta_{rs}$. Аналогично выберем в $H^{2k-i}(N^q)$ базис $\{\beta_t\}$ и в $H^{2k+i-p}(N^q)$ выберем двойственный ему базис $\{\beta_t^*\}$. В пространстве (2.1) в качестве базиса можно взять векторы вида $\alpha_s \otimes \beta_t$ и $\alpha_r^* \otimes \beta_u^*$. Форма пересечения обращается в нуль на всех парах базисных векторов, кроме пар вида $(\alpha_s \otimes \beta_t, \alpha_s^* \otimes \beta_t^*)$. Теорема 2.3.5 показывает, что на такой паре базисных векторов форма принимает значение $(-1)^{\dim \beta_t \dim \alpha_s^*} = (-1)^{(2k-i)(p-i)}$. Ясно также, что форма пересечения симметрическая. Поэтому в выбранном базисе ограничение формы пересечения на пространство (2.1) задаётся прямой суммой матриц $(-1)^d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где $d = (2k - i)(p - i)$. Сигнатура каждой такой матрицы равна нулю.

Если числа p и q нечётны, то пространство $H^{p/2}(M^p) \otimes_{\mathbb{R}} H^{q/2}(N^q)$ отсутствует, поэтому $\sigma(M^p \times N^q) = 0$.

Если числа p и q при делении на 4 дают остаток 2, то формы пересечения на пространствах $H^{p/2}(M^p)$ и $H^{q/2}(N^q)$ кососимметрические. Значит, в этих пространствах можно выбрать базисы так, что форма пересечения будет задаваться прямой суммой матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ограничение формы пересечения на тензорное произведение двух двумерных пространств с такими матрицами пересечения задаётся матрицей $-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; знак минус здесь появился из-за того, что число $\frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2}$ нечётно. Легко проверить, что сигнатура полученной матрицы равна нулю. Поэтому $\sigma(M^p \times N^q) = 0$.

Наконец, пусть оба числа p и q делятся на 4. Выберем базисы в пространствах $H^{p/2}(M^p)$ и $H^{q/2}(N^q)$ так, чтобы матрицы пересечения в этих базисах были диагональны. Возьмём тензорное произведение этих базисов и запишем матрицу A ограничения формы пересечения на пространство $H^{p/2}(M^p) \otimes H^{q/2}(N^q)$. Пусть r и s — количества положительных диагональных элементов для форм пересечения в $H^{p/2}(M^p)$ и $H^{q/2}(N^q)$. Матрица A диагональная с $rs + \left(\frac{p}{2} - r\right)\left(\frac{q}{2} - s\right)$ положительными элементами на диагонали и $r\left(\frac{q}{2} - s\right) + s\left(\frac{p}{2} - r\right)$ отрицательными. Её сигнатура равна $\left(r - \left(\frac{p}{2} - r\right)\right)\left(s - \left(\frac{q}{2} - s\right)\right) = \sigma(M^p)\sigma(N^q)$. □

Невырожденные билинейные отображения

Билинейное отображение $f : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ называют *невырожденным*, если из того, что $f(x, y) = 0$, следует, что $x = 0$ или $y = 0$. Билинейному невырожденному отображению $f : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ можно сопоставить отображение $F : \mathbb{R}P^{r-1} \times \mathbb{R}P^{s-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$, а именно, положим $F(\{\lambda x\}, \{\mu y\}) = \{\alpha f(x, y)\}$. Это определение корректно, поскольку $f(\lambda x, \mu y) = \lambda\mu f(x, y)$.

Согласно решению задачи 2.3.6 кольцо когомологий пространства $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m$ с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ изоморфно кольцу многочленов $\mathbb{Z}_2[u, v]$, профакторизованному по соотношениям $u^{n+1} = 0$ и $v^{m+1} = 0$. Используя это свойство, можно получить некоторые ограничения на числа r, s, n, для которых существует невырожденное билинейное отображение $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$. Эти ограничения были получены независимо Штифелем [St6] и Хопфом [Ho8]; их статьи поступили в редакцию журнала Commentarii Helv. Math. в один и тот же день.

Теорема 2.3.7 (Штифель–Хопф). *Если существует невырожденное билинейное отображение $f : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$, то число $\binom{n}{k}$ чётно для* *всех k, удовлетворяющих неравенствам $n - s < k < r$.*

Доказательство. Рассмотрим в $H_1(\mathbb{R}P^{r-1} \times \mathbb{R}P^{s-1}; \mathbb{Z}_2)$ гомологические классы a и b, представленные циклами $\mathbb{R}P^1 \times \{*\}$ и $\{*\} \times \mathbb{R}P^1$. Когомологические классы α и β, двойственные (в смысле линейной алгебры) классам a и b, мультипликативно порождают кольцо когомологий пространства $\mathbb{R}P^{r-1} \times \mathbb{R}P^{s-1}$. Пусть c и γ — образующие 1-мерных гомологий и когомологий пространства $\mathbb{R}P^{n-1}$. Достаточно доказать, что $F^*\gamma = \alpha + \beta$. Действительно, из этого равенства следует, что $0 = F^*(\gamma^n) = (\alpha + \beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}$. Поэтому если $k < r$ и $n - k < s$ (т.е. $n - s < k < r$), то число $\binom{n}{k}$ чётно.

Прежде всего покажем, что $F_*a = c$. Для этого достаточно проверить, что $F_*a \neq 0$. Гомологический класс, представленный петлёй в $\mathbb{R}P^{n-1}$, ненулевой тогда и только тогда, когда при поднятии этой петли в S^{n-1} получается незамкнутый путь. В рассматриваемой ситуации условие $f(-x, y) = -f(x, y)$ обеспечивает незамкнутость поднятия петли. Поэтому $F_*a = c$ и аналогично $F_*b = c$. Таким образом, $\langle F^*\gamma, a\rangle = \langle \gamma, F_*a\rangle = \langle \gamma, c\rangle = 1$ и $\langle F^*\gamma, b\rangle = 1$. Поэтому $F^*\gamma = \alpha + \beta$. □

Задача 2.3.9. *Докажите, что если существует невырожденное билинейное отображение $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то $n = 2^k$ для некоторого k.*

Задача 2.3.10. *а) Докажите, что существует невырожденное билинейное умножение $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^{r+s-1}$.*

б) Докажите, что если числа r и s чётны, то существует невырожденное билинейное умножение $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^{r+s-2}$.

в) Докажите, что если числа r и s делятся на 4, то существует невырожденное билинейное умножение $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^{r+s-4}$.

г) Докажите, что если числа r и s делятся на 8, то существует невырожденное билинейное умножение $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^{r+s-8}$.

Глава 3.

Применения симплициальных гомологий

В этой главе обсуждаются различные приложения симплициальных гомологий. Основу этих приложений составляет более подробное исследование свойств симплициальных гомологий и когомологий и введение на них дополнительных структур.

3.1. Гомологии и гомотопии

Здесь рассматриваются некоторые взаимосвязи между гомологиями и гомотопиями. Прежде всего доказывается теорема Гуревича об изоморфности групп $\pi_n(K)$ и $H_n(K)$ для $(n-1)$-связного симплициального комплекса K. Затем строится аппарат теории препятствий, который применяется для интерпретации групп когомологий как гомотопических классов отображений в пространство типа $K(\pi, n)$.

3.1.1. Теорема Гуревича

Определим отображение $h: \pi_n(K, x_0) \to H_n(K)$, где K — симплициальный комплекс и $x_0 \in K$, следующим образом. Рассмотрим сфероид $\varphi: (S^n, s_0) \to (K, x_0)$. Он индуцирует гомоморфизм гомологий $\varphi_*: H_n(S^n) \to H_n(K)$. Положим $h(\varphi) = \varphi_*([S^n])$, где $[S^n]$ — фундаментальный класс. Гомотопные отображения φ_0 и φ_1 индуцируют одинаковые гомоморфизмы гомологий, поэтому $h(\varphi_0) = h(\varphi_1)$, т.е. отображение h действительно определено для гомотопической группы $\pi_n(K, x_0)$.

Проверим, что h — гомоморфизм групп. Сфероиды φ и ψ мы будем рассматривать как отображения $(D^n, \partial D^n) \to (K, x_0)$. Мы будем предполагать, что сфера S^n склеена из двух шаров D^n, триангулированных столь мелко, что отображения φ и ψ гомотопны симплициальным отображениям; предполагается также, что объединение триангуляций шаров даёт триангуляцию сферы. В таком случае гомологические классы $h(\varphi)$ и $h(\psi)$ представлены циклами $\sum_\alpha \varphi(\Delta^n_{1\alpha})$ и $\sum_\beta \varphi(\Delta^n_{2\beta})$, где $\Delta^n_{1\alpha}$ и $\Delta^n_{2\beta}$ — симплексы триангуляций первого и второго шара, а гомологический класс $h(\varphi + \psi)$ представлен циклом $\sum_\alpha \varphi(\Delta^n_{1\alpha}) + \sum_\beta \varphi(\Delta^n_{2\beta})$. Потому h — гомоморфизм групп. Его называют ***гомоморфизмом Гуревича.***

Гомоморфизм h, как и сама группа $\pi_n(K, x_0)$, зависит от выбора отмеченной точки x_0. Но эта зависимость не очень существенная. А именно, если γ — произвольный путь из x_0 в x_1, то следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(K, x_0) & \xrightarrow{\gamma_*} & \pi_n(K, x_1) \\ h \searrow & & \swarrow h \\ & H_n(X) & \end{array}$$

Теорема 3.1.1 (Пуанкаре). *Если K — связный симплициальный комплекс, то гомоморфизм $h : \pi_1(K) \to H_1(K)$ — эпиморфизм, ядром которого служит коммутант $[\pi_1(K), \pi_1(K)]$ группы $\pi_1(K)$.*

Доказательство. Будем предполагать, что отмеченная точка x_0 — вершина K. Докажем сначала эпиморфность. Пусть $\Delta^1_i = [v_{0i}, v_{1i}]$, где v_{0i} и v_{1i} — вершины K, и $\sum a_i \Delta^1_i$ — цикл. Тогда $0 = \partial(\sum a_i \Delta^1_i) = \sum a_i v_{1i} - \sum a_i v_{0i}$. Пусть γ_α — путь из отмеченной точки x_0 в вершину v_α, идущий по рёбрам K. Этому пути соответствует цепь $\hat{\gamma}_\alpha \in C_1(K)$. Путь $\gamma_{0i} \Delta^1_i \gamma^{-1}_{1i}$ — петля с началом x_0. Ясно, что

$$h\left(\prod (\gamma_{0i} \Delta^1_i \gamma^{-1}_{1i})^{a_i}\right) = \sum a_i (\hat{\gamma}_{0i} + \Delta^1_i - \hat{\gamma}_{1i}).$$

Из равенства $\sum a_i v_{1i} = \sum a_i v_{0i}$ следует равенство $\sum a_i \hat{\gamma}_{1i} = \sum a_i \hat{\gamma}_{0i}$, поскольку v_α — свободные образующие группы $C_0(K)$. Итак, мы построили элемент фундаментальной группы, который отображается в $\sum a_i \Delta^1_i$.

Образом гомоморфизма h является абелева группа, поэтому его ядро содержится в коммутанте группы $\pi_1(K)$. Пусть ω — петля в K с началом x_0, для которой $h(\omega) = \partial(\sum a_i \Delta^2_i)$. Любая петля в K с началом в вершине гомотопна петле, идущей по рёбрам. Поэтому можно

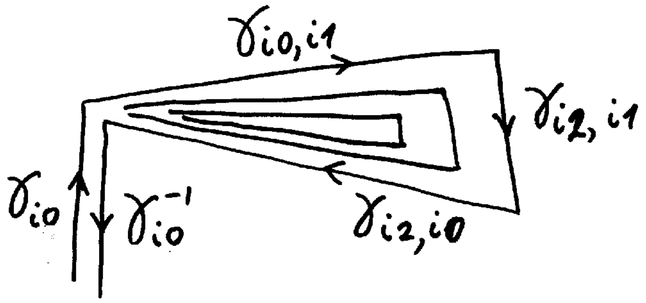

Рис. 3.1. Стягивание петли

считать, что $\omega = \prod \gamma_{j0,j1}$, где $\gamma_{j0,j1}$ — ориентированное ребро K. Для 1-мерных цепей имеет место равенство

$$\sum \hat{\gamma}_{j0,j1} = \sum a_i(\hat{\gamma}_{i0,i1} + \hat{\gamma}_{i1,i2} + \hat{\gamma}_{i2,i0}), \tag{1}$$

где $\hat{\gamma}_{\alpha,\beta}$ — ориентированный 1-мерный симплекс $[v_\alpha, v_\beta]$.

Пусть γ_α — путь из отмеченной точки x_0 в вершину v_α (если $v_\alpha = x_0$, то путь γ_α постоянный). Пусть, далее, $\overline{\gamma_\alpha \gamma_{\alpha,\beta} \gamma_\beta^{-1}}$ — образ петли $\gamma_\alpha \gamma_{\alpha,\beta} \gamma_\beta^{-1}$ в факторгруппе $\pi_1(K)$ по коммутанту; эта факторгруппа абелева. Равенство (1) выполняется для образующих $\hat{\gamma}_{\alpha,\beta}$ свободной группы, поэтому аналогичное равенство выполняется для элементов $\overline{\gamma_\alpha \gamma_{\alpha,\beta} \gamma_\beta^{-1}}$; запишем это равенство в мультипликативном виде:

$$\prod \overline{\gamma_{j0}\gamma_{j0,j1}\gamma_{j1}^{-1}} = \prod \left(\overline{\gamma_{i0}\gamma_{i0,i1}\gamma_{i1}^{-1}} \cdot \overline{\gamma_{i1}\gamma_{i1,i2}\gamma_{i2}^{-1}} \cdot \overline{\gamma_{i2}\gamma_{i2,i0}\gamma_{i0}^{-1}} \right)^{a_i}.$$

Из замкнутости пути ω следует, что

$$\prod \overline{\gamma_{j0}\gamma_{j0,j1}\gamma_{j1}^{-1}} = \prod \overline{\gamma_{j0,j1}} = \overline{\omega}.$$

Кроме того,

$$\overline{\gamma_{i0}\gamma_{i0,i1}\gamma_{i1}^{-1}} \cdot \overline{\gamma_{i1}\gamma_{i1,i2}\gamma_{i2}^{-1}} \cdot \overline{\gamma_{i2}\gamma_{i2,i0}\gamma_{i0}^{-1}} = \overline{\gamma_{i0}\gamma_{i0,i1}\gamma_{i1,i2}\gamma_{i2,i0}\gamma_{i0}^{-1}} = 1,$$

поскольку петля $\gamma_{i0,i1}\gamma_{i1,i2}\gamma_{i2,i0}$ стягиваема (см. рис. 3.1). Следовательно, $\overline{\omega} = 1$, что и требовалось. □

Теорема 3.1.2 (Гуревич [Hu]). *Пусть K — симплициальный комплекс, для которого $\pi_0(K) = \pi_1(K) = \ldots = \pi_{n-1}(K) = 0$, $n \geqslant 2$. Тогда гомоморфизм Гуревича $h : \pi_n(K) \to H_n(K)$ — изоморфизм.*

Доказательство. (Рохлин [Р]) Сначала проверим, что h — эпиморфизм. Пусть $\sum a_i\Delta_i^n \in C_n(K)$ — произвольный цикл. Из равенств $\pi_0(K) = \pi_1(K) = \ldots = \pi_{n-1}(K) = 0$ следует, что тождественное отображение $K \to K$ гомотопно отображению $f : K \to K$, переводящему остов K^{n-1} в отмеченную точку $x_0 \in K$ (см. часть I, доказательство теоремы Уайтхеда). Можно считать, что x_0 — вершина K. Тогда ограничение f на K^{n-1} является симплициальным отображением, поэтому существует симплициальная аппроксимация $g : K^{(m)} \to K$, ограничение которой на K^{n-1} совпадает с f, т.е. $g(K^{n-1}) = x_0$.

Итак, $g : K^{(m)} \to K$ — симплициальное отображение, которое гомотопно тождественному и переводит K^{n-1} в x_0. Пусть φ_i — ограничение g на Δ_i^n; φ_i можно рассматривать как сфероид $(D^n, \partial D^n) \to (K, x_0)$. Ясно, что $\sum a_i h(\varphi_i) = g_*([\sum a_i\Delta_i^n])$, где $[\sum a_i\Delta_i^n]$ — гомологический класс, представленный циклом $\sum a_i\Delta_i^n$. Но отображение g гомотопно тождественному, поэтому $g_*([\sum a_i\Delta_i^n]) = [\sum a_i\Delta_i^n]$.

Проверим теперь, что h — мономорфизм. Рассмотрим отображение $\varphi : S^n \to K$, для которого $\varphi_*([S^n]) = 0$. Требуется доказать, что φ представляет нулевой элемент группы $\pi_n(K)$. Отображение φ при этом можно считать симплициальным.

Лемма. *Существует симплициальный комплекс $L^{n+1} \supset S^n$, в котором цикл $[S^n]$ гомологичен нулю, причём отображение φ можно продолжить на L^{n+1}.*

Доказательство. Пусть на уровне цепей $\varphi_*([S^n]) = \partial(\sum \Delta_i^{n+1})$, где среди симплексов $\Delta_i^{n+1} \subset K$ могут быть и совпадающие. В качестве первого приближения к L^{n+1} возьмём несвязное объединение S^n и симплексов $\hat{\Delta}_i^{n+1}$, каждый из которых отождествляется с соответствующим симплексом $\Delta_i^{n+1} \subset K$; отображение φ продолжается на $\hat{\Delta}_i^{n+1}$ как тождественное отображение. В полученном симплициальном комплексе цикл $z_n = [S^n] - \sum \partial\hat{\Delta}_i^{n+1}$ гомологичен $[S^n]$ и $\varphi_*(z_n) = 0$.

Следующее приближение к L^{n+1} построим так, чтобы цикл z_n стал гомологичен циклу $w_n = \sum \Delta_j^n$, где $\varphi(\Delta_j^n) \subset K^{n-1}$. Предположим, что $z_n = \sum \Delta_\alpha^n$ и $\varphi(\Delta_{\alpha_1}^n) \not\subset K^{n-1}$, т.е. $\Delta_{\alpha_1}^n$ гомеоморфно отображается на некоторый симплекс из K. Из равенства $\varphi_*(z_n) = 0$ следует, что некоторый другой симплекс $\Delta_{\alpha_2}^n$ гомеоморфно отображается на тот же самый симплекс, но ориентации симплексов $\Delta_{\alpha_1}^n$ и $\Delta_{\alpha_2}^n$ противоположны. Приклеим к $\Delta_{\alpha_1}^n$ и $\Delta_{\alpha_2}^n$ триангулированную призму $\Delta^n \times I$, которая ориентирована так, что на $\Delta^n \times \{0\} = \Delta_{\alpha_1}^n$ и на $\Delta^n \times \{1\} = \Delta_{\alpha_2}^n$ индуцируются нужные ориентации. На $\Delta^n \times I$ отображение φ продолжается так, что все точки $\{x\} \times I$ отображаются в одну и ту же точку. Тогда

$\partial(\Delta^n \times I) = \Delta^n_{\alpha_1} + \Delta^n_{\alpha_2} + c_n$, где цепь c_n содержит только симплексы, для которых выполняется условие $\varphi(\Delta^n) \subset K^{n-1}$. Заменим в цикле z_n цепь $\Delta^n_{\alpha_1} + \Delta^n_{\alpha_2}$ на гомологичную ей цепь $-c_n$. После нескольких таких операций получим требуемый цикл w_n.

Наконец, добавим к полученному на предыдущем шаге симплициальному комплексу конусы над всеми симплексами Δ^n_j, входящими в цикл w_n. Пусть V — объединение всех таких симплексов, CV — конус над V. Конус CV ацикличен, поэтому цикл w_n теперь гомологичен нулю. Остаётся продолжить φ на CV. Отображение $\varphi : V \to K$ продолжается на CV тогда и только тогда, когда φ гомотопно постоянному отображению. По условию $\varphi(V) \subset K^{n-1}$. Из равенств $\pi_0(K) = \pi_1(K) = \ldots = \pi_{n-1}(K) = 0$ следует, что тождественное отображение $K \to K$ гомотопно отображению $f : K \to K$, переводящему остов K^{n-1} в x_0. Поэтому отображение $\varphi : V \to K^{n-1} \subset K$ гомотопно в K постоянному отображению. □

Пусть $\varphi : L^{n+1} \to K$ — непрерывное отображение, $S^n \subset L^{n+1}$ и $[S^n] = \partial c_{n+1}$ для некоторой цепи $c_{n+1} \in C_{n+1}(K)$. Заменив φ на гомотопное отображение, можно считать, что $\varphi(L^{n-1}) = x_0$. Тогда каждому симплексу $\Delta^n \subset L^{n+1}$ соответствует отображение $(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\varphi} (K, x_0)$, поэтому получаем гомоморфизм $\Phi_* : C_n(L^{n+1}) \to \pi_n(K)$.

Проверим, что $\Phi_*([S^n])$ — это гомотопический класс отображения $S^n \xrightarrow{\varphi} K$. Пусть $\Delta^n_1, \ldots, \Delta^n_k$ — те симплексы в S^n, для которых $\varphi(\Delta^n_i) \neq x_0$. Если $k \leqslant 2$, то требуемое утверждение непосредственно следует из определений. При $k > 2$ можно воспользоваться индукцией по k.

Итак, нужно доказать, что $\Phi_*([S^n]) = 0$. Для любого симплекса $\Delta^{n+1} \subset L^{n+1}$ элемент $\Phi_*(\partial\Delta^{n+1})$ соответствует гомотопическому классу отображения $\partial\Delta^{n+1} \xrightarrow{\phi} K$. Это отображение гомотопно постоянному, потому что оно продолжается на Δ^{n+1}. Поэтому $\Phi_*(\partial\Delta^{n+1}) = 0$. Пусть $c_{n+1} = \sum a_i \Delta^{n+1}$. Тогда $\Phi_*([S^n]) = \Phi_*(\partial c_{n+1}) = \sum a_i \Phi_*(\partial\Delta^{n+1}) = 0$, что и требовалось. □

Задача 3.1.1. *Докажите, что замкнутое односвязное трёхмерное многообразие M^3 гомотопически эквивалентно S^3.*

Задача 3.1.2. *Пусть M^n $(n \geqslant 3)$ — замкнутое многообразие размерности n, причём $\pi_k(M^n) = 0$ при $k \leqslant n/2$. Докажите, что M^n гомотопически эквивалентно сфере S^n.*

Задача 3.1.3. *а) Докажите, что надстройка над ацикличным CW-комплексом стягиваема.*

б) Приведите пример нестягиваемого пространства, надстройка над которым стягиваема.

3.1.2. Теория препятствий

Пусть X — линейно связное топологическое пространство, K — симплициальный комплекс, L — его подкомплекс, K^n — n-мерный остов K. Предположим, что на $\hat{K}^n = K^n \cup L$ задано отображение $f : \hat{K}^n \to X$. Мы хотим выяснить, можно ли его продолжить на $\hat{K}^{n+1}$. При $n = 0$ продолжение отображения в линейно связное пространство строится очевидным образом, поэтому будем предполагать, что $n \geqslant 1$.

Нам придётся складывать элементы групп $\pi_n(X, x)$ с разными отмеченными точками $x \in X$, поэтому будем предполагать, что пространство X гомотопически n-просто. Для $n = 1$ это означает, что группа $\pi_1(X, x)$ коммутативна.

Сопоставим отображению $f : \hat{K}^n \to X$ коцепь $c^{n+1}(f) \in C^{n+1}(K; \pi_n(X))$ следующим образом. Рассмотрение цепей и коцепей для K предполагает, что все симплексы K ориентированы. Ориентация симплекса $\Delta^{n+1} \subset K$ индуцирует ориентацию $\partial\Delta^{n+1} \approx S^n$, поэтому ограничение отображения f на $\partial\Delta^{n+1}$ определяет некоторый элемент группы $\pi_n(X)$. Мы полагаем, что коцепь $c^{n+1}(f)$ принимает на симплексе Δ^{n+1} значение, равное этому элементу группы $\pi_n(X)$.

Непосредственно из определения видно, что отображение f можно продолжить на симплекс $\Delta^{n+1} \subset K$ тогда и только тогда, когда $c^{n+1}(f)(\Delta^{n+1}) = 0$. В частности, если $\Delta^{n+1} \subset L$, то $c^{n+1}(f)(\Delta^{n+1}) = 0$, поскольку на L отображение f задано. Следовательно, $c^{n+1}(f) \in C^{n+1}(K, L; \pi_n(X)) \subset C^{n+1}(K; \pi_n(X))$. В дальнейшем коцепь $c^{n+1}(f)$ мы будем рассматривать именно как относительную коцепь. Её называют *препятствием* к продолжению отображения f на $\hat{K}^{n+1}$.

Задача 3.1.4. *Докажите, что $S^p \times S^q = (S^p \vee S^q) \cup_f D^{p+q}$, где отображение $f : S^{p+q-1} \to S^p \vee S^q$ не гомотопно постоянному.*

Теорема 3.1.3. *$\delta c^{n+1}(f) = 0$, т.е. $c^{n+1}(f) \in Z^{n+1}(K, L; \pi_n(X))$ — относительный коцикл.*

Доказательство. Нужно проверить, что $c^{n+1}(f)(\partial\Delta^{n+2}) = 0$ для любого $(n + 2)$-мерного симплекса в K. Прежде всего отметим, что n-мерный остов симплициального комплекса $\partial\Delta^{n+2} \approx S^{n+1}$ является $(n - 1)$-связным пространством. Этот остов гомотопически эквивалентен S^{n+1} с выколотыми точками (из каждой $(n + 1)$-мерной грани симплекса Δ^{n+2} выкалывается одна внутренняя точка), а выкалывание точки y_0 из $(n+1)$-мерного многообразия M^{n+1} не влияет на гомотопические группы π_0, π_1, …, π_{n-1}. Действительно, при $k \leqslant n$ любое отображение $S^k \to M^{n+1}$ гомотопно отображению, не задевающему y_0, а при $k \leqslant n-1$ любую гомотопию в M^{n+1}, связывающую два отображения $S^k \to M^{n+1} \setminus \{y_0\}$, можно заменить на гомотопию, не задевающую y_0.

Пусть $\partial\Delta^{n+2} = \sum \Delta_i^{n+1}$. Согласно определению элемент $c^{n+1}(f)(\Delta_i^{n+1}) \in \pi_n(X)$ соответствует отображению $\partial\Delta_i^{n+1} \xrightarrow{f} X$. Рассмотрим симплициальный комплекс B^n — n-мерный остов $\partial\Delta^{n+2}$. Возьмём в $\pi_n(B^n)$ элемент α_i, соответствующий гомеоморфизму $S^n \to \partial\Delta_i^{n+1}$, сохраняющему ориентацию. Ясно, что гомоморфизм $f_* : \pi_n(B^n) \to \pi_n(X)$ переводит α_i в $c^{n+1}(f)(\Delta_i^{n+1})$. Это означает, что композиция отображений

$$\text{цикл } \partial\Delta_i^{n+1} \to \text{класс в } H_n(B^n) \xrightarrow{h^{-1}} \pi_n(B^n) \xrightarrow{f_*} \pi_n(X),$$

где h — гомоморфизм Гуревича, даёт элемент $c^{n+1}(f)(\Delta_i^{n+1})$. Здесь мы пользуемся тем, что пространство B^n $(n-1)$-связно, поэтому h — изоморфизм при $n \geqslant 2$. Если $n = 1$, то отображение f_*h^{-1} тоже определено корректно, потому что по условию группа $\pi_1(X)$ абелева, а значит, f_* отображает коммутант группы $\pi_1(B^2)$ в 0. Таким образом, элемент $h^{-1}(z)$ определён с точностью до прибавления элемента $[\pi_1(B^2), \pi_1(B^2)]$, а элемент $f_*h^{-1}(z)$ определён однозначно.

Элемент $c^{n+1}(f)(\partial\Delta^{n+2})$ равен образу гомотопического класса цикла $\sum \partial\Delta_i^{n+1} = \partial\partial\Delta^{n+2} = 0$ при гомоморфизме f_*h^{-1}, поэтому $c^{n+1}(f)(\partial\Delta^{n+2}) = 0$. □

Когомологический класс коцикла $c^{n+1}(f)$ будем обозначать $C^{n+1}(f)$.

Теорема 3.1.4 (Эйленберг [Ei1]). *Равенство $C^{n+1}(f) = 0$ эквивалентно тому, что отображение $f : \hat{K}^n \to X$ можно продолжить на $\hat{K}^{n+1}$, предварительно изменив его на $\hat{K}^n \setminus \hat{K}^{n-1}$.*

Доказательство. Пусть $f, g : \hat{K}^n \to X$ — два отображения, совпадающие на $\hat{K}^{n-1}$. Определим *различающую коцепь* $d^n(f, g) \in C^n(K, L; \pi_n(X))$ следующим образом. Возьмём два экземпляра симплекса $\Delta^n \subset \hat{K}^n$ и склеим их по границе $\partial\Delta^n \subset \hat{K}^{n-1}$. Первый экземпляр мы отождествим с верхней полусферой, а второй с нижней; ориентация сферы согласована с ориентацией второго симплекса. Отобразим первый экземпляр Δ^n посредством f, а второй посредством g. На $\partial\Delta^n$ оба отображения совпадают, поэтому получаем непрерывное

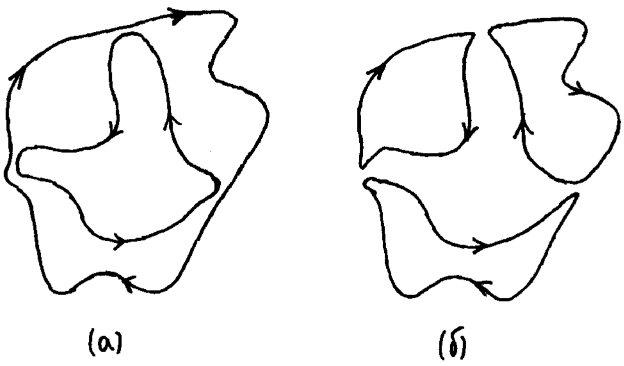

Рис. 3.2. Одинаковые гомотопические классы

отображение $S^n \to X$. Соответствующий ему элемент группы $\pi_n(X)$ и есть значение коцепи $d^n(f, g)$ на Δ^n.

Равенство $d^n(f, g)(\Delta^n) = 0$ эквивалентно тому, что отображение $\partial(\Delta^n \times I) \to X$, которое совпадает с f на $\Delta^n \times \{1\}$, с g на $\Delta^n \times \{0\}$ и с $f|_{\partial\Delta^n} = g|_{\partial\Delta^n}$ на $\partial\Delta^n \times \{t\}$ при всех t, можно продолжить на $\Delta^n \times I$, т.е. отображения $\Delta^n \xrightarrow{f} X$ и $\Delta^n \xrightarrow{g} X$ можно связать гомотопией, неподвижной на $\partial\Delta^n$. В частности, $d^n(f, g)(\Delta^n) = 0$, если $\Delta^n \subset L$, т.е. $d^n(f, g)(\Delta^n)$ действительно является относительной коцепью. Кроме того, равенство $d^n(f, g)(\Delta^n) = 0$ эквивалентно тому, что отображения f и g можно соединить гомотопией, неподвижной на $\hat{K}^{n-1}$.

Лемма 1. *Для любого отображения $f : \hat{K}^n \to X$ и для любой коцепи $d^n \in C^n(K, L; \pi_n(X))$ найдётся отображение $g : \hat{K}^n \to X$, совпадающее с f на $\hat{K}^{n-1}$, для которого $d^n(f, g) = d^n$.*

Доказательство. Для каждого симплекса $\Delta^n \subset \hat{K}^n$ отображение g можно выбрать так, чтобы отображение $S^n \to X$, заданное на верхней полусфере посредством f, а на нижней — посредством g, представляло данный элемент группы $\pi_n(X)$, причём для симплекса $\Delta^n \subset L$ элемент группы $\pi_n(X)$ нулевой, т.е. можно положить $g = f$. Требуемого всегда можно добиться, поскольку $\pi_n(X)$ — группа. $\square$

Лемма 2. $\delta d^n(f, g) = c^{n+1}(g) - c^{n+1}(f)$.

Доказательство. Элемент $\big(c^{n+1}(g) - c^{n+1}(f)\big)(\Delta^{n+1})$ равен разности гомотопических классов отображений $\partial\Delta^{n+1} \xrightarrow{g} X$ и $\partial\Delta^{n+1} \xrightarrow{f} X$. Пусть $\partial\Delta^{n+1} = \sum \Delta_i^n$. Тогда элемент $d^n(\partial\Delta^{n+1})$ равен сумме $n+2$ гомотопических классов отображений $S^n \to X$, каждое из которых на верхней полусфере устроено как $\Delta_i^n \xrightarrow{f} X$, а на нижней — как $\Delta_i^n \xrightarrow{g} X$, $i = 1, \ldots, n+2$.

Например, при $n = 1$ один элемент представляется суммой гомотопических классов двух кривых, изображённых на рис. 3.2 (а), а другой элемент представляется суммой гомотопических классов трёх кривых, изображённых на рис. 3.2 (б). Эти элементы равны, потому что результат сложения гомотопических классов двух кривых по условию не зависит от выбора отмеченной точки. Для произвольного n тоже получаются одинаковые гомотопические классы. $\square$

Теперь можно перейти непосредственно к доказательству теоремы. Пусть $C^{n+1}(f) = 0$, т.е. $c^{n+1}(f) = \delta d^n$ для некоторой коцепи d^n. Согласно лемме 1 существует отображение $g : \hat{K}^n \to X$, совпадающее с f на $\hat{K}^{n-1}$, для которого $d^n(f, g) = -d^n$. Тогда согласно лемме 2

$$c^{n+1}(g) = \delta d^n(f, g) + c^{n+1}(f) = -\delta d^n + \delta d^n = 0,$$

т.е. отображение g можно продолжить на $\hat{K}^{n+1}$.

Предположим теперь, что существует отображение $g : \hat{K}^n \to X$, совпадающее с f на $\hat{K}^{n-1}$, которое можно продолжить на $\hat{K}^{n+1}$. Тогда $c^{n+1}(g) = 0$ и $c^{n+1}(f) = c^{n+1}(f) - c^{n+1}(g) = -\delta d^n(f, g)$, т.е. $C^{n+1}(f) = 0$. $\square$

Замечание. В дальнейшем нам понадобится равенство $d^n(f, g) + d^n(g, h) + d^n(h, f) = 0$. Оно доказывается с помощью тех же рассуждений, что и лемма 2.

3.1.3. Теорема Хопфа–Уитни

В части I доказана теорема Хопфа о том, что множество гомотопических классов отображений $M^n \to S^n$ находится во взаимно однозначном соответствии с $\mathbb{Z}$ (это соответствие таково: отображению $f : M^n \to S^n$ сопоставляется число $\deg f \in \mathbb{Z}$). Методами теории препятствий теорему Хопфа можно существенно обобщить. Введём следующее обозначение: $[X, Y]$ — множество классов гомотопически эквивалентных отображений $X \to Y$. Для пространств с отмеченными точками при этом рассматриваются отображения, переводящие отмеченную точку в отмеченную, и гомотопии в классе таких отображений.

Следующая теорема была доказана Хопфом [Ho5], но не в терминах когомологий, а в терминах гомологий. Поэтому в случае, когда $(n-1)$-мерные гомологии K имеют кручение, формулировка была довольно запутанной. Уитни [Wh3] заметил, что для когомологий не только формулировка получается более простой, но и соответствие имеет более естественное описание.

Теорема 3.1.5 (Хопф–Уитни). *Для любого n-мерного симплициального комплекса K (с отмеченной вершиной) и любого $(n-1)$-связного пространства X (с отмеченной точкой x_0) имеет место взаимно однозначное соответствие*

$$[K, X] \longleftrightarrow H^n(K; \pi_n(X)).$$

Доказательство. Рассмотрим множество отображений пар $(K, K^{n-1}) \to (X, x_0)$. Будем считать такие отображения эквивалентными, если существует связывающая их гомотопия, неподвижная на K^{n-2}. Множество классов эквивалентности обозначим $[[K, X]]$. Покажем, что естественное отображение $\theta : [[K, X]] \to [K, X]$ взаимно однозначно.

Пусть $f : K \to X$ — произвольное отображение. Построим гомотопию, связывающую отображения $K^0 \to x_0$ и $K^0 \xrightarrow{f} X$. Пользуясь $(n-1)$-связностью пространства X, продолжим эту гомотопию до гомотопии, связывающей отображения $K^{n-1} \to x_0$ и $K^{n-1} \xrightarrow{f} X$. Согласно лемме Борсука эту гомотопию можно продолжить до гомотопии отображения $f : K \to X$. В результате получим отображение $g : K \to X$, которое гомотопно f и отображает K^{n-1} в x_0. Следовательно, отображение θ сюръективно.

Пусть теперь $f, g : (K, K^{n-1}) \to (X, x_0)$ — отображения, связанные гомотопией $H_0 : K \times I \to X$. Требуется доказать, что их можно связать гомотопией, неподвижной на K^{n-2}. По условию $H_0(K^{n-1} \times \partial I) = x_0$, а значит, $H_0(K^{n-2} \times \partial I) = x_0$. Продолжим отображение $K^{n-2} \times \partial I \times I \to x_0 \in X$ до отображения $K^{n-2} \times I \times I \to X$ так, чтобы на $K^{n-2} \times I \times \{0\}$ оно совпадало с H_0, а на $K^{n-2} \times I \times \{1\}$ было постоянно. Это можно сделать индукцией по размерности остова, поскольку размерность CW-комплекса $K^{n-2} \times I \times I$ не превосходит n, а пространство X $(n-1)$-связно. Построенную на $K^{n-2} \times I$ гомотопию можно продолжить до гомотопии H_t отображения H_0. Пусть $f'(y) = H_1(y, 0)$ и $g'(y) = H_1(y, 1)$. Тогда $f \sim f' \sim g' \sim g$, причём все гомотопии неподвижны на K^{n-2}.

Сопоставим отображению $f : (K, K^{n-1}) \to (X, x_0)$ класс когомологий $k(f) \in H^n(K; \pi_n(X))$, который соответствует коциклу $d^n(f, *)$, где

$*$ — отображение K в x_0 (различающая коцепь $d^n(f,*)$ является коциклом, потому что $\dim K = n$). Покажем, что построенное отображение

$$k : [[K,X]] \to H^n(K;\pi_n(X))$$

взаимно однозначно.

Пусть $f, g : (K, K^{n-1}) \to (X, x_0)$ — отображения, для которых $k(f) = k(g)$. Тогда коцикл $d^n(f,g) = d^n(f,*) - d^n(g,*)$ является кограницей, т.е. отображения f и g связаны гомотопией, неподвижной на K^{n-2}. Следовательно, отображение k инъективно. Рассмотрим теперь произвольный коцикл $d^n \in Z^n(K;\pi_n(X))$. Его можно реализовать как различающую коцепь $d^n(f,*)$ для некоторого отображения $f : (K, K^{n-1}) \to (X, x_0)$. При этом $k(f)$ — класс когомологий коцикла $d^n = d^n(f,*)$. Следовательно, отображение k сюръективно. □

Для $X = S^n$ соответствие $[K, S^n] \longleftrightarrow H^n(K;\mathbb{Z})$ задаётся достаточно явным образом: отображению $f : K \to S^n$ сопоставляется элемент $f^*\alpha \in H^n(K;\mathbb{Z})$, где α — образующая группы $H^n(S^n;\mathbb{Z})$. Действительно, можно считать, что f отображает K^{n-1} в отмеченную точку $*$. Согласно определению различающая коцепь $d^n(f,*)$ принимает на каждом симплексе $\Delta^n \subset K^n = K$ значение, равное степени отображения $\Delta^n/\partial\Delta^n \xrightarrow{f} S^n$. Коцикл, представляющий когомологический класс $f^*\alpha$, тоже принимает на этом симплексе такое же значение. Таким образом, из теоремы Хопфа–Уитни вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.1.6. *Если K — n-мерный симплициальный комплекс, то любой элемент группы $H^n(K;\mathbb{Z})$ можно представить в виде $f^*\alpha$, где α — образующая группы $H^n(S^n;\mathbb{Z})$ и $f : K \to S^n$ — некоторое отображение.*

3.1.4. Пространства Эйленберга–Маклейна

Пусть n — натуральное число, π — некоторая группа, абелева при $n \geqslant 2$. CW-комплекс X называют *пространством типа $K(\pi,n)$*, или *пространством Эйленберга–Маклейна*, если

$$\pi_k(X) = \begin{cases} \pi & \text{при } k = n, \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases}$$

Пространства Эйленберга–Маклейна были введены в [Ei2], [Ei4].

Пример 3.1.1. *S^1 — пространство типа $K(\mathbb{Z},1)$.*

Пример 3.1.2. *Замкнутое двумерное многообразие M^2, отличное от S^2 и $\mathbb{R}P^2$, является пространством типа $K(\pi, 1)$, где $\pi = \pi_1(M^2)$.*

Пример 3.1.3. $\mathbb{R}P^\infty$ — *пространство типа $K(\mathbb{Z}_2, 1)$.*

Пример 3.1.4. $\mathbb{C}P^\infty$ — *пространство типа $K(\mathbb{Z}, 2)$.*

Пример 3.1.5. *Пусть X_n — множество всех точек $\mathbb{C}^n$ с попарно различными координатами. Тогда X_n — пространство типа $K(P_n, 1)$. (Возникающую здесь группу P_n называют* группой крашеных кос *из n нитей.)*

Доказательство. Рассмотрим отображение $X_n \to X_{n-1}$, которое состоит в забывании последней координаты. Это отображение является локально тривиальным расслоением. Слой F этого расслоения представляет собой $\mathbb{C}$ без $n-1$ точек. Таким образом, слой гомотопически эквивалентен букету $n-1$ окружностей. В частности, $\pi_k(F) = 0$ при $k \geqslant 2$. Поэтому точная последовательность $\pi_k(F) \to \pi_k(X_n) \to \pi_k(X_{n-1})$ показывает, что если $k \geqslant 2$ и $\pi_k(X_{n-1}) = 0$, то $\pi_k(X_n) = 0$. Остаётся заметить, что пространство $X_1 = \mathbb{C}$ стягиваемо. □

Пример 3.1.6. *Пусть Y_n — фактор X_n по действию группы S_n (перестановки координат). Тогда Y_n — пространство типа $K(B_n, 1)$. (Возникающую здесь группу B_n называют* группой кос *из n нитей.*

Доказательство. Отображение $X_n \to X_n/S_n = Y_n$ является накрытием. Поэтому $\pi_k(X_n) \cong \pi_k(X_n)$ при $k \geqslant 2$. □

Будем рассматривать S^∞ как подмножество $\mathbb{C}^\infty$, состоящее из точек $(z_1, z_2, \ldots)$, для которых $\sum |z_i|^2 = 1$. Введём на S^∞ следующее отношение эквивалентности: $(z_1, z_2, \ldots) \sim (\varepsilon z_1, \varepsilon z_2, \ldots)$, где $\varepsilon = \exp(2\pi i/m)$. Пространство $L_m^\infty = S^\infty/\sim$ называют *бесконечномерным линзовым пространством*.

Пример 3.1.7. L_m^∞ — *пространство типа $K(\mathbb{Z}_m, 1)$.*

Доказательство. Накрытие $S^\infty \to L_m^\infty$ универсальное, поскольку пространство S^∞ стягиваемо (часть I, задача???). Это накрытие является регулярным накрытием с группой автоморфизмов $\mathbb{Z}_m$, поэтому $\pi_1(L_m^\infty) = \mathbb{Z}_m$. Кроме того, $\pi_i(L_m^\infty) = \pi_i(S^\infty) = 0$ при $i \geqslant 2$. □

Задача 3.1.5. *Докажите, что*

$$H_n(L_m^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z}_m & \textit{для нечётных } n; \\ 0 & \textit{для чётных } n > 0. \end{cases}$$

Задача 3.1.6. *Пусть M^3 — трёхмерное многообразие с бесконечной фундаментальной группой, причём $\pi_2(M^3) = 0$. Докажите, что M^3 — пространство типа $K(\pi, 1)$.*

Теорема 3.1.7. *Для любых n и π существует симплициальный комплекс типа $K(\pi, n)$.*

Доказательство. Рассмотрим свободную резольвенту $0 \to R \to F \to \pi \to 0$, где R и F — свободные группы при $n = 1$ и свободные абелевы группы при $n \geqslant 2$. Пусть $\{a_i | i \in I\}$ и $\{b_j | j \in J\}$ — базисы групп R и F. Пусть, далее, K^n — букет n-мерных триангулированных сфер S_j^n, $j \in J$. Тогда группа $\pi_n(K^n)$ канонически изоморфна F. Для каждой образующей $a_i \in R \subset F = \pi_n(K^n)$ возьмём непрерывное отображение $f_i : S_i^n \to K^n$, которое является представителем гомотопического класса $a_i \in \pi_n(K^n)$, и рассмотрим его симплициальную аппроксимацию φ_i. Триангуляция S_i^n естественно продолжается до триангуляции $D_i^{n+1} \supset S_i^n$ (к каждому n-мерному симплексу добавляется одна вершина — центр шара). Пусть K^{n+1} — симплициальный комплекс, который получается из K^n приклеиванием шаров D_i^{n+1} по отображениям φ_i. Если $n = 1$, то согласно теореме 20.1 из части I $\pi_1(K^2) \cong \pi$. Если $n > 1$, то можно воспользоваться теоремой Гуревича. Действительно, из теоремы о клеточной аппроксимации следует, что пространство K^{n+1} $(n - 1)$-связно. Ясно также, что $H_n(K^{n+1}) \cong \pi$. Поэтому согласно теореме Гуревича $\pi_n(K^{n+1}) \cong \pi$.

Выберем теперь в $\pi_{n+1}(K^{n+1})$ систему образующих, для каждой образующей рассмотрим соответствующее ей симплициальное отображение $\psi : S^{n+1} \to K^{n+1}$ и приклеим D^{n+2} к K^{n+1} по отображению ψ. В результате получим симплициальный комплекс K^{n+2}, у которого гомотопические группы такие, как нужно, вплоть до размерности $n + 1$. Это вытекает из следующего утверждения.

Лемма. *Пусть CW-комплекс X' получен из CW-комплекса X приклеиванием $(n + 2)$-мерной клетки по отображению $\psi : S^{n+1} \to X^{n+1}$. Тогда включение $i : X \to X'$ при $k \leqslant n$ индуцирует изоморфизм $i_* : \pi_k(X) \to \pi_k(X')$, а при $k = n + 1$ оно индуцирует эпиморфизм $i_* : \pi_k(X) \to \pi_k(X')$, ядро которого содержит подгруппу, порождённую гомотопическим классом отображения ψ.*

Доказательство. Согласно теореме о клеточной аппроксимации при $k \leqslant n + 1$ любое отображение сферы S^k в CW-комплекс Y гомотопно отображению в $(n + 1)$-мерный остов Y^{n+1}, а при $k \leqslant n$ любую гомотопию в Y между двумя отображениями $S^k \to Y^{n+1}$ можно заменить на гомотопию в Y^{n+1}. Из этого вытекает утверждение об изоморфности i_* при $k \leqslant n$ и эпиморфности i_* при $k = n+1$.

Композиция отображений $S^{n+1} \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{i} X'$ гомотопна постоянному отображению; стягивание производится по клетке D^{n+2}. $\square$

Тем же самым способом, каким мы уничтожили $(n+1)$-мерную гомотопическую группу пространства K^{n+1}, уничтожается и группа $\pi_{n+2}(K^{n+2})$ и т.д. $\square$

Теорема 3.1.8. *Любые два пространства типа $K(\pi, n)$ (с одинаковыми π и n) гомотопически эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно проверить, что любое пространство X типа $K(\pi, n)$ гомотопически эквивалентно симплициальному комплексу K, построенному при доказательстве теоремы 3.1.7. Построим непрерывное отображение $K \to X$, индуцирующее изоморфизм $\pi_k(K) \to \pi_k(X)$ для всех k. Сначала определим это отображение на $K^n = \bigvee S_j^n$. Каждая сфера S_j^n соответствует образующей b_j группы $\pi_n(X)$. Выберем для этого элемента $b_j \in \pi_n(X)$ представляющее его отображение $S_j^n \to X$. В результате получим отображение $K^n \to X$. Продолжим его на K^{n+1} следующим образом. Для $(n+1)$-мерной клетки D_i^{n+1} характеристическое отображение $S_j^n \to K^n$ соответствует образующей $a_i \in R \subset F = \pi_n(K^n)$. Отображение $K^n \to X$ индуцирует эпиморфизм $\pi_n(K^n) \to \pi_n(X)$ с ядром R. Поэтому композиция отображений $S_i^n \to K^n \to X$ гомотопна постоянному отображению, а значит, это отображение можно продолжить на всю клетку D_i^{n+1}. В результате получим отображение $K^{n+1} \to X$. Рассмотрим композицию отображений $K^n \to K^{n+1} \to X$ и индуцированные гомоморфизмы групп $\pi_n(K^n) \to \pi_n(K^{n+1}) \to \pi_n(X)$. Нам известно, что оба гомоморфизма $\pi_n(K^n) \to \pi_n(K^{n+1})$ и $\pi_n(K^n) \to \pi_n(X)$ являются эпиморфизмами с ядром R. Из этого следует, что $\pi_n(K^{n+1}) \to \pi_n(X)$ — изоморфизм.

Для продолжения отображения $K^{n+1} \to X$ на клетки размерности больше $n+1$ нет никаких препятствий, потому что $\pi_n(X) = 0$ при $k \geqslant n+1$. Построенное отображение $K \to X$ индуцирует изоморфизм групп $\pi_k(K) \to \pi_k(X)$ для всех k. При $k = n$ это следует из того, что включение $K^{n+1} \to K$ индуцирует изоморфизм $\pi_n(K^{n+1}) \to \pi_n(K)$, а при $k \neq n$ — из того, что $\pi_k(K) = \pi_k(X) = 0$. По условию оба пространства K и X являются CW-комплексами, поэтому можно воспользоваться теоремой Уайтхеда (часть I, теорема 14.9). $\square$

Задача 3.1.7. *Пусть X — конечномерный симплициальный комплекс типа $K(\pi, 1)$. Докажите, что группа π не содержит элементов конечного порядка.*

3.1.5. Когомологии и отображения в пространства типа $K(\pi, n)$

Пусть K — $(n-1)$-связный симплициальный комплекс, где $n \geqslant 2$. Тогда группа $\mathrm{Hom}(H_n(K), \pi_n(K))$ содержит гомоморфизм h^{-1}, обратный гомоморфизму Гуревича $h : \pi_n(K) \to H_n(K)$. Кроме того, $H_{n-1}(K) = 0$, поэтому из точной последовательности

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(K), G) \to H^n(K; G) \to \mathrm{Hom}(H_n(K), G) \to 0$$

получаем $H^n(K; G) \cong \mathrm{Hom}(H_n(K), G)$. Класс когомологий $F_K \in H^n(K; \pi_n(K))$, соответствующий гомоморфизму h^{-1}, называют *фундаментальным когомологическим классом* пространства K. Наиболее важен случай, когда K — симплициальный комплекс типа $K(\pi, n)$. В этом случае фундаментальный когомологический класс будем обозначать $F_\pi \in H^n(K; \pi) \cong \mathrm{Hom}(H_n(K), \pi)$; отметим, что $H_n(K) \cong \pi$ и F_π соответствует тождественному отображению $\pi \to \pi$.

Для симплициального комплекса K типа $K(\pi, n)$, построенного при доказательстве теоремы 3.1.7, фундаментальный когомологический класс F_π представлен коциклом c^n, который устроен следующим образом. Напомним, что $K^n = \bigvee S_i^n$, где каждая сфера S_i^n соответствует образующей $a_i \in \pi$. На фундаментальном классе сферы S_i^n коцикл c^n принимает значение a_i. Это следует из того, что гомоморфизм Гуревича сопоставляет элементу $a_i \in \pi_n(K)$ фундаментальный класс сферы S_i^n.

Теорема 3.1.9. *Пусть L — симплициальный комплекс типа $K(\pi, n)$. Тогда для любого симплициального комплекса K отображение $[K, L] \to H^n(K, \pi)$, при котором отображению $f : K \to L$ сопоставляется элемент $f^*(F_\pi) \in H^n(K; \pi)$, взаимно однозначно.*

Доказательство. Согласно теореме Хопфа–Уитни имеет место взаимно однозначное соответствие

$$[K^n, L] \longleftrightarrow H^n(K^n; \pi_n(L)) = H^n(K^n; \pi).$$

Поэтому нужно лишь проверить, что это соответствие имеет требуемый вид и всё определяется n-мерным остовом K^n. Рассмотрим диаграмму

$$
\begin{array}{ccc}
[K, L] & \xrightarrow{i^{\#}} & [K^n, L] \\
 & & \big\downarrow k\theta^{-1} \\
H^n(K; \pi) & \xrightarrow{i^*} & H^n(K^n; \pi)
\end{array} \tag{1}
$$

Здесь обе горизонтальные стрелки индуцированы естественным включением $i : K^n \to K$; $k\theta^{-1}$ — отображение из теоремы Хопфа–Уитни. Отображение $i^* : H^n(K; \pi) \to H^n(K^n; \pi)$ инъективно, потому что коцепи размерности не более n в K отождествляются с коцепями в K^n, и равенство $z^n = \delta w^{n+1}$ переносится из K^n в K. Отображение $i^{\#} : [K, L] \to [K^n, L]$ тоже инъективно. Действительно, если ограничения отображений $f, g : K \to L$ на K^n гомотопны, то гомотопны и сами отображения, потому что все препятствия к продолжению этих гомотопий лежат в коциклах со значениями в $\pi_m(L)$, $m > n$, а по условию $\pi_m(L) = 0$ при $m > n$.

Чтобы доказать, что диаграмма (1) даёт взаимно однозначное отображение $\varphi : [K, L] \to H^n(K; \pi)$, остаётся проверить, что отображение $k\theta^{-1}$ переводит образ отображения $i^{\#}$ в образ отображения i^*. Отображение θ позволяет ограничиться отображениями $f : (K^n, K^{n-1}) \to (L, x_0)$, рассматриваемыми с точностью до гомотопии, неподвижной на K^{n-2}. Гомотопический класс такого отображения f лежит в $\operatorname{Im} i^{\#}$ тогда и только тогда, когда f продолжается на всё пространство K. Последнее условие эквивалентно тому, что f продолжается на K^{n+1}, поскольку дальнейшие препятствия к продолжению лежат в нулевых группах ($\pi_m(L) = 0$ при $m > n$). Если такое продолжение существует, то $c^{n+1}(f) = 0$; здесь $c^{n+1} \in C^{n+1}(K; \pi)$ — препятствие к продолжению f. Равенство $c^{n+1}(f) = 0$ эквивалентно равенству $\delta d^n(f, *) = 0$, поскольку $\delta d^n(f, *) = c^{n+1}(*) - c^{n+1}(f)$ и $c^{n+1}(*) = 0$. Согласно определению $k(f)$ — это когомологический класс коцикла $d^n(f, *)$ в K^n. Коцепь $d^n(f, *)$ является коциклом и в K, поэтому $k(f) \in \operatorname{Im} i^{\#}$, что и требовалось.

Отображение φ естественно в том смысле, что для любого отображения $h : K \to K'$ коммутативна диаграмма

$$
\begin{array}{ccc}
[K', L] & \xrightarrow{h^{\#}} & [K, L] \\
\big\downarrow \varphi & & \big\downarrow \varphi \\
H^n(K'; \pi) & \xrightarrow{h^*} & H^n(K; \pi)
\end{array}
$$

Можно считать, что L — именно тот симплициальный комплекс типа

$K(\pi, n)$, который построен при доказательстве теоремы 3.1.7. Тогда остов L^{n-1} состоит из одной точки, поэтому непосредственно из определений видно, что $\varphi(\mathrm{id}_L) = F_\pi$. Положим $K' = L$ и $h = f$. Тогда $\varphi(f) = \varphi(f^\#(\mathrm{id}_L)) = f^*(\varphi(\mathrm{id}_L)) = f^*(F_\pi)$, т.е. отображение φ имеет требуемый вид. □

Следствие. *Имеет место взаимно однозначное соответствие*

$$[K(\pi, n), K(\pi', n)] \leftrightarrow \mathrm{Hom}(\pi, \pi'),$$

при котором гомотопическому классу отображения $f : K(\pi, n) \to K(\pi', n)$ соответствует индуцированный им гомоморфизм $f_* : \pi \to \pi'$.

Доказательство. Согласно теореме 3.1.9

$$[K(\pi, n), K(\pi', n)] \leftrightarrow H^n\big(K(\pi, n); \pi'\big).$$

Из формулы универсальных коэффициентов следует, что $H^n\big(K(\pi, n); \pi'\big) \cong \mathrm{Hom}\Big(H_n\big(K(\pi, n)\big), \pi'\Big)$. Наконец, согласно теореме Гуревича $H_n\big(K(\pi, n)\big) \cong \pi$. □

Теорема 3.1.9 позволяет дать конкретное описание всех *когомологических операций*, которые определяются следующим образом. Фиксируем абелевы группы G и H и натуральные числа m и n. Когомологическая операция типа (m, n, G, H) — это отображение (не обязательно гомоморфизм) $\Theta_K : H^m(K; G) \to H^n(K; H)$, которое определено для каждого симплициального комплекса K, причём так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^m(L; G) & \xrightarrow{\Theta_L} & H^n(L; H) \\ \big\downarrow{\scriptstyle f^*} & & \big\downarrow{\scriptstyle f^*} \\ H^m(K; G) & \xrightarrow{\Theta_K} & H^n(K; H) \end{array}$$

коммутативна для любого непрерывного отображения $f : K \to L$.

Пример 3.1.8. *Гомоморфизм $G \to H$ индуцирует гомоморфизм $H^m(K; G) \to H^m(K; H)$, который является когомологической операцией, сохраняющей размерность.*

Пример 3.1.9. *Если R — аддитивная группа кольца с единицей, то отображение $\alpha \mapsto \alpha^k$ является когомологической операцией, увеличивающей размерность в k раз.*

Пример 3.1.10. *Гомоморфизм Бокштейна $\beta^* : H^k(K;G'') \to H^{k+1}(K;G')$, соответствующий точной последовательности*

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0,$$

является когомологической операцией, увеличивающей размерность на 1.

Теорема 3.1.10. *Когомологические операции типа (m, n, G, H) находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами $H^n\big(K(G,m);H\big)$. Это соответствие задаётся формулой $\Theta \mapsto \Theta(F_G)$, где $F_G \in H^m\big(K(G,m);G\big)$ — фундаментальный когомологический класс.*

Доказательство. Любой элемент $\alpha \in H^m(K;G)$ можно представить в виде $\alpha = f^*(F_G)$, где $f : K \to K(G;m)$ — некоторое отображение. Поэтому $\Theta(\alpha) = \Theta(f^*(F_G)) = f^*(\Theta(F_G))$, т.е. когомологическая операция Θ полностью определяется элементом $\Theta(F_G)$.

Остаётся проверить, что любой элемент $\theta \in H^n\big(K(G,m);H\big)$ можно представить в виде $\theta = \Theta(F_G)$, где Θ — некоторая когомологическая операция. Элементу θ соответствует отображение $\varphi : K(G,m) \to K(H,n)$, для которого $\theta = \varphi^*(F_H)$. Сопоставив каждому отображению $g : K \to K(G,m)$ его композицию с φ, получим отображение $[K, K(G,m)] \to [K, K(H,n)]$. Это отображение соответствует когомологической операции $\Theta : H^m(K;G) \to H^n(K;H)$, которая переводит $g^*(F_G)$ в $g^*\varphi^*(F_H)$. В частности, $\Theta(F_G) = \varphi^*(F_H) = \theta$. □

Следствие 1. *Когомологическая операция не может уменьшать размерность.*

Доказательство. Если $n < m$, то $H^n\big(K(G,m);H\big) = 0$, поскольку пространство $K(G,m)$ $(m-1)$-связно. □

Следствие 2. *Все когомологические операции, сохраняющие размерность, индуцированы гомоморфизмами $G \to H$.*

Доказательство. При доказательстве следствия теоремы 3.1.9 было отмечено, что

$$H^n\big(K(G,n);H\big) \cong \operatorname{Hom}\Big(H_n\big(K(G,n)\big), H\Big) \cong \operatorname{Hom}(G,H).$$

□

3.1.6. Пространства Мура

Пространства Мура определяются аналогично пространствам Эйленберга–Маклейна, только при этом гомотопические группы заменяются группами гомологий. А именно, пусть G — абелева группа, n — натуральное число. *Пространство Мура* $M(G,n)$ — это симплициальный комплекс X, для которого

$$\tilde{H}_k(X) = \begin{cases} G & \text{при } k = n; \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases}$$

При $n > 1$ дополнительно предполагается, что $\pi_1(X) = 0$.

Покажем, что для любой абелевой группы G и любого натурального числа n существует пространство Мура $M(G,n)$. В качестве пространства $M(\mathbb{Z},n)$ можно взять сферу S^n. В качестве пространства $M(\mathbb{Z}_m,n)$ можно взять сферу S^n, к которой приклеена $(n+1)$-мерная клетка D^{n+1} по отображению $\partial D^{n+1} \to S^n$ степени n. Действительно, в таком случае цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий имеет вид $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to 0 \ldots$ Если группа G конечно порождённая, то в качестве $M(G,n)$ можно взять букет нескольких пространств $M(\mathbb{Z},n)$ и $M(\mathbb{Z}_m,n)$.

Для произвольной группы G пространство $M(G,n)$ можно построить следующим образом. Существует эпиморфизм $F \to G$, где F — свободная абелева группа. Пусть H — ядро этого гомоморфизма. Группа H является подгруппой свободной абелевой группы, поэтому она тоже свободная абелева. Пусть $\{f_\alpha\}$ — базис F, $\{h_\beta\}$ — базис H. Тогда $h_\beta = \sum_\alpha n_{\alpha\beta} f_\alpha$. Пусть $X^n = \bigvee_\alpha S^n_\alpha$. Приклеим к X^n клетки $\{D^{n+1}_\beta\}$ по отображениям $\chi_\beta : \partial D^{n+1}_\beta \to X^n$, которые устроены следующим образом. Сначала отображаем ∂D^{n+1}_β в букет k_β сфер размерности n, где k_β — число ненулевых $n_{\alpha\beta}$; для этого стягиваем $k_\beta - 1$ сфер размерности $n-1$ в ∂D^{n+1}_β. Затем каждую из сфер этого букета отображаем на соответствующую сферу S^n_α так, чтобы степень отображения была равна $n_{\alpha\beta}$. Полученный CW-комплекс легко превратить в симплициальный комплекс X; он является пространством Мура $M(G,n)$. Действительно, цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий X имеет вид $H \xrightarrow{i} F \to 0 \to \ldots$, где i — вложение подгруппы в группу.

Если $G_1, G_2, \ldots$ — произвольная последовательность абелевых групп, то существует симплициальный комплекс X, для которого $H_i(X) = G_i$. Действительно, в качестве X можно взять букет $\bigvee_i M(G_i, i)$.

Удивительным образом для когомологий аналогичное утверждение неверно. Соответствующий пример построили Кан и Уайтхед [Ка].

Теорема 3.1.11 (Кан–Уайтхед). *Ни для какого натурального n не существует симплициального комплекса X, для которого $H^{n-1}(X;\mathbb{Z}) = 0$ и $H^n(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ — группа рациональных чисел относительно сложения.*

Доказательство. Предположим, что существует симплициальный комплекс X, для которого $H^{n-1}(X;\mathbb{Z}) = 0$ и $H^n(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$. Тогда согласно формуле универсальных коэффициентов

$$0 = H^{n-1}(X) \cong \operatorname{Hom}\bigl(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}\bigr) \oplus \operatorname{Ext}\bigl(H_{n-2}(X), \mathbb{Z}\bigr), \tag{3.1}$$

$$\mathbb{Q} = H^n(X) \cong \operatorname{Hom}\bigl(H_n(X), \mathbb{Z}\bigr) \oplus \operatorname{Ext}\bigl(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}\bigr). \tag{3.2}$$

Из равенства (3.1) получаем, в частности, что $\operatorname{Hom}\bigl(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}\bigr) = 0$.

Лемма. *Пусть абелева группа A такова, что* $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{Z}) = 0$. *Тогда:*

а) группа $\operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *делима тогда и только тогда, когда группа A не имеет кручения;*

б) группа $\operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *не имеет кручения тогда и только тогда, когда группа A делима.*

Доказательство. Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &mA = \{b \in A \mid b = ma,\ a \in A\},\\ &{}_mA = \{a \in A \mid ma = 0\},\\ &A_m = A/mA. \end{aligned}$$

Если абелева группа B такова, что $mB = 0$, то $\operatorname{Hom}(B, \mathbb{Z}) = 0$. Действительно, пусть $\varphi(b) = n$. Тогда $0 = \varphi(mb) = mn$. Обе группы ${}_mA$ и A_m этим свойством обладают; значит, $\operatorname{Hom}({}_mA, \mathbb{Z}) = 0$ и $\operatorname{Hom}(A_m, \mathbb{Z}) = 0$. Учитывая это, из точных последовательностей

$$\begin{aligned} &0 \to {}_mA \to A \xrightarrow{\times m} mA \to 0,\\ &0 \to mA \xrightarrow{\subset} A \to A_m \to 0 \end{aligned}$$

согласно задаче 1.4.12 получаем точные последовательности

$$0 \to \operatorname{Ext}(mA, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}({}_mA, \mathbb{Z}) \to 0,$$

$$0 \to \operatorname{Hom}(A, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}(mA, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}(A_m, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}(mA, \mathbb{Z}) \to 0.$$

По условию $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}) = 0$. Кроме того, согласно задаче 1.4.4 $\mathrm{Hom}(mA, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})$. Таким образом, вторая точная последовательность принимает вид

$$0 \to \mathrm{Ext}(A_m, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(mA, \mathbb{Z}) \to 0.$$

Из этих двух точных последовательностей можно построить точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Ext}(A_m, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}({}_mA, \mathbb{Z}) \to 0,$$

в которой φ — это композиция отображений $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(mA, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$, индуцированных включением $mA \subset A$ и отображением $A \xrightarrow{\times m} mA$. Поэтому φ — умножение на m. Следовательно, ${}_m\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}(A_m, \mathbb{Z})$ и $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})_m = \mathrm{Ext}({}_mA, \mathbb{Z})$.

Для периодической группы T равенство $\mathrm{Ext}(T, \mathbb{Z}) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $T = 0$ (задача 1.4.8). Поэтому ${}_mA = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}({}_mA, \mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})_m = 0$, а $A_m = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}(A_m, \mathbb{Z}) = {}_m\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0$. Для завершения доказательства леммы остаётся лишь заметить, что абелева группа B не имеет кручения тогда и только тогда, когда ${}_mB = 0$ для всех $m > 1$, и что абелева группа B делима тогда и только тогда, когда $B_m = 0$ для всех $m > 1$. □

Обратимся теперь к равенству (3.2). Прежде всего заметим, что группу $\mathbb{Q}$ нельзя представить в виде прямой суммы двух ненулевых групп. Действительно, пусть $\mathbb{Q} = A \oplus B$, a и b — ненулевые элементы групп A и B. Тогда если $p, q \in \mathbb{Z}$ и $ra \neq 0$, $qb \neq 0$, то $pa \neq qb$. Но для рациональных чисел a и b это свойство не выполняется. Следовательно, либо $\mathrm{Hom}\big(H_n(X), \mathbb{Z}\big) = \mathbb{Q}$, либо $\mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}\big) = \mathbb{Q}$. Равенство $\mathrm{Hom}\big(H_n(X), \mathbb{Z}\big) = \mathbb{Q}$ невозможно, потому что ни для какой абелевой группы A группа $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})$ не может быть делимой. Действительно, пусть $\varphi(a) = k \neq 0$. Выберем натуральное число m так, чтобы число k/m не было целым. Тогда равенство $m\psi = \varphi$ ни для какого $\psi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})$ выполняться не может, поскольку иначе $m\psi(a) = \varphi(a) = k$, т.е. $\psi(a) = k/m$. Таким образом, $\mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}\big) = \mathbb{Q}$ — делимая группа, не имеющая кручения. Поэтому согласно лемме группа $H_{n-1}(X)$ не имеет кручения и делима. Такая группа обязательно содержит $\mathbb{Q}$ в качестве подгруппы, т.е. существует мономорфизм $0 \to \mathbb{Q} \to H_{n-1}(X)$. Но тогда существует эпиморфизм $\mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}\big) \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \to 0$.

Чтобы прийти к противоречию, остаётся доказать, что группа $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ несчётна, а потому не существует эпиморфизма $\mathbb{Q} =$

$= \mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}\big) \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \to 0$. Группу $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$ можно вычислить с помощью инъективной резольвенты $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$. В результате для $A = \mathbb{Q}$ получим точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \to 0.$$

Группа $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ счётна, а группа $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ несчётна (задача 1.4.5). Поэтому группа $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ тоже несчётна. □

3.2. Характеристические классы

3.2.1. Векторные расслоения

Локально тривиальное расслоение $p : E \to B$ называют n-мерным *векторным расслоением*, если слой F — это линейное пространство $\mathbb{R}^n$, в каждом множестве $p^{-1}(b)$, $b \in B$, задана структура n-мерного линейного пространства и гомеоморфизмы $h : U \times F \to p^{-1}(U)$ обладают следующим свойством: для каждой точки $b \in U$ отображение $x \mapsto h(b, x) \in p^{-1}(b)$ является изоморфизмом линейных пространств $F = \mathbb{R}^n$ и $p^{-1}(b)$.

Векторное расслоение называют *гладким*, если E и B — гладкие многообразия, p — гладкое отображение и гомеоморфизмы h являются диффеоморфизмами.

Пример 3.2.1. *Пусть TM^n — касательное расслоение замкнутого многообразия M^n. Тогда естественная проекция $p : TM^n \to M^n$ является гладким векторным расслоением. Это расслоение мы будем обозначать τ_{M^n}.*

Отображение $s : B \to E$, для которого $ps = \mathrm{id}_B$ называют *сечением* расслоения. Например, сечение касательного расслоения — это векторное поле на многообразие. Для любого векторного расслоения можно рассмотреть *нулевое сечение*, отображающее каждую точку $b \in B$ в нулевой вектор пространства $p^{-1}(b)$.

Векторные расслоения $p_1 : E_1 \to B$ и $p_2 : E_2 \to B$ называют *изоморфными*, или *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi : E_1 \to E_2$, изоморфно отображающий пространство $p_1^{-1}(b)$ на пространство $p_2^{-1}(b)$ для всех $b \in B$. В частности, у изоморфных векторных расслоений гомеоморфны дополнения образа нулевого сечения в пространстве расслоения.

Теорема 3.2.1. *Пусть $p_1 : E_1 \to B$ и $p_2 : E_2 \to B$ — векторные расслоения, $f : E_1 \to E_2$ — непрерывное отображение, изоморфно отображающее $p_1^{-1}(b)$ на $p_2^{-1}(b)$ для всех $b \in B$. Тогда f — гомеоморфизм, т.е. расслоения p_1 и p_2 изоморфны.*

Доказательство. Для точки $b_0 \in B$ выберем окрестности U_i $(i = 1, 2)$ и гомеоморфизмы $h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to p_i^{-1}(U_i)$. Достаточно проверить, что отображение

$$h_2^{-1} f h_1 : (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \to (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n$$

является гомеоморфизмом. По условию это отображение переводит (b, v) в $(b, A(b)v)$, где $A(b)$ — невырожденная матрица, элементы которой непрерывно зависят от b. Обратное отображение имеет вид $(b, w) \mapsto (b, A^{-1}(b)w)$. Элементы матрицы $A^{-1}(b)$ непрерывно зависят от b, поэтому обратное отображение непрерывно. □

Естественная проекция $B \times \mathbb{R}^n \to B$ является n-мерным векторным расслоением. Это векторное расслоение называют *тривиальным*. Любое векторное расслоение, изоморфное тривиальному, тоже называют тривиальным.

Задача 3.2.1. *Докажите, что n-мерное векторное расслоение $p : E \to B$ тривиально тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение $\pi : E \to \mathbb{R}^n$, ограничение которого на каждый слой $p^{-1}(b)$, $b \in B$, является изоморфизмом линейных пространств.*

Замкнутое многообразие M^n называют *параллелезуемым*, если его касательное расслоение $p : TM^n \to M^n$ тривиально.

Теорема 3.2.2. *Многообразие M^n параллелезуемо тогда и только тогда, когда на нём есть n непрерывных векторных полей $v_1(x)$, ..., $v_n(x)$, линейно независимых в каждой точке $x \in M^n$.*

Доказательство. Пусть $\varphi : TM^n \to M^n \times \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм, изоморфно отображающий T_xM^n на $\{x\} \times \mathbb{R}^n$. Выберем в $\mathbb{R}^n$ базис $e_1, \ldots, e_n$ и положим $v_i(x) = \varphi^{-1}(x, e_i)$.

Предположим теперь, что $v_1(x)$, ..., $v_n(x)$ — линейно независимые векторные поля. Рассмотрим отображение $M^n \times \mathbb{R}^n \to TM^n$, заданное формулой $(x, a) \mapsto a_1v_1(x) + \ldots + a_nv_n(x)$. Согласно теореме 3.2.1 это отображение является гомеоморфизмом. □

Пример 3.2.2. *Сферы S^1, S^3 и S^7 — параллелезуемые многообразия.*

Построение линейно независимых векторных полей на сферах подробно обсуждается в [Пр2], § 41.

Задача 3.2.2. *Докажите, что существует бесконечно много попарно гомотопически не эквивалентных*[1] *тривиализаций касательного расслоения* TS^3.

Задача 3.2.3. *Докажите, что существует бесконечно много попарно гомотопически не эквивалентных*[1] *векторных полей без особых точек на* S^3.

Пример 3.2.3. *Тор* T^n *— параллелезуемое многообразие.*

Обсудим теперь некоторые конструкции, связанные в векторными расслоениями.

Индуцированное расслоение

Пусть $p: E \to B$ — векторное расслоение и $f: B' \to B$ — непрерывное отображение. Тогда можно построить *индуцированное расслоение* $p' = f^*p: E' \to B'$, где

$$E' = \{ (e, b') \in E \times B' | \, p(e) = f(b') \}$$

и $p'(e, b') = b'$. Для индуцированного расслоения коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

где $\tilde{f}(e, b') = e$.

Проверим, что индуцированное расслоение является векторным расслоением. Структура линейного пространства в слое $(p')^{-1}(b)$ задаётся формулой

$$\lambda_1(e_1, b') + \lambda_2(e_2, b') = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, b');$$

здесь $p(e_1) = p(e_2) = f(b')$, т.е. e_1 и e_2 лежат в одном и том же линейном пространстве $p^{-1}(f(b'))$.

---

[1] Две тривиализации расслоения *гомотопически эквивалентны*, если их можно связать непрерывным семейством тривиализаций.

[1] Два векторных поля без особых точек называют *гомотопически эквивалентными*, если их можно связать непрерывным семейством векторных полей без особых точек.

Окрестности $U \subset B$ и гомеоморфизму $h : U \times \mathbb{R}^n \to p^{-1}(U)$ мы сопоставим окрестность $U' = f^{-1}(U) \subset B'$ и гомеоморфизм $h' : U' \times \mathbb{R}^n \to (p')^{-1}(U')$, заданный формулой $(b', v) \mapsto (e, b')$, где $e = h(f(b'), v)$. Условие $p(e) = f(b')$ при этом выполняется.

Упражнение. *Докажите, что векторное расслоение тривиально тогда и только тогда, когда оно индуцировано из расслоения над точкой.*

Прямое произведение расслоений

Прямым произведением векторных расслоений $p_1 : E_1 \to B_1$ и $p_2 : E_2 \to B_2$ называют расслоение

$$p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2;$$

слой $(p_1 \times p_2)^{-1}(b_1, b_2) = p_1^{-1}(b_1) \times p_2^{-1}(b_2)$ имеет естественную структуру векторного пространства.

Пример 3.2.4. *Пусть M_1 и M_2 — замкнутые многообразия, $M = M_1 \times M_2$. Тогда касательное расслоение τ_M изоморфно прямому произведению $\tau_{M_1} \times \tau_{M_2}$.*

Сумма Уитни

Пусть $p_1 : E_1 \to B$ и $p_2 : E_2 \to B$ — два векторных расслоения над одной и той же базой. Их *суммой Уитни* называют расслоение $d^*(p_1 \times p_2)$, где $d : B \to B \times B$ — диагональное отображение, заданное формулой $d(b) = (b, b)$. Расслоение $p : E \to B$ часто бывает удобно обозначать одной буквой ξ; сумму Уитни расслоений ξ_1 и ξ_2 обозначают $\xi_1 \oplus \xi_2$. Такое обозначение связано с тем, что слой расслоения $\xi_1 \oplus \xi_2$ над точкой b канонически изоморфен $p_1^{-1}(b) \oplus p_2^{-1}(b)$.

Пример 3.2.5. *Сумма Уитни касательного расслоения над сферой S^n и 1-мерного тривиального расслоения является $(n+1)$-мерным тривиальным расслоением.*

Доказательство. Тривиальное $(n+1)$-мерное векторное расслоение η над S^n можно представить следующим образом. Рассмотрим стандартное вложение $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и будем считать, что к каждой точке $x \in S^n$ приложено линейное пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, полученное параллельным переносом, переводящим начало координат в точку x. При такой интерпретации пространство расслоения $E(\eta)$ содержит пространство касательного расслоения $E(\tau_{S^n})$.

Рассмотрим 1-мерное векторное расслоение ν, для которого пространство расслоения $E(\nu) \subset E(\eta)$ состоит из пар (x, v), где $x \in S^n$ и $v \perp T_x S^n$, т.е. v — нормальный вектор к S^n в точке x. Легко проверить, что расслоение ν тривиально. Действительно, будем рассматривать x как единичный вектор и запишем v в виде $v = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Сопоставив паре (x, v) пару (x, λ), получим изоморфизм расслоения ν на тривиальное расслоение.

Зададим отображение $E(\tau \oplus \nu) \to E(\eta)$ формулой $(x, v_1, v_2) \mapsto (x, v_1 + v_2)$. Согласно теореме 3.2.1 это отображение является изоморфизмом расслоений. □

Задача 3.2.4. *Докажите, что $S^{n_1} \times S^{n_2} \times \ldots \times S^{n_k}$ можно вложить в евклидово пространство размерности $n_1 + \ldots + n_k + 1$.*

Пример 3.2.6. $\tau_{M_1 \times M_2} \cong \pi_1^* \tau_{M_1} \oplus \pi_2^* \tau_{M_2}$, *где $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ — естественная проекция.*

Доказательство. Слой расслоения $\pi_1^* \tau_{M_1} \oplus \pi_2^* \tau_{M_2}$ над точкой $(x, y) \in M_1 \times M_2$ канонически изоморфен $T_x M_1 \oplus T_y M_2 \cong T_{(x,y)}(M_1 \times M_2)$. □

Задача 3.2.5. * *Докажите, что многообразие $S^{n_1} \times \ldots \times S^{n_k}$, где $k \geqslant 2$, параллелезуемо тогда и только тогда, когда среди чисел n_1, $\ldots$, n_k есть по крайней мере одно нечётное число.*

Расслоение $\mathrm{Hom}(\xi_1, \xi_2)$

Пусть ξ_1 и ξ_2 — два векторных расслоения над одной и той же базой B. По ним можно построить расслоение $\mathrm{Hom}(\xi_1, \xi_2)$, слой которого над точкой $b \in B$ состоит из гомоморфизмов (линейных отображений) слоя расслоения ξ_1 в слой расслоения ξ_2. Для этого нужно лишь подходящим образом задать топологию в пространстве расслоения. Пусть U — открытое множество, над которым расслоения ξ_1 и ξ_2 тривиальны, $h_i : U \times \mathbb{R}^{n_i} \to p_i^{-1}(U)$ — координатные гомеоморфизмы. Для фиксированной точки $b \in U$ отображение h_i отождествляет $\mathbb{R}^{n_i}$ со слоем расслоения ξ_i над точкой b. Поэтому получаем взаимно однозначное отображение $h : U \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}) \to p^{-1}(U)$. Топологию в E нужно задать так, чтобы эти отображения для всех U были гомеоморфизмами и все множества $p^{-1}(U)$ были открытыми. Эти условия однозначно задают топологию в E. Нужно лишь проверить согласованность: для любых двух пересекающихся координатных окрестностей U и U' отображение

$$(U \cap U') \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}) \xrightarrow{h^{-1} \circ h'} (U \cap U') \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2})$$

непрерывно. Непрерывность этого отображения следует из непрерывности отображений

$$(U \cap U') \times \mathbb{R}^{n_i} \xrightarrow{h_i^{-1} \circ h_i'} (U \cap U') \times \mathbb{R}^{n_i}.$$

Аналогичную конструкцию можно применить и для построения расслоения $\xi_1 \otimes \xi_2$. Кроме того, подобную конструкцию можно применять не к паре расслоений, а к одному расслоению. Так можно построить расслоение $\Lambda^k \xi$ (внешняя степень).

3.2.2. Когомологии с локальными коэффициентами

Конструкции, применённые в теории препятствий, показывают, что вполне естественно возникает ситуация, когда нужно рассматривать когомологии с коэффициентами не в некоторой фиксированной группе, а в каждой точке берётся своя группа коэффициентов; эти группы изоморфны, но изоморфизм не канонический. Такие когомологии с локальными коэффициентами позволяют, в частности, построить теорию препятствий, которую можно применить к более широкому классу пространств. Мы будем её применять для построения линейно независимых сечений векторного расслоения.

Пусть в каждой точке x топологического пространства X задана абелева группа G_x (все эти группы изоморфны) и каждому пути γ из x в y сопоставлен изоморфизм $\gamma_* : G_x \to G_y$, причём гомотопным путям соответствуют одинаковые изоморфизмы, а композиции путей соответствует композиция изоморфизмов. Тогда говорят, что на X задана *локальная система* абелевых групп.

Если пространство X линейно связно, то локальная система абелевых групп с точностью до естественной эквивалентности однозначно задаётся группой G_x в одной точке и действием группы $\pi_1(X, x)$ на группе G_x. Действительно, для каждой точки $y \in X$ фиксируем путь ω_y из x в y; во всех точках зададим группу G_x; пути γ_{yz} из y в z сопоставим изоморфизм $G_x \to G_x$, индуцированный петлёй $\omega_y \gamma_{yz} \omega_z^{-1}$.

Пример 3.2.7. *Группы $\pi_n(X, x)$, $n \geqslant 2$, образуют локальную систему абелевых групп. Путь из x в y индуцирует изоморфизм $\pi_n(X, x) \to \pi_n(X, y)$ стандартным образом.*

Пример 3.2.8. *Пусть M^n — многообразие, $\mathbb{Z}_x$ — группа $\mathbb{Z}$, в которой элемент 1 соответствует одной ориентации в точке x, а элемент -1 соответствует противоположной ориентации. Изоморфизм $\mathbb{Z}_x \to \mathbb{Z}_y$, индуцированный путём из x в y, соответствует переносу ориентации вдоль этого пути. Эту локальную систему абелевых групп называют* ориентационной *и обозначают* $\operatorname{Or} M^n$.

Если пространство X локально линейно связно и локально односвязно, то локальная система абелевых групп позволяет установить канонический изоморфизм между группами G_x в достаточно малой окрестности. Например, в случае симплициального комплекса такой изоморфизм можно установить на каждом симплексе. Поэтому на симплициальном комплексе локальную систему абелевых групп можно задать следующим образом. В каждой вершине v задаётся группа G_v, а для каждой пары вершин u, v, принадлежащих одному симплексу, задаётся изоморфизм $\gamma_{uv} : G_v \to G_u$ так, что $\gamma_{uv}\gamma_{vw} = \gamma_{uw}$ для любых вершин u, v, w, принадлежащих одному симплексу.

Перейдём к определению *гомологий* и *когомологий с коэффициентами в локальной системе* абелевых групп $\mathfrak{G}$ на симплициальном комплексе K. Пусть Δ — симплекс в K. Для всех точек $x \in \Delta$ можно установить канонический изоморфизм между группами G_x, поэтому можно использовать обозначение G_Δ. Группа k-мерных цепей $C_k(K; \mathfrak{G})$ состоит из конечных формальных сумм $\sum a_i \Delta_i^k$, где $a_i \in G_{\Delta_i^k}$. Граничный гомоморфизм $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ задаётся формулой

$$\partial[v_0, \ldots, v_k] = \sum (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_k].$$

Такое определение имеет смысл, потому что если $\Delta' \subset \partial\Delta \subset \Delta$, то группа $G_{\Delta'}$ канонически изоморфна G_Δ. Равенство $\partial\partial = 0$ доказывается точно так же, как и для обычных симплициальных цепей. Группа гомологий $H_k(K; \mathfrak{G})$ определяется как факторгруппа $\operatorname{Ker} \partial_k / \operatorname{Im} \partial_{k+1}$.

Группа k-мерных коцепей $C^k(K; \mathfrak{G})$ состоит из отображений, сопоставляющих каждому симплексу Δ^k элемент группы G_{Δ^k}. Кограничный гомоморфизм δ задаётся формулой

$$(\delta c^k)[v_0, \ldots, v_{k+1}] = \sum (-1)^i c^k([v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1}]).$$

Группа когомологий $H^k(K; \mathfrak{G})$ определяется стандартно.

Если на симплициальном комплексе задана структура CW-комплекса (клетками служат объединения некоторых симплексов), то можно определить клеточные гомологии и когомологии точно так же, как это делалось раньше. При этом нужно учесть следующее. Если $\chi : D^k \to X$ — характеристическое отображение клетки, то для всех

$x \in D^k$ можно установить канонический изоморфизм между группами G_x. Но точки $x, y \in D^k$ могут отображаться в одну и ту же точку. При этом два экземпляра группы G в точках x и y отождествляются посредством действия на G элемента фундаментальной группы, представленного образом отрезка xy.

Пример 3.2.9. *Рассмотрим на $\mathbb{R}P^n$, $n \geqslant 2$, локальную систему абелевых групп $G_x \cong \mathbb{Z}$, на которых образующая фундаментальной группы действует как отображение $a \mapsto -a$. Эту локальную систему абелевых групп обозначим $\mathbb{Z}_T$ (от слова Twisted). Тогда*

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_T) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } k = n \text{ и } n \text{ чётно;} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если } k < n \text{ и } k \text{ чётно;} \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_T) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } k = n \text{ и } n \text{ чётно;} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если } k \leqslant n \text{ и } k \text{ нечётно;} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Граничный гомоморфизм $\partial : C_k \to C_{k-1}$ является умножением на $1 + (-1)^k(-1) = 1 + (-1)^k$. Кограничный гомоморфизм $\delta : C^{k-1} \to C^k$ имеет такой же вид, потому что он двойствен ∂. □

Замечание. Локальную систему $\mathbb{Z}_T$ можно определить для любого пространства с фундаментальной группой $\mathbb{Z}_2$.

Двойственность Пуанкаре с локальными коэффициентами

Напомним, что обычная двойственность Пуанкаре для ориентированного многообразия M^n с двумя двойственными клеточными разбиениями K и K^* устанавливает изоморфизм $C_k(K; \mathbb{Z}) \to C^{n-k}(K^*; \mathbb{Z})$, который индуцирует изоморфизм $H_k(M^n) \cong H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z})$. А именно, цепи $c_k = \sum a_i \sigma_i$ сопоставляется коцепь c^{n-k}, для которой $\langle c^{n-k}, \sigma_i^* \rangle = a_i$. При выборе ориентации клетки σ_i^* учитывается ориентация M^n; если ориентацию M^n заменить на противоположную, то σ_i^* заменится на $-\sigma_i^*$.

Для многообразия M^n, которое не обязательно ориентируемо, аналогичным образом можно построить изоморфизмы $C_k(K; \mathrm{Or}) \to C^{n-k}(K^*; \mathbb{Z})$ и $C_k(K; \mathbb{Z}) \to C^{n-k}(K^*; \mathrm{Or})$. Первый изоморфизм строится следующим образом. Элементами $C_k(K; \mathrm{Or})$ служат суммы $\sum (\varepsilon_i a_i)\sigma_i$, где $a_i \in \mathbb{Z}$ и ε_i — некая ориентация M^n в точках k-мерной клетки σ_i. Сопоставим такой сумме коцепь $c^{n-k} \in C^{n-k}(K^*; \mathbb{Z})$, для которой $\langle c^{n-k}, \sigma_i^* \rangle = a_i$. Такое определение имеет смысл. Действительно, выбор ориентации ε_i задаёт как число a_i, так и ориентацию клетки σ_i^*. При этом, если вместо ε_i выбрать $-\varepsilon_i$, то вместо a_i получим $-a_i$, а вместо σ_i^* получим $-\sigma_i^*$.

Второй изоморфизм строится следующим образом. Коцепь из $C^{n-k}(K^*; \mathrm{Or})$ сопоставляет каждой $(n-k)$-мерной клетке σ_i^* некий элемент $a_i\varepsilon_i$, где $a_i \in \mathbb{Z}$ и ε_i — ориентация M^n в точках клетки σ_i^*. Цепи $c_k = \sum a_i\sigma_i \in C_k(K; \mathbb{Z})$ сопоставим коцепь $c^{n-k} \in C^{n-k}(K^*; \mathrm{Or})$, которая клетке σ_i^* сопоставляет элемент $a_i\varepsilon_i$. Это определение имеет смысл, потому что если вместо ориентации ε_i взять ориентацию $-\varepsilon_i$, то получим коцепь, которая клетке $-\sigma_i^*$ сопоставляет элемент $-a_i\varepsilon_i$.

Таким образом, для любого замкнутого многообразия M^n имеют место ***изоморфизмы (двойственность) Пуанкаре с локальными коэффициентами*** $H_k(M^n; \mathrm{Or}) \cong H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z})$ и $H_k(M^n; \mathbb{Z}) \cong H^{n-k}(M^n; \mathrm{Or})$.

Препятствия к продолжению сечений

Рассмотрим локально тривиальное расслоение $p: E \to B$ со слоем F. Мы будем предполагать, что B — симплициальный комплекс. Пусть на B^n (n-мерном остове B) задано сечение $s: B^n \to E$ расслоения p. Мы хотим выяснить, можно ли это сечение продолжить на B^{n+1}. А если нельзя продолжить, то можно ли его изменить на $B^n \setminus B^{n+1}$ так, чтобы после этого его уже можно было продолжить. Эта задача очень похожа на обычную задачу теории препятствий. Действительно, над каждым симплексом $\Delta^{n+1} \subset B^{n+1}$ расслоение тривиально. Поэтому сечение над Δ^{n+1} полностью задаётся отображением в слой F, т.е. нужно продолжить отображение $\partial\Delta^{n+1} \to F$ до отображения $\Delta^{n+1} \to F$. Но это всё так только при условии, что фиксирована тривиализация $p^{-1}(\Delta^{n+1}) \to F \times \Delta^{n+1}$.

Препятствие $c^{n+1}(s) \in C^{n+1}\Big(B; \pi_n\big(p^{-1}(b)\big)\Big)$ определяется точно так же, как и в обычной теории препятствий. Но теперь рассматриваются коцепи с коэффициентами в локальной системе абелевых групп $\big\{\pi_n\big(p^{-1}(b)\big)\big\}$ на пространстве B. Действительно, если сделать стандартное для теории препятствий предположение о гомотопической n-простоте пространства F, то каждый путь из точки $b_1 \in B$ в точку $b_2 \in B$ будет задавать изоморфизм $\pi_n\big(p^{-1}(b_1)\big) \to \pi_n\big(p^{-1}(b_2)\big)$; этот изоморфизм строится с помощью теоремы о накрывающей гомотопии.

Все утверждения из § 3.1.2 переносятся на препятствия к продолжению сечений без существенных изменений. Нужно лишь рассматривать когомологии с коэффициентами в локальной системе гомотопических групп слоя. Слой должен быть гомотопически простым.

3.2.3. Характеристические классы Штифеля–Уитни

Предположим, что слой F расслоения $p: E \to B$ таков, что $\pi_0(F) = \ldots = \pi_{n-1}(F) = 0$, но $\pi_n(F) \neq 0$. Здесь $n \geqslant 1$. При $n = 1$ нужно дополнительно предположить, что $\pi_1(F)$ — абелева группа. Тогда во всех случаях слой F будет гомотопически n-прост.

При $k \leqslant n$ нет препятствий к продолжению сечения на k-мерный остов. Первое нетривиальное препятствие лежит в группе $H^{n+1}(B; \mathfrak{G})$, где $\mathfrak{G}$ — локальная система $\{\pi_n(p^{-1}(b))\}$. Это препятствие не зависит от выбора сечения на n-мерном остове. Действительно, если s_1 и s_2 — два сечения на n-мерном остове, а $c^{n+1}(s_1), c^{n+1}(s_2) \in Z^{n+1}(B; \mathfrak{G})$ — препятствия к продолжению этих сечений на B^{n+1}, то существует коцепь $d^n(s_1, s_2) \in C^n(B; \mathfrak{G})$, для которой $\delta d^n(s_1, s_2) = c^{n+1}(s_1) - c^{n+1}(s_2)$ (см. лемму 2 на с. 133).

Первое нетривиальное препятствие к продолжению сечения называют *характеристическим классом расслоения*.

Для векторных расслоений нельзя непосредственно применить эту конструкцию для построения характеристических классов, потому что слой векторного расслоения — стягиваемое пространство. Но каждому n-мерному векторному расслоению можно сопоставить $n-1$ расслоений над той же самой базой, слои которых — наборы из k ортонормированных векторов, где $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Делается это следующим образом. Пусть ξ — векторное расслоение над конечным симплициальным комплексом B. Та же самая конструкция, которая применялась в части I для построения римановой метрики на многообразии, позволяет построить риманову метрику на ξ. Ясно также, что любые две римановы метрики гомотопны в классе римановых метрик. Действительно, если $(\cdot,\cdot)_0$ и $(\cdot,\cdot)_1$ — два скалярных произведения на векторном пространстве, то $t(\cdot,\cdot)_0 + (1-t)(\cdot,\cdot)_1$ — скалярное произведение для всех $t \in [0, 1]$. Рассмотрим расслоение $p_k: E_k \to B$, где E_k состоит из пар

(точка $b \in B$, k ортонормированных векторов в слое ξ над b);

здесь имеется в виду упорядоченный набор векторов. Топология в пространстве E_k задаётся естественным образом.

Слой построенного расслоения ξ_k — это так называемое *многообразие Штифеля* $V(n, k)$, состоящее из ортонормированных наборов k векторов в $\mathbb{R}^n$. Для расслоения ξ_k можно рассмотреть характеристический класс. Прежде всего нужно вычислить первую нетривиальную гомотопическую группу пространства $V(n,k)$

Задача 3.2.6. *Докажите, что $V(n,k)$ — многообразие размерности $nk - \frac{k(k+1)}{2}$.*

Упражнение. *Докажите, что $V(n+1,2)$ — многообразие единичных касательных векторов к сфере S^n.*

Теорема 3.2.3 (Стинрод [Ст1]). *Если $i < n-k$, то $\pi_i\big(V(n,k)\big) = 0$. Первая нетривиальная гомотопическая группа $\pi_{n-k}\big(V(n,k)\big)$ равна $\mathbb{Z}$, если $n-k$ чётно или $k=1$, и равна $\mathbb{Z}_2$, если $n-k$ нечётно и $k>1$.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что $\pi_i\big(V(n,k)\big) = 0$ при $i < n-k$. Применим индукцию по k. При $k=1$ многообразие $V(n,1)$ представляет собой сферу S^{n-1}. Ясно, что $\pi_i(S^{n-1}) = 0$ при $i < n-1$. Чтобы сделать индукционный шаг, рассмотрим отображение $V(n,k+1) \to V(n,k)$, сопоставляющее набору из $k+1$ ортонормированных векторов первые k векторов. Это отображение является локально тривиальным расслоением со слоем S^{n-k-1}. Запишем точную последовательность этого расслоения:

$$\pi_i(S^{n-k-1}) \to \pi_i\left(V(n,k+1)\right) \to \pi_i\left(V(n,k)\right) \to \pi_{i-1}(S^{n-k-1})$$

При $i < n-k-1$ этот участок точной последовательности имеет вид $0 \to \pi_i\left(V(n,k+1)\right) \to 0 \to 0$, поэтому $\pi_i\left(V(n,k+1)\right) = 0$.

Займёмся теперь вычислением $\pi_{n-k}\left(V(n,k)\right)$. Случай $k=1$ рассматривается отдельно: $V(n,1) \approx S^{n-1}$. В дальнейшем будем предполагать, что $1 < k < n$. Рассмотрим отображение $V(n+1,k+1) \to V(n+1,1) = S^n$, сопоставляющее ортонормированным векторам $v_1, \ldots, v_{k+1}$ вектор v_{k+1}. Это отображение является локально тривиальным расслоением со слоем $V(n,k)$. Запишем точную гомотопическую последовательность этого расслоения:

$$\pi_{i+1}(S^n) \to \pi_i\left(V(n,k)\right) \to \pi_i\left(V(n+1,k+1)\right) \to \pi_i(S^n)$$

Если $i \leqslant n-2$, то $\pi_i\left(V(n,k)\right) \cong \pi_i\left(V(n+1,k+1)\right)$. Последовательно применяя такие изоморфизмы, получаем $\pi_{n-k}\left(V(n,k)\right) \cong \pi_{n-k}\left(V(n-k+2,2)\right)$; изоморфизм $\pi_{n-k}\left(V(n-k+3,3)\right) \cong \pi_{n-k}\left(V(n-k+2,2)\right)$ обеспечивается неравенством $n-k \leqslant (n-k+2)-2$.

Итак, остаётся проверить, что группа $\pi_{n-2}\left(V(n,2)\right)$ равна $\mathbb{Z}$, если n чётно, и равна $\mathbb{Z}_2$, если n нечётно. Рассмотрим расслоение

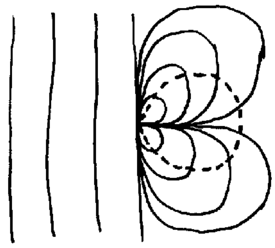

Рис. 3.3. Траектории векторного поля на S^2

$V(n,2) \to V(n,1) = S^{n-1}$ со слоем $V(n-1,1) = S^{n-2}$. Запишем точную гомотопическую последовательность этого расслоения:

$$\pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-2}(S^{n-2}) \to \pi_i\left(V(n,2)\right) \to \pi_{n-2}(S^{n-1}) = 0$$

Гомоморфизм ∂_* отображает $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$, поэтому достаточно вычислить $\partial_*(\mathrm{id}_{S^{n-1}})$. Элемент $\partial_*(\mathrm{id}_{S^{n-1}}) \in \pi_{n-2}(S^{n-2})$ согласно определению строится следующим образом. Рассмотрим на сфере S^{n-1} однопараметрическое семейство сфер S_t^{n-2}, $t \in (0,\, 1)$, проходящих через фиксированную точку $e_0 \in S^{n-1}$ и имеющих в этой точке общую касательную $(n-2)$-мерную плоскость. Нужно взять поднятие точки e_0 в пространство расслоения $V(n,2)$, продолжить это поднятие на S_t^{n-2} при малых t, а затем продолжить и для всех $t < 1$. При $t \to 1$ получим некое отображение S_t^{n-2} в слой. Гомотопический класс этого отображения и есть искомый элемент группы $\pi_{n-2}(S^{n-2})$.

Чтобы поднять в $V(n,2)$ точку $e_0 \in S^{n-1}$ (которую мы рассматриваем как единичный вектор), нужно добавить к e_0 некоторый единичный вектор e_1, ортогональный e_0. Вектор e_1 можно рассматривать как вектор, касательный к S^{n-1} в точке e_0.

Поднятие можно построить с помощью векторного поля с одной изолированной особой точкой. При этом нужно, чтобы в одной половине окрестности особой точки векторы были параллельны друг другу, а всё вращение векторов происходило во второй половине окрестности (первая половина окрестности соответствует сферам S_t^{n-2} при $t < 1/2$, а вторая — при $t > 1/2$). На рис. 3.3 для $n = 3$ пунктиром изображена окружность S_t^1, $t > 1/2$. При $t \to 1$ степень отображения $S_t^{n-2} \to S^{n-2}$, сопоставляющего каждой точке касательный вектор в этой точке, равна индексу особой точки, т.е. эйлеровой характеристике S^{n-1}. Таким образом, $\partial_*(\mathrm{id}_{S^{n-1}}) = \chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$. Это означает, что если n

чётно, то $\operatorname{Im}\partial_* = 0$, а если n нечётно, то $\operatorname{Im}\partial_* = 2\mathbb{Z}$. □

Задача 3.2.7. *Вычислите группы гомологий с коэффициентами* $\mathbb{Z}$ *многообразия Штифеля* $V(n+2,2)$, $n \geqslant 1$.

Характеристический класс расслоения p_k лежит в $H^{n-k+1}\left(B, \{\pi_{n-k}(V(n,k))\}\right)$. Он представляет собой препятствие к продолжению k линейно независимых сечений на $(n-k+1)$-мерный остов. Если $n-k$ нечётно и $k > 1$, то этот класс лежит в обычных когомологиях $H^{n-k+1}(B;\mathbb{Z}_2)$, потому что нет нетривиальных автоморфизмов $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, т.е. в этом случае система локальных коэффициентов тривиальна. Соответствующий класс когомологий $w_{2j} \in H^{2j}(B;\mathbb{Z}_2)$ называют *характеристическим классом Штифеля–Уитни*. Этот класс — препятствие к продолжению $n+1-2j$ линейно независимых сечений на $2j$-мерный остов.

Задача 3.2.8. *Многообразие* M^n *называют* почти параллелезуемым, *если многообразие* $M^n \setminus \{x\}$*, где* $x \in M^n$*, параллелезуемо. Докажите, что односвязное четырёхмерное многообразие* M^4 *почти параллелезуемо тогда и только тогда, когда для его касательного расслоения класс* w_2 *нулевой.*

Чтобы определить классы Штифеля–Уитни нечётной размерности (и класс w_n при чётном n), нужно привести целочисленные коэффициенты по модулю 2. Так мы получим классы Штифеля–Уитни $w_{2j+1} \in H^{2j+1}(B;\mathbb{Z}_2)$. Подчеркнём, что они не совпадают с препятствиями $\mathfrak{o}_{2j+1} \in H^{2j+1}\left(B, \{\pi_{2j}(V(n,n-1-2j))\}\right)$.

Стинрод показал, что препятствие $\mathfrak{o}_{2j+1}$, $j \geqslant 1$, выражается через характеристический класс $w_{2j} = \mathfrak{o}_{2j}$ с помощью следующей конструкции. Рассмотрим локально тривиальное расслоение $V(n, n-2j+1) \xrightarrow{S^{2j-1}} V(n, n-2j)$ и запишем для него точную гомотопическую последовательность:

$$\pi_{2j}\left(V(n,n-2j)\right) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{2j-1}(S^{2j-1}) \xrightarrow{i_*} \pi_{2j-1}\left(V(n,n-2j+1)\right) \to 0 \quad (3.1)$$

В правой части вместо группы $\pi_{2j-1}\left(V(n,n-2j)\right)$ мы поставили 0, потому что $2j-1 < n-(n-2j)$. Мы получили точную последовательность $\mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z}_2 \to 0$, поэтому $\operatorname{Im}\partial_* = \operatorname{Ker} i_* = 2\mathbb{Z}$, а значит, $\operatorname{Ker}\partial_* = 0$. Таким образом, в точной последовательности (3.1) слева можно дописать $0 \to$ и получить короткую точную последовательность групп. Более того, мы получаем короткую точную последовательность локальных систем абелевых групп. (Это требует небольшой проверки.) Как и для обычных групп когомологий, эта точная последовательность индуцирует гомоморфизм Бокштейна

$$\beta^*: H^{2j}\left(B, \{\pi_{2j-1}\big(V(n, n-2j+1)\big)\}\right) \to H^{2j+1}\left(B, \{\pi_{2j}\big(V(n, n-2j)\big)\}\right).$$

Задача 3.2.9. *Докажите, что* $\mathfrak{o}_{2j+1} = \beta^* \mathfrak{o}_{2j}$.

Задача 3.2.10. *Докажите, что все препятствия* $\mathfrak{o}_k$, $k < \dim \xi$, *имеют порядок 2. Более того, если число* $n = \dim \xi$ *нечётное, то класс* $\mathfrak{o}_n$ *тоже имеет порядок 2.*

Результат задачи 3.2.10 показывает, что почти все классы $w_k(\xi)$ являются настоящими препятствиями, т.е. нужные продолжения сечений существуют тогда и только тогда, когда эти классы обращаются в нуль. Единственное исключение составляет класс $w_n(\xi)$, где $n = \dim \xi$ — чётное число. Только он получается приведением по модулю 2 класса, который не обязан иметь порядок 2.

3.2.4. Свойства классов Штифеля–Уитни

Мы определили классы $w_2, \ldots, w_n$ для n-мерного векторного расслоения. Будем полагать $w_0 = 1$ и $w_i = 0$ при $i > n$.

Класс w_1

Класс w_1 требует отдельного определения, потому что он должен соответствовать препятствию к продолжению n линейно независимых сечений с 0-мерного остова на 1-мерный. Если применить стандартную конструкцию теории препятствий, то соответствующий коцикл должен принимать значения в $\pi_0\big(V(n,n)\big)$, а π_0 — не группа. Мы определяли $V(n,k)$ только для $k \leqslant n-1$, но это определение годится и для $k = n$. Правда, при этом получается несвязное многообразие, диффеоморфное $\mathrm{O}(n)$. Таким образом, множество $\pi_0\big(V(n,n)\big)$ состоит из двух элементов. Это тоже нарушает единообразие, потому что для препятствий $\mathfrak{o}_i$ с нечётными номерами локальными коэффициентами служат группы $\mathbb{Z}$. В связи со всем этим вместо $\pi_0\big(V(n,n)\big)$ возьмём приведённую группу гомологий $\tilde{H}_0\big(V(n,n);\mathbb{Z}\big) \cong \mathbb{Z}$. Тогда мы получим локальную систему коэффициентов $a\varepsilon$, где $a \in \mathbb{Z}$, ε — ориентация слоя. Действительно, компоненты связности $V(n,n)$ отождествляются с ориентациями слоя, поэтому элементы группы $\tilde{H}_0\big(V(n,n);\mathbb{Z}\big) \cong \mathbb{Z}$ имеют вид $a\,\mathrm{Or}_1 - a\,\mathrm{Or}_2$; каждой ориентации можно сопоставить её коэффициент.

Ориентацию слоя можно переносить вдоль пути в базе, поэтому мы действительно получаем локальную систему коэффициентов.

Перейдём непосредственно к построению препятствий к продолжению n линейно независимых сечений с 0-мерного остова на 1-мерный. Компоненты связности $V(n,n)$ — это ориентации. Так что речь идёт о задании ориентаций в слоях над 1-мерным остовом. Пусть в каждой вершине v_i задана ориентация ε_i. Рассмотрим коцепь $c^1 \in C^1\left(B; \left\{\tilde{H}_0\bigl(V(n,n);\mathbb{Z}\bigr)\right\}\right)$, для которой $\langle c^1, [v_iv_j]\rangle = \varepsilon_j - \varepsilon_i$. Эта коцепь — коцикл, потому что

$$\begin{aligned}\langle \delta c^1, [v_iv_jv_k]\rangle &= \langle c^1, [v_jv_k]\rangle - \langle c^1, [v_iv_k]\rangle + \langle c^1, [v_iv_j]\rangle = \\ &= (\varepsilon_k - \varepsilon_j) - (\varepsilon_k - \varepsilon_i) + (\varepsilon_j - \varepsilon_i) = 0\end{aligned}$$

Заданные ориентации ε_i продолжаются на 1-мерный остов тогда и только тогда, когда $c^1 = 0$. Изменение ориентаций в некоторых вершинах соответствует добавлению к c^1 некой кограницы δc^0. Поэтому продолжение ориентаций на 1-мерный остов существует тогда и только тогда, когда когомологический класс коцикла c^1, который мы обозначим $\mathfrak{o}_1$, равен нулю.

Класс $\mathfrak{o}_1$ не зависит от выбора сечения над 0-мерным остовом. Действительно, как мы уже упоминали, если в вершинах задать другие ориентации, то добавится кограница. Из этого, в частности, следует, что $2\mathfrak{o}_1 = 0$. В самом деле, если во всех вершинах v_i вместо ориентаций ε_i задать ориентации $-\varepsilon_i$, то коцикл c^1 изменит знак, поэтому класс $\mathfrak{o}_1$ тоже изменит знак. Но класс $\mathfrak{o}_1$ не зависит от выбора ориентаций, поэтому $\mathfrak{o}_1 = -\mathfrak{o}_1$, т.е. $2\mathfrak{o}_1 = 0$.

После приведения локальной системы коэффициентов $\tilde{H}_0\bigl(V(n,n);\mathbb{Z}\bigr) \cong \mathbb{Z}$ по модулю 2 из класса $\mathfrak{o}_1$ получим класс w_1. Равенства $\mathfrak{o}_1 = 0$ и $w_1 = 0$ эквивалентны, потому что $2\mathfrak{o}_1 = 0$. Таким образом, $w_1 = 0$ тогда и только тогда, когда в слоях расслоения над 1-мерным остовом можно выбрать согласованные ориентации. Это свойство имеет следующий геометрический смысл.

Пусть ξ — n-мерное векторное расслоение над линейно связной базой. Введём в 1-мерном расслоении $\Lambda^n\xi$ риманову метрику и рассмотрим в нём единичные векторы (они соответствуют ориентациям). Если полученное пространство связно, то расслоение ξ называют *неориентируемым*, а если оно состоит из двух связных компонент — *ориентируемым*. Выбор одной из этих двух компонент соответствует заданию ориентации во всех слоях расслоения.

Пример 3.2.10. *Одномерное расслоение ориентируемо тогда и только тогда, когда оно тривиально.*

Теорема 3.2.4. *Векторное расслоение над симплициальным комплексом ориентируемо тогда и только тогда, когда ориентируемо его* *ограничение на 1-мерный остов.*

Доказательство. Пространство $\{x \in \Lambda^n \xi \mid \|x\| = 1\}$ двулистно накрывает базу. Это пространство является CW-комплексом, а CW-комплекс связен тогда и только тогда, когда связен его 1-мерный остов. □

Таким образом, $w_1(\xi) = 0$ тогда и только тогда, когда расслоение ξ ориентируемо. Пользуясь этим свойством, вычислим класс w_1 одного расслоения над $\mathbb{R}P^n$, которое очень важно для различных приложений характеристических классов.

Пусть γ_n^1 — расслоение над $\mathbb{R}P^n$, для которого пространство расслоения $E(\gamma_n^1)$ состоит из пар $(x \in \mathbb{R}P^n,\ v = \lambda x)$; здесь имеется в виду, что точка $x \in \mathbb{R}P^n$ представлена ненулевым вектором в $\mathbb{R}^{n+1}$, а слой над этой точкой состоит из всех векторов, пропорциональных этому вектору.

Теорема 3.2.5. *$w_1(\gamma_n^1) = \alpha$, где α — образующая группы $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$.*

Доказательство. В группе $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ есть только один ненулевой элемент, поэтому достаточно проверить, что $w_1(\gamma_n^1) \neq 0$. Расслоение γ_n^1 одномерное, поэтому нужно проверить, что оно нетривиально.

Возьмём произвольное сечение $s : \mathbb{R}P^n \to E(\gamma_n^1)$ и рассмотрим композицию отображений $S^n \to \mathbb{R}P^n \xrightarrow{s} E(\gamma_n^1)$, где первое отображение — каноническое двулистное накрытие. В результате получим отображение $S^n \to \mathbb{R}$, заданное формулой $x \mapsto \lambda(x)$. При этом $\lambda(x)x = \lambda(-x)(-x)$, т.е. $\lambda(-x) = -\lambda(x)$. Рассмотрим на сфере S^n дугу из точки x в точку $-x$. Функция λ в концах этой дуги принимает значения разного знака, поэтому в некоторой точке дуги она обращается в нуль. Таким образом, у расслоения γ_n^1 нет сечений, нигде не обращающихся в нуль, т.е. это расслоение нетривиально. □

Класс w_n и эйлеров класс e

По определению $\mathfrak{o}_n \in H^n\left(B; \left\{\pi_{n-1}\big(V(n,1)\big)\right\}\right)$ — это препятствие к продолжению одного сечения, нигде не обращающегося в нуль, на n-мерный остов. Отметим, что $V(n,1) \approx S^{n-1}$.

Если расслоение ориентировано, то в каждой точке $b \in B$ задан изоморфизм $\varphi : \pi_{n-1}(S^{n-1}) \to \mathbb{Z}$. (Всего есть два изоморфизма групп $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; изменение ориентации соответствует изменению изоморфизма.) Применяя изоморфизм φ, получаем изоморфизм $H^n\left(B; \left\{\pi_{n-1}\big(V(n,1)\big)\right\}\right) \to H^n(B; \mathbb{Z})$. Образ $\mathfrak{o}_n$ при этом изоморфизме называют ***эйлеровым классом*** и обозначают e. Класс w_n получается из e приведением по модулю 2.

Если изменить ориентацию расслоения, то e изменит знак, т.е. $e(-\xi) = -e(\xi)$.

Теорема 3.2.6. *Если размерность расслоения ξ нечётна, то $2e(\xi) = 0$.*

Доказательство. Отображение $v \mapsto -v$ индуцирует послойный гомеоморфизм пространства расслоения на себя. Поэтому в случае нечётной размерности расслоения ξ и $-\xi$ изоморфны. (В случае чётной размерности отображение $v \mapsto -v$ сохраняет ориентацию.) □

Таким образом, для векторных расслоений нечётной размерности нет существенной разницы между классами $w_n(\xi)$ и $e(\xi)$. Они, правда, лежат в разных группах, но оба они являются настоящими препятствиями, т.е. сечение продолжается на n-мерный остов тогда и только тогда, когда $w_n(\xi) = 0$ или $e(\xi) = 0$ (оба условия эквивалентны). Но для чётномерных ориентируемых расслоений настоящим препятствием является именно класс $e(\xi) = 0$, а не $w_n(\xi) = 0$. Из равенства $w_n(\xi) = 0$ ещё не следует, что над n-мерным остовом есть сечение, нигде не обращающееся в нуль. Для этого нужно, чтобы выполнялось равенство $e(\xi) = 0$.

Пусть M^n — замкнутое ориентированное многообразие, ξ^n — ориентированное n-мерное расслоение над M^n. Используя интерпретацию класса $e(\xi^n) \in H^n(M^n; \mathbb{Z})$ как препятствия, этот класс можно вычислить следующим образом. Пространство E расслоения ξ^n локально является произведением ориентированного многообразия M^n на другое ориентированное многообразие — слой расслоения ξ^n, поэтому его можно ориентировать. (Отметим, что при нечётном n существенно, в каком порядке берётся произведение; при перестановке порядка множителей ориентация изменяется.) Рассмотрим произвольное сечение $s : M^n \to E$, трансверсально пересекающее нулевое сечение $M_0^n \subset E$ в изолированных точках. Тогда $\langle e(\xi^n), [M^n] \rangle = \langle\langle M_0^n, s(M^n) \rangle\rangle$.

Пример 3.2.11. *Если M^n — замкнутое ориентированное многообразие, то $\langle e(\tau_{M^n}), [M^n] \rangle = \chi(M^n)$.*

Обратите внимание, что при изменении ориентации одновременно изменяют знак как эйлеров класс $e(\tau_{M^n})$, так и фундаментальный класс $[M^n]$.

Пример 3.2.12. *Эйлерова характеристика сферы S^n чётна, поэтому $w_n(\tau_{S^n}) = 0$ для всех $n \geqslant 1$.*

Для сферы S^2 касательное расслоение нетривиально, но $w_1 = 0$ и $w_2 = 0$. Поэтому даже полный набор классов Штифеля–Уитни не позволяет распознать тривиальное расслоение от нетривиального.

Теорема 3.2.7. *Пусть* $\dim\xi = n$ *и* $\dim\eta = m$. *Тогда* $w_{n+m}(\xi\times\eta) = w_n(\xi)\times w_m(\eta)$.

Доказательство. Пусть σ — n-мерная клетка базы расслоения ξ. Построим сечение (не обращающееся в нуль) расслоения ξ над $\partial\sigma$, а затем продолжим его внутрь так, чтобы все нули сечения были невырожденными. Пусть $a(\sigma)$ — количество этих нулей. Тогда когомологический класс $w_n(\xi)$ представлен коциклом, сопоставляющим клетке σ элемент $a(\sigma) \pmod 2 \in \mathbb{Z}_2$. Над m-мерной клеткой τ базы расслоения η аналогично построим сечение с $b(\tau)$ невырожденными нулями. Прямая сумма этих сечений является сечением расслоения $\xi\times\eta$ над клеткой $\sigma\times\tau$. Пусть $c(\sigma\times\tau)$ — количество нулей этого сечения. Ясно, что $c(\sigma\times\tau) = a(\sigma)b(\tau)$, поскольку прямая сумма двух сечений обращается в нуль в точности в общих нулях этих сечений. Таким образом, на клетке $\sigma\times\tau$ коцикл, представляющий класс $w_{n+m}(\xi\times\eta)$, принимает значение, равное произведению значений коциклов, представляющих $w_n(\xi)$ и $w_m(\eta)$, на клетках σ и τ. Согласно определению внешнего когомологического умножения это означает, что на клетке $\sigma\times\tau$ представители классов $w_{n+m}(\xi\times\eta)$ и $w_n(\xi)\times w_m(\eta)$ принимают одинаковые значения. Остаётся проверить, что если $\dim\sigma' + \dim\tau' = m+n$, но $\dim\sigma' \neq n$, то на клетке $\sigma'\times\tau'$ представители обоих классов принимают одинаковые значения — нулевые. Для класса $w_n(\xi)\times w_m(\eta)$ это следует непосредственно из определения. Пусть, например, $\dim\sigma' < n$. Тогда над клеткой σ' можно построить сечение, нигде не обращающееся в нуль. Прямая сумма этого сечения и произвольного сечения над клеткой τ' нигде не обращается в нуль. Поэтому представитель класса $w_{n+m}(\xi\times\eta)$ принимает на клетке на клетке $\sigma'\times\tau'$ нулевое значение. □

Уточнением теоремы 3.2.7 является следующее утверждение.

Теорема 3.2.8. *Пусть* $\dim\xi = n$ *и* $\dim\eta = m$. *Тогда* $e(\xi\times\eta) = e(\xi)\times e(\eta)$.

Доказательство. Основные рассуждения те же, что и при доказательстве теоремы 3.2.7. Нужно лишь проследить за ориентациями. А именно, нужно доказать, что если векторные поля v и w в пространствах V и W имеют в начале координат невырожденные особые точки индексов $(-1)^k$ и $(-1)^l$, то векторное поле $v\oplus w$ в пространстве $V\oplus W$ имеет в начале координат особую точку индекса $(-1)^{k+l}$. Это достаточно доказать для линейных векторных полей $v(x) = Ax$ и $w(y) = By$. Векторное поле $v\oplus w$ задаётся матрицей $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы равен $\det A\det B$. □

Естественность классов Штифеля–Уитни

Классы Штифеля–Уитни обладают следующим свойством *естественности*: если ξ — расслоение над B и $f : B' \to B$ — непрерывное отображение, то $w_i\big(f^*(\xi)\big) = f^*\big(w_i(\xi)\big)$, т.е. характеристические классы индуцированного расслоения $f^*(\xi)$ получаются из характеристических классов расслоения ξ посредством индуцированного отображения когомологий: $f^* : H^*(B; \mathbb{Z}_2) \to H^*(B'; \mathbb{Z}_2)$.

Свойство естественности достаточно очевидно. Действительно, пусть E' и E — пространства расслоений $f^*(\xi)$ и ξ. По определению $E' = \{\, (b', v) \mid v \in F_{f(b')} \}$, т.е. слои над точками $b' \in B'$ и $f(b') \in B$ канонически изоморфны. Поэтому отображение f индуцирует коцепное отображение

$$f^{\#} C^{n-k+1}\left(B; \left\{\pi_{n-k}\big(V(n,k)\big)\right\}\right) \to C^{n-k+1}\left(B'; \left\{\pi_{n-k}\big(V(n,k)\big)\right\}\right).$$

Это коцепное отображение переводит препятствующий коцикл расслоения ξ в препятствующий коцикл расслоения $f^*(\xi)$.

Формула Уитни

Пусть ξ и η — векторные расслоения над симплициальным комплексом B. Тогда

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=k} w_i(\xi) \smile w_j(\eta) \quad \text{(формула Уитни).} \tag{3.2}$$

Вместо формулы Уитни мы докажем эквивалентную ей формулу

$$w_k(\xi \times \eta) = \sum_{i+j=k} w_i(\xi) \times w_j(\eta), \tag{3.3}$$

где ξ и η — расслоения над разными базами. Формула (3.2) выводится из формулы (3.3) следующим образом. Пусть ξ и η — расслоения над одной базой B, $p_1 : B \times B \to B$ и $p_2 : B \times B \to B$ — проекции на первый и второй множитель, $d : B \to B \times B$ — диагональное отображение. Тогда $p_1 d = p_2 d = \mathrm{id}_B$ и $\xi \times \eta = (p_1^*\xi) \oplus (p_2^*\eta)$. Поэтому

$$w_k\big((p_1^*\xi) \oplus (p_2^*\eta)\big) = w_k(\xi \times \eta) = \sum_{i+j=k} w_i(\xi) \times w_j(\eta).$$

Применим к обеим частям этого равенства отображение d^*. Воспользовавшись естественностью характеристических классов, получим

$$d^*\Big(w_k\big((p_1^*\xi) \oplus (p_2^*\eta)\big)\Big) = w_k\big((d^*p_1^*\xi) \oplus (d^*p_2^*\eta)\big) = w_k(\xi \oplus \eta).$$

Кроме того, $d^*\big(w_i(\xi) \times w_j(\eta)\big) = w_i(\xi) \smile w_j(\eta)$. Формула (3.3) выводится из формулы (3.2) следующим образом. Прежде всего заметим, что $\xi \times \eta = (p_X^*\xi) \oplus (p_Y^*\eta)$, где p_X и p_Y — естественные проекции $X \times Y$ на X и на Y. Поэтому $w_k(\xi \times \eta) = w_k\big((p_X^*\xi) \oplus (p_Y^*\eta)\big) = \sum_{i+j=k} w_i(p_X^*\xi) \smile w_j(p_Y^*\eta) = \sum_{i+j=k} p_X^* w_i(\xi) \smile p_Y^* w_j(\eta)$ (при записи последнего равенства мы воспользовались естественностью характеристических классов). Наконец, следствие теоремы 2.3.5 на с. 122 показывает, что $p_X^* w_i(\xi) \smile p_Y^* w_j(\eta) = w_i(\xi) \times w_j(\eta)$.

Векторные расслоения ξ и η над одной базой называют *стабильно эквивалентными*, если $\xi \oplus \theta^m \cong \eta \oplus \theta^p$, где θ^m и θ^p — тривиальные расслоения размерностей m и p соответственно. Докажем сначала следующий весьма частный случай формулы Уитни.

Лемма. *Характеристические классы Штифеля–Уитни стабильно эквивалентных расслоений одинаковы.*

Доказательство. Проверим, что препятствия к продолжению сечений расслоений ξ и $\xi \oplus \theta^m$ можно выбрать совпадающими уже на уровне коциклов. Точнее говоря, совпадающими после отождествления групп коцепей.

Препятствующий коцикл $\mathfrak{o}_k(\xi)$ лежит в $C^{n-k+1}\big(B; \{\pi_{n-k}\big(V(n,k)\big)\}\big)$, а препятствующий коцикл $\mathfrak{o}_k(\xi \oplus \theta^m)$ лежит в $C^{n-k+1}\big(B; \{\pi_{n-k}\big(V(n+m, k+m)\big)\}\big)$; здесь $n = \dim \xi$. Группы $\pi_{n-k}\big(V(n,k)\big)$ и $\pi_{n-k}\big(V(n+m,k+m)\big)$ отождествляются посредством отображения $V(n,k) \to V(n+m, k+m)$, при котором k векторам в $\mathbb{R}^n$ сопоставляются те же самые k векторов в $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ и ещё некий фиксированный ортонормированный базис $\mathbb{R}^m$.

Выберем над $(n-k)$-мерным остовом базы k линейно независимых сечений расслоения ξ. Их можно естественным образом дополнить до $k+m$ сечений расслоения $\xi \oplus \theta^m$. Построим препятствующие коциклы $\mathfrak{o}_k(\xi)$ и $\mathfrak{o}_k(\xi \oplus \theta^m)$ по этим сечениям. Тогда после отождествления групп коэффициентов эти коциклы совпадут. $\square$

Для доказательства формулы (3.3) мы воспользуемся этой леммой и теоремой 3.2.7 на с. 164. Пусть ξ и η — расслоения над симплициальными комплексами X и Y. Рассмотрим вложения $i_X : X^i \to X$ и $j_Y : Y^j \to Y$. Рассмотрим, далее, ограничения $\xi|_{X^i}$ и $\eta|_{Y^j}$. Первое из этих расслоений имеет $\dim \xi - i$ линейно независимых сечений, поэтому оно стабильно эквивалентно i-мерному расслоению ξ_0. Аналогично второе расслоение стабильно эквивалентно j-мерному расслоению η_0.

Согласно теореме 3.2.7 $w_{i+j}(\xi_0 \times \eta_0) = w_i(\xi_0) \times w_j(\eta_0)$. Поэтому, воспользовавшись естественностью характеристических классов, получим

$$\begin{aligned}(i_X \times j_Y)^*\big(w_{i+j}(\xi \times \eta)\big) &= w_{i+j}(\xi|_{X^i} \times \eta|_{Y^j}) = \\ &= w_{i+j}(\xi_0 \times \eta_0) = w_i(\xi_0) \times w_j(\eta_0) = \\ &= w_i(i_X^*\xi) \times w_j(j_Y^*\eta) = (i_X \times j_Y)^*\big(w_i(\xi) \times w_j(\eta)\big).\end{aligned}$$

Легко проверить, что если $\alpha + \beta = i + j$ и $\alpha \neq i$, то $(i_X \times j_Y)^*\big(w_{\alpha+\beta}(\xi \times \eta)\big) = w_\alpha(\xi_0) \times w_\beta(\eta_0) = 0$. Действительно, если $\alpha > i$, то $w_\alpha(\xi_0) = 0$, поскольку $\dim \xi_0 = i < \alpha$. А если $\beta > j$, то $w_\beta(\eta_0) = 0$.

Пусть $\omega_k = w_k(\xi \times \eta) - \sum_{\alpha+\beta=k} w_\alpha(\xi) \times w_\beta(\eta)$. Мы доказали, что элемент ω_k лежит в ядре гомоморфизма $(i_X \times j_Y)^* : H^k(X \times Y; \mathbb{Z}_2) \to H^k(X^i \times Y^j; \mathbb{Z}_2)$ для всех размерностей i, j, сумма которых равна k. Мы хотим доказать, что $\omega_k = 0$. Для краткости опустим группу коэффициентов $\mathbb{Z}_2$. Согласно теореме Кюннета $H^k(X \times Y) \cong \bigoplus_{\alpha+\beta=k} H^\alpha(X) \otimes H^\beta(Y)$ и $H^k(X^i \times Y^j) \cong \bigoplus_{\alpha+\beta=k} H^\alpha(X^i) \otimes H^\beta(Y^j) = H^i(X^i) \otimes H^j(Y^j)$, поскольку $H^\alpha(X^i) = 0$ при $\alpha > i$ и $H^\beta(Y^j) = 0$ при $\beta > j$. Поэтому прямая сумма отображений $(i_X \times j_Y)^*$ для всех i, j, сумма которых равна k, представляет собой гомоморфизм

$$\bigoplus_{\alpha+\beta=k} H^\alpha(X) \otimes H^\beta(Y) \to \bigoplus_{\alpha+\beta=k} H^\alpha(X^\alpha) \otimes H^\beta(Y^\beta).$$

Этот гомоморфизм является мономорфизмом, потому что отображения $H^\alpha(X) \to H^\alpha(X^\alpha)$ и $H^\beta(Y) \to H^\beta(Y^\beta)$ — мономорфизмы. Действительно, они двойственны эпиморфизмам $H_\alpha(X^\alpha) \to H_\alpha(X)$ и $H_\beta(Y^\beta) \to H_\beta(Y)$.

Формула Уитни удобно записывается, если использовать *полный класс Штифеля–Уитни* $w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \ldots + w_n(\xi)$, $n = \dim \xi$. При таких обозначениях формула Уитни принимает вид $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \smile w(\eta)$.

3.2.5. Приложения классов Штифеля–Уитни

Полный класс Штифеля–Уитни $w = 1 + w_1 + w_2 + \ldots$ обратим в том смысле, что существует элемент $\bar{w} = 1 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \ldots \in H^*(B; \mathbb{Z}_2)$, для которого $w\bar{w} = 1$ (для краткости вместо cup-произведения мы используем обычное обозначение для произведения элементов кольца). Действительно, если a — нильпотентный элемент кольца, то $(1 + a)^{-1} =$

$= 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots$ Поэтому

$$(1 + w_1 + w_2 + \ldots)^{-1} =$$
$$= 1 - (w_1 + w_2 + \ldots) + (w_1 + w_2 + \ldots)^2 - (w_1 + w_2 + \ldots)^3 + \ldots =$$
$$= 1 - w_1 + (w_1^2 - w_2) + (-w_1^3 + 2w_1w_2 - w_3) + \ldots$$

В кольце $H^*(B; \mathbb{Z}_2)$ все элементы имеют порядок 2, поэтому

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= w_1, \\ \bar{w}_2 &= w_1^2 + w_2, \\ \bar{w}_3 &= w_1^3 + w_3, \\ \bar{w}_4 &= w_1^4 + w_1^2 w_2 + w_2^2 + w_4, \ \ldots \end{aligned}$$

Классы $\bar{w}_i(\xi)$ называют *дуальными классами Штифеля–Уитни*.

Важное значения дуальных классов Штифеля–Уитни связано со следующей *теоремой двойственности Уитни*.

Теорема 3.2.9 (Уитни). *Предположим, что многообразие M^n погружено в $\mathbb{R}^N$ и ν_{M^n} — нормальное расслоение над M^n. Тогда $w_i(\nu_{M^n}) = \bar{w}_i(\tau_{M^n})$. В частности, $w_i(\nu_{M^n})$ не зависит от погружения.*

Доказательство. Расслоение $\nu_{M^n} \oplus \tau_{M^n}$ изоморфно тривиальному расслоению θ^N над M^n; изоморфизм задаётся сопоставлением паре векторов в слоях этих расслоений над точкой $x \in M^n$ их суммы (один из векторов перпендикулярен касательному пространству, а другой вектор лежит в касательном пространстве). Таким образом, $w(\nu_{M^n})w(\tau_{M^n}) = w(\nu_{M^n} \oplus \tau_{M^n}) = 1$, т.е. $w(\nu_{M^n}) = \bar{w}(\tau_{M^n})$. □

Следствие. $w(\tau_{S^n}) = 1$.

Доказательство. Для стандартного вложения $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ нормальное расслоение тривиально. □

Задача 3.2.11. *Пусть M — риманово многообразие. Снабдите $M \times M$ структурой риманова многообразия и докажите, что нормальное расслоение к $d(M)$ в $M \times M$ изоморфно касательному расслоению многообразия M; здесь $d(x) = (x, x)$ — диагональное отображение.*

Для многообразия M^n класс $w(\tau_{M^n})$ называют *классом Штифеля–Уитни многообразия* M^n и обозначают $w(M^n)$.

Задача 3.2.12. *Вычислите классы w_1 и w_2 для сферы с g ручками.*

Задача 3.2.13. *Вычислите классы* w_1 *и* w_2 *для сферы с вклеенными* m *листами Мёбиуса и докажите, что* $w_1^2 = w_2$.

Задача 3.2.14. *Докажите, что если многообразие* M^n *погружено в* $\mathbb{R}^{n+1}$, *то* $w_k = w_1^k$ *для всех* k *(здесь* $w_k = w_k(M^n)$*).*

Классы Штифеля–Уитни всех сфер тривиальны. Более интересный пример доставляют классы Штифеля–Уитни проективных пространств $\mathbb{R}P^n$. Их вычисление основано на следующем утверждении.

Теорема 3.2.10. *Пусть* θ^1 *— тривиальное 1-мерное расслоение над* $\mathbb{R}P^n$. *Тогда* $\tau_{\mathbb{R}P^n} \oplus \theta^1 \cong \underbrace{\gamma_n^1 \oplus \ldots \oplus \gamma_n^1}_{n+1}$.

Доказательство. Пространства расслоений, участвующих в формулировке теоремы, можно описать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tau(\mathbb{R}P^n) &\text{ состоит из пар } \pm(x, v),\ x \in S^n,\ v \in \mathbb{R}^{n+1},\ x \perp v;\\
\theta^1 &\text{ состоит из пар } (\pm x, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R};\\
\gamma_n^1 &\text{ состоит из пар } (\pm x, \lambda(x)),\ \lambda(-x) = -\lambda(x);\\
(\gamma_n^1)^{n+1} &\text{ состоит из пар } (\pm x, v(x)),\ v(-x) = -v(x).
\end{aligned}$$

Отображение $\tau_{\mathbb{R}P^n} \oplus \theta^1 \to (\gamma_n^1)^{n+1}$ устроено следующим образом: парам $\pm(x, v)$ и $(\pm x, \lambda)$ сопоставляется пара $(\pm x, v + \lambda x)$. Обратное отображение устроено следующим образом. Представим вектор $v(x)$ в виде $v(x) = v_\tau + v_\nu$, где $v_\nu = \lambda x$ и $v_\tau \perp x$. Сопоставим паре $(\pm x, v(x))$ пары $\pm(x, v_\tau)$ и $\pm(x, \varepsilon v_\nu)$, где $\varepsilon = 1$, если векторы x и v_ν сонаправлены, и $\varepsilon = -1$, если эти векторы противоположно направлены. □

Следствие. $w(\mathbb{R}P^n) = (1 + \alpha)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\alpha + \ldots + \binom{n+1}{n}\alpha^n$.

Упражнение. *Докажите, что* $w_1(\mathbb{R}P^n) = 0$ *тогда и только тогда, когда* n *нечётно.*

Теорема 3.2.11. $w(\mathbb{R}R^n) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $n = 2^k - 1$ *для некоторого* k.

Доказательство. Ясно, что $(a + b)^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod 2$. Поэтому $(1 + \alpha)^{2^k} = 1 + \alpha^{2^k}$. Предположим, что $n = 2^k - 1$. Тогда $w(\mathbb{R}R^n) = (1 + \alpha)^{2^k} = 1 + \alpha^{2^k} = 1$, поскольку $2^k > n$.

Предположим теперь, что $n + 1 = 2^k m$, где m — нечётное число, $m > 1$. Тогда

$$(1 + \alpha)^{n+1} = (1 + \alpha^{2^k})^m = 1 + m\alpha^{2^k} + \frac{m(m-1)}{2}\alpha^{2 \cdot 2^k} + \ldots$$

Здесь $\alpha^{2^k} \neq 0$ и $m \not\equiv 0 \pmod 2$. □

Следствие 1. *Если многообразие $\mathbb{R}P^n$ параллелезуемо, то $n = 2^k - 1$ для некоторого k.*

Следствие 2. *Если $n + 1 = 2^k m$, где m — нечётное число, то $w_{2^k}(\mathbb{R}P^n) = \alpha^{2^k} \neq 0$, поэтому на $\mathbb{R}P^n$ не существует 2^k линейно независимых векторных полей.*

Задача 3.2.15. *Докажите, что если $\mathbb{R}P^n$ погружено в $\mathbb{R}^{n+1}$, то n имеет вид $2^r - 1$ или $2^r - 2$.*

Теорема 3.2.12. *Предположим, что существует билинейная операция умножения $\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ без делителей нуля. Предположим, далее, что существует левосторонняя единица e, т.е. $\mu(e, x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ (ассоциативность операции не предполагается). Тогда $n = 2^k$ для некоторого k.*

Доказательство. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ базис $e_1 = e$, e_2, …, e_n. В каждой точке $x \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ векторы $x = \mu(e, x)$, $\mu(e_2, x)$, …, $\mu(e_n, x)$ линейно независимы, поскольку иначе $\mu(y, x) = 0$ для некоторых ненулевых векторов $y = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ и x. Проекции векторов $\mu(e_2, x)$, …, $\mu(e_n, x)$ на касательное пространство к S^{n-1} в точке x линейно независимы. Эти проекции образуют линейно независимые векторные поля на сфере. А так как $\mu(e_i, -x) = -\mu(e_i, x)$, эти векторные поля переносятся на $\mathbb{R}P^{n-1}$. Таким образом, многообразие $\mathbb{R}P^{n-1}$ параллелезуемо. Остаётся воспользоваться следствием 1 теоремы 3.2.11. □

Теорема 3.2.13. *Если $n = 2^k$, то многообразие $\mathbb{R}P^n$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{2n-2}$.*

Доказательство. Если $n = 2^k$, то $w(\mathbb{R}P^n) = (1 + \alpha)(1 + \alpha)^{2^k} = (1 + \alpha)(1 + \alpha^{2^k}) = 1 + \alpha + \alpha^{2^k} + \alpha^{2^k+1} = 1 + \alpha + \alpha^n$. По условию $\alpha^{n+1} = 0$, поэтому $(1 + \alpha + \alpha^n)(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1}) = 1$. Значит, $\bar{w}(\mathbb{R}P^n) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1}$.

Предположим, что $\mathbb{R}P^n$ погружено в $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогда размерность нормального расслоения не может быть меньше максимальной размерности ненулевого дуального класса Штифеля–Уитни. В нашем случае $m \geqslant n - 1$, т.е. $\mathbb{R}P^n$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{2n-2}$. □

Если n не является степенью двойки, то в качестве примера многообразия размерности n, для которого дуальные классы Штифеля–Уитни служат препятствием к погружению в евклидово пространство максимальной размерности, можно взять $\mathbb{R}P^{2^{k_1}} \times \ldots \times \mathbb{R}P^{2^{k_s}}$, где $2^{k_1} + \ldots + 2^{k_s}$ — двоичная запись числа n.

Теорема 3.2.14. *Если $2^{k_1} + \ldots + 2^{k_s}$ — двоичная запись числа n, то многообразие $\mathbb{R}P^{2^{k_1}} \times \ldots \times \mathbb{R}P^{2^{k_s}}$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{2n-s-1}$.*

Доказательство. Чтобы избежать громоздких обозначений, будем считать, что $s = 2$. Положим $2^{k_1} = p$ и $2^{k_2} = q$. Пусть π_p и π_q — проекции $\mathbb{R}P^p \times \mathbb{R}P^q$ на первый и второй множители. Тогда $w(\mathbb{R}P^p \times \mathbb{R}P^q) = w\big(\pi_p^*(\tau_{\mathbb{R}P^p} \oplus \pi_p^*(\tau_{\mathbb{R}P^q})\big) = \pi_p^*\big(w(\mathbb{R}P^p)\big) \smile \pi_q^*\big(w(\mathbb{R}P^q)\big) = \pi_p^*(1+\alpha_p)^{p+1} \smile \pi_q^*(1+\alpha_p)^{q+1}$. При доказательстве теоремы 3.2.13 мы убедились, что $\big((1+\alpha_p)^{p+1}\big)^{-1} = 1 + \alpha_p + \alpha_p^{p-1}$. Воспользовавшись тем, что для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ $(\alpha \times \beta) \smile (\gamma \times \delta) = (\alpha \smile \gamma) \times (\beta \smile \delta)$, получим $\bar{w}(\mathbb{R}P^p \times \mathbb{R}P^q) = (1 + \beta_p + \ldots + \beta_p^{p-1}) \times (1 + \beta_q + \ldots + \beta_q^{q-1})$, где $\beta_p = \pi_p^*\alpha_p$ и $\beta_q = \pi_q^*\alpha_q$. Старшая размерность ненулевого дуального класса $\bar{w}(\mathbb{R}P^p \times \mathbb{R}P^q)$ равна $(p-1)+(q-1) = n-2$. Для произвольного s вычисления аналогичны. □

Числа Штифеля–Уитни

Пусть M^n — замкнутое многообразие (возможно несвязное), $[M^n] \in H_n(M; \mathbb{Z}_2)$ — его фундаментальный класс. Тогда для любого когомологического класса $\alpha \in H^n(M; \mathbb{Z}_2)$ определён элемент $\langle \alpha, [M^n] \rangle \in \mathbb{Z}_2$. В качестве α можно взять класс $w_1(\tau_{M^n})^{r_1} \ldots w_n(\tau_{M^n})^{r_n}$, где $r_1, \ldots, r_n$ — неотрицательные целые числа, для которых $r_1 + 2r_2 + \ldots + nr_n = n$. Полученное при этом число

$$\langle w_1(\tau_{M^n})^{r_1} \ldots w_n(\tau_{M^n})^{r_n}, [M^n] \rangle \in \mathbb{Z}_2$$

называют *числом Штифеля–Уитни*, соответствующим классу $w_1^{r_1} \ldots w_n^{r_n}$. Это число обозначают $w_1^{r_1} \ldots w_n^{r_n}[M^n]$.

Задача 3.2.16. *Докажите, что если n чётно, то $w_n[\mathbb{R}P^n] \neq 0$ и $w_1^n[\mathbb{R}P^n] \neq 0$.*

Задача 3.2.17. *Докажите, что если n нечётно, то все числа Штифеля–Уитни многообразия $\mathbb{R}P^n$ нулевые.*

Теорема 3.2.15 (Понтрягин). *Пусть $M^n = \partial W^{n+1}$, где W^{n+1} — компактное многообразие. Тогда все числа Штифеля–Уитни многообразия M^n равны нулю.*

Доказательство. Будем рассматривать гомологии и когомологии с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$. Пусть $[W^{n+1}] \in H_{n+1}(W^{n+1}, M^n)$ — фундаментальный класс. При доказательстве теоремы двойственности Лефшеца мы доказали, что гомоморфизм $\partial_* : H_{n+1}(W^{n+1}, M^n) \to H_n(M^n)$ переводит $[W^{n+1}]$ в фундаментальный класс $[M^n] \in H_n(M^n)$. Поэтому если $\alpha \in H^n(M^n)$, то $\langle \alpha, [M^n] \rangle = \langle \alpha, \partial_*[W^{n+1}] \rangle = \langle \delta^* \alpha, [W^{n+1}] \rangle$, где $\delta^* : H^n(M^n) \to H^{n+1}(W^{n+1}, M^n)$ — гомоморфизм, двойственный гомоморфизму ∂_*.

Из теоремы о воротнике (для гладких многообразий) легко выводится, что $\tau_{W^{n+1}}|_{M^n} \cong \tau_{M^n} \oplus \theta^1$, где θ^1 — тривиальное 1-мерное расслоение над M^n. Действительно, нас интересует только часть многообразия W^{n+1}, расположенная вблизи $\partial W^{n+1} = M^n$. Поэтому для наших целей можно считать, что $W^{n+1} = M^n \times I$. В результате получаем, что $w_j(M^n) = w_j(\tau_{W^{n+1}}|_{M^n})$ для всех j. Далее, $w_j(\tau_{W^{n+1}}|_{M^n}) = i^* w_j(W^{n+1})$, где $i^* : H^j(W^{n+1}) \to H^j(M^n)$ — гомоморфизм, индуцированный включением $i : M^n \to W^{n+1}$. Поэтому $w_1^{r_1}(M^n) \dots w_n^{r_n}(M^n) = i^* \alpha$, где $\alpha = w_1^{r_1}(W^{n+1}) \dots w_n^{r_n}(W^{n+1})$.

Точная когомологическая последовательность пары

$$H^n(W^{n+1}) \xrightarrow{i^*} H^n(M^n) \xrightarrow{\delta^*} H^{n+1}(W^{n+1}, M^n)$$

показывает, что $\delta^* i^* = 0$. Поэтому $\delta^*\bigl(w_1^{r_1}(M^n) \dots w_n^{r_n}(M^n)\bigr) = \delta^* i^* \alpha = 0$, а значит,

$$\langle w_1^{r_1}(M^n) \dots w_n^{r_n}(M^n), [M^n] \rangle = \langle \delta^*\bigl(w_1^{r_1}(M^n) \dots w_n^{r_n}(M^n)\bigr), [W^{n+1}] \rangle = 0,$$

т.е. $w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}[M^n] = 0$. □

3.2.6. Универсальное расслоение

Есть ещё один важный подход к построению характеристических классов, основанный на том, что любое векторное расслоение данной размерности можно получить из некоторого фиксированного расслоения над многообразием Грассмана посредством перехода к индуцированному расслоению. При этом характеристические классы Штифеля–Уитни получаются из некоторого набора мультипликативных образующих кольца когомологий многообразия Грассмана посредством индуцированного отображения когомологий.

Над многообразием Грассмана $G(n,k)$ имеется *каноническое* k-мерное векторное расслоение γ_n^k, которое устроено следующим образом. Пространство расслоения $E(\gamma_n^k)$ состоит из пар

$$(k\text{-мерное подпространство } \Pi^k \subset \mathbb{R}^n, \text{ вектор } v \in \Pi^k);$$

проекция $p : E(\gamma_n^k) \to G(n,k)$ сопоставляет такой паре подпространство Π^k, которое рассматривается как точка многообразия $G(n,k)$. Топология пространства $E(\gamma_n^k)$ индуцирована его вложением в $G(n,k) \times \mathbb{R}^n$. Слой над точкой $\Pi^k \in G(n,k)$ естественным образом отождествляется с k-мерным пространством Π^k, поэтому слой снабжён структурой линейного пространства. Остаётся проверить, что для γ_n^k выполняется условие локальной тривиальности.

Мы воспользуемся координатными окрестностями U_I, построенными при доказательстве того, что $G(n,k)$ — гладкое многообразие (часть I, с.xxx). Здесь I — набор чисел $\{i_1, \ldots, i_k\}$, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$; множество $U_i \subset G(n,k)$ состоит из k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$, трансверсальных[1] ортогональному дополнению к пространству $\mathbb{R}_I^k$, порождённому векторами $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$. Ортогональная проекция на $\mathbb{R}_I^k$ каждого k-мерного подпространства $\Pi^k \in U_I$ является изоморфизмом линейных пространств. Гомеоморфизм $U_I \times \mathbb{R}_I^k \to p^{-1}(U_I)$ устроен следующим образом: паре $(\Pi^k, v) \in U_I \times \mathbb{R}_I^k$ сопоставляется пара $(\Pi^k, v') \in E(\gamma_n^k)$, где $v' \in \Pi^k$ — тот вектор, который проецируется на вектор $v \in \mathbb{R}_I^k$.

Теорема 3.2.16. *Любое k-мерное векторное расслоение ξ над компактной хаусдорфовой базой B индуцировано каноническим расслоением γ_n^k для некоторого n.*

Доказательство. Выберем открытые множества $U_1, \ldots, U_m$ так, чтобы они покрывали B и над каждым из них расслоение ξ было тривиально. Компактное хаусдорфово пространство паракомпактно, а потому нормально. Следовательно, существует разбиение единицы $f_1, \ldots, f_m$, подчинённое покрытию $U_1, \ldots, U_m$.

С помощью гомеоморфизма $h_i : U_i \times \mathbb{R}^k \to p^{-1}(U_i)$ построим отображение $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^k$, которое является композицией отображений

$$p^{-1}(U_i) \xrightarrow{h_i^{-1}} U_i \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k.$$

Затем рассмотрим отображение $g_i : E(\xi) \to \mathbb{R}^k$, заданное формулой

$$g_i(x) = \begin{cases} f_i(x)\varphi_i(x) & \text{при } x \in U_i; \\ 0 & \text{при } x \notin U_i. \end{cases}$$

Наконец, положим $g(x) = \big(g_1(x), \ldots, g_m(x)\big)$. Здесь g — отображение $E(\xi) \to \mathbb{R}^{mk}$. При этом каждый слой изоморфно отображается на не-

[1] Трансверсальность двух линейных подпространств размерностей k и $n-k$ в $\mathbb{R}^n$ означает, что их пересечения состоит только из нулевого вектора.

которое k-мерное подпространство $\Pi^k \subset \mathbb{R}^{mk}$. В результате получаем отображение $\hat{g} : B \to G(mk, k)$.

Легко проверить, что $\hat{g}^*\gamma^k_{mk} \cong \xi$. Действительно, пространство расслоения $\hat{g}^*\gamma^k_{mk}$ состоит из троек $(\Pi^k, v \in \Pi^k, b)$, где $\hat{g}(b) = \Pi^k$. Поэтому слои расслоений ξ и $\hat{g}^*\gamma^k_{mk}$ над каждой точкой $b \in B$ канонически изоморфны. $\square$

Для компактного хаусдорфова пространства B гомотопные отображения $f_0, f_1 : B \to G(n, k)$ индуцируют изоморфные расслоения, т.е. $f_0^*\gamma^k_n \cong f_1^*\gamma^k_n$. Это утверждение справедливо даже в следующей более общей ситуации.

Теорема 3.2.17. *Пусть B — компактное хаусдорфово пространство, ξ — расслоение над пространством X, $f_0, f_1 : B \to X$ — гомотопные отображения. Тогда $f_0^*\xi \cong f_1^*\xi$.*

Доказательство. Пусть $F : B \times I \to X$ — гомотопия, связывающая f_0 и f_1; f_t — ограничение F на $B \times \{t\}$. Рассмотрим над $B \times I$ два расслоения: $F^*\xi$ и $p^*f_t^*\xi$, где $p : B \times I \to B$ — естественная проекция. Ограничения этих расслоений на $B \times \{t\}$ изоморфны. Изоморфизм расслоений ξ_1 и ξ_2 — это сечение расслоения $\mathrm{Hom}(\xi_1, \xi_2)$, для которого все отображения слоёв — изоморфизмы.

Лемма. *Пусть Y — замкнутое подмножество компактного хаусдорфова пространства Z; ξ — векторное расслоение над Z. Тогда любое сечение расслоения $\xi|_Y$ можно продолжить до сечения всего расслоения ξ.*

Доказательство. Покроем Z конечным числом координатных окрестностей. Над каждой координатной окрестностью U_i сечение можно рассматривать как отображение $f_i : U_i \cap Y \to \mathbb{R}^n$. В топологии пространства U_i множество $U_i \cap Y$ замкнуто, поэтому отображение f_i можно продолжить до отображения $F_i : U_i \to \mathbb{R}^n$. Выберем разбиение единицы $\{\lambda_i\}$, подчинённое покрытию $\{U_i\}$, и положим

$$s_i(x) = \begin{cases} \lambda_i(x)F_i(x) & \text{для } x \in U_i; \\ & \text{для } x \notin U_i. \end{cases}$$

Тогда $\sum s_i(x)$ — сечение расслоения ξ, продолжающее данное сечение над Y. $\square$

Продолжим изоморфизм ограничений расслоений $F^*\xi$ и $p^*f_t^*\xi$ на $B \times \{t\}$ до сечения расслоения $\mathrm{Hom}(F^*\xi, p^*f_t^*\xi)$. В пространстве

$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ изоморфизмы образуют открытое подмножество, поэтому из компактности B следует, что ограничения расслоений $F^*\xi$ и $p^*f_t^*\xi$ на множество $B \times \{V(t)\}$, где $V(t)$ — некоторое открытое подмножество отрезка I, содержащее точку t, изоморфны. Тогда для всех $\tau \in V(t)$ расслоения $p^*f_\tau^*\xi$ изоморфны. Поэтому из компактности (и связности) отрезка I следует, что $f_0^*\xi \cong f_1^*\xi$. □

Вложение $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+a}$ индуцирует вложение $i_a : G(n,k) \to G(n+a,k)$. При этом $i_a^*(\gamma_{n+a}^k) = \gamma_n^k$. Таким образом, любое расслоение, индуцированное расслоением γ_n^k, индуцировано также и расслоением γ_{n+a}^k для всех $a \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.2.18. *Пусть B — компактное хаусдорфово пространство, f_0 и f_1 — отображения B в $G(n,k)$. Расслоения $f_0^*\gamma_n^k$ и $f_1^*\gamma_n^k$ изоморфны тогда и только тогда, когда отображения $i_a f_0$ и $i_a f_1$ гомотопны для некоторого a.*

Доказательство. Мы только что доказали, что гомотопные отображения индуцируют изоморфные расслоения. Поэтому нужно лишь доказать, что если расслоения $f_0^*\gamma_n^k$ и $f_1^*\gamma_n^k$ изоморфны, то отображения $i_a f_0$ и $i_a f_1$ гомотопны для некоторого a.

Отождествив изоморфные расслоения $f_0^*\gamma_n^k$ и $f_1^*\gamma_n^k$, будем считать, что заданы две коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_i} & E(\gamma_n^k) \subset G(n,k) \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow{f_i} & G(n,k) \end{array}$$

Вместо отображения φ_i рассмотрим отображение $\psi_i : E \to \mathbb{R}^n$, которое представляет собой композицию φ_i и естественной проекции $G(n,k) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. При этом $f_i(b)$ — подпространство $\psi_i(p^{-1}(b)) \in G(n,k)$, т.е. отображение ψ_i однозначно задаёт f_i.

Рассмотрим два вложения $j_{n,0}, j_{n,1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$; здесь $j_{n,0}$ — изоморфизм на первое слагаемое, $j_{n,1}$ — на второе. Они индуцируют вложения $i_{n,0}, i_{n,1} : G(n,k) \to G(2n,k)$; при этом $i_{n,0} = i_n$ и $i_{n,1} \sim i_n$ (при $n = 1$ гомотопия между $i_{n,0}$ и $i_{n,1}$ строится посредством поворота координатных осей; при $n > 1$ ту же самую конструкцию можно применить к каждой плоскости, порождённой векторами e_α и $e_{n+\alpha}$).

Каждое отображение $\psi_{n,t} = (1-t)j_{n,0}\psi_0 + tj_{n,1}\psi_1$ задаёт отображение $f_{n,t} : B \to G(2n,k)$. Действительно, из того, что ψ_0 и ψ_1 — мономорфные отображения слоя $p^{-1}(b)$ в $\mathbb{R}^n$, следует, что отображение $\psi_{n,t}$

тоже мономорфно, потому что векторы $j_{n,0}\psi_0(v)$ и $j_{n,1}\psi_1(v)$ лежат в ортогональных подпространствах.

Итак, отображения $f_{n,0} = i_{n,0}f_0 = i_n f_0$ и $f_{n,1} = i_{n,1}f_1 \sim i_n f_1$ гомотопны, поэтому отображения $i_n f_0$ и $i_n f_1$ тоже гомотопны. □

Задача 3.2.18. *Пусть ξ^k — векторное расслоение размерности k над компактным CW-комплексом B, размерность которого меньше k; θ^1 — тривиальное 1-мерное векторное расслоение над B. Докажите, что расслоение ξ^k тривиально тогда и только тогда, когда расслоение $\xi^k \oplus \theta^1$ тривиально.*

Многообразие M^n называют *стабильно параллелезуемым*, если для некоторого тривиального k-мерного расслоения θ^k над M^n расслоение $\tau_{M^n} \oplus \theta^k$ тривиально.

Задача 3.2.19. *Докажите, что многообразие M^n стабильно параллелезуемо тогда и только тогда, когда выполняются одно из следующих условий:*

а) расслоение $\tau_{M^n} \oplus \theta^1$ тривиально;

б) для вложения M^n в $\mathbb{R}^N$, где $N \geqslant 2n+1$, нормальное расслоение тривиально.

3.2.7. Стабильные когомологии многообразий Грассмана

Теорема 3.2.18 показывает, что для изучения векторных расслоений большой интерес представляют когомологии многообразий $G(n,k)$ и их поведение при вложениях $G(n,k) \to G(n,k+a)$. Действительно, каждый когомологический класс, стабильный относительно таких вложений, позволяет сопоставить расслоению ξ над B класс когомологий пространства B — характеристический класс расслоения ξ.

Здесь мы займёмся вычислением гомологий и когомологий (вещественного) многообразия Грассмана $G(n,k)$ с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$. Мы будем использовать координатные окрестности U_I и открытые клетки Шуберта $e(\sigma)$, введённые в части I. Открытая клетка Шуберта $e(\sigma)$ целиком лежит в карте U_I, где $I = \sigma$, и задаётся в ней системой уравнений вида $x_i = 0$. Её замыкание $\overline{e(\sigma)}$ пересекается лишь с теми картами U_I, для которых $i_1 \leqslant \sigma_1, \ldots, i_k \leqslant \sigma_k$. В такой карте множество $\overline{e(\sigma)} \cap U_I$ задаётся уравнениями того же вида. Поэтому $\overline{e(\sigma)}$ — подмногообразие в $G(n,k)$. Его называют *многообразием Шуберта*.

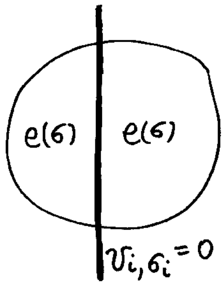

Рис. 3.4. Граница клетки Шуберта

Открытые клетки Шуберта образуют клеточное разбиение многообразия Грассмана, а их замыкания являются подмногообразиями. Поэтому $G(n,k)$ можно триангулировать так, чтобы каждое многообразие Шуберта оказалось при этом тоже триангулированным. После этого можно вычислять клеточные гомологии. Для этого нужно выяснить, как устроено характеристическое отображение клетки Шуберта.

Размерность клетки $e(\sigma)$ равна $(\sigma_1-1)+(\sigma_2-2)+\ldots+(\sigma_k-k)$. Нас интересует, с какими коэффициентами входят в $\partial[e(\sigma)]$ клетки размерности на 1 меньше. Если клетка $e(\sigma')$ содержится в $\overline{e(\sigma)}$, то $\sigma_1'\leqslant\sigma_1$, $\ldots$, $\sigma_k'\leqslant\sigma_k$. Поэтому для такой клетки равенство $\sigma_1'+\ldots+\sigma_k'=\sigma_1+{}$ $+\ldots+\sigma_k-1$ может выполняться лишь в том случае, когда $\sigma_i'=\sigma_i-1$ и $\sigma_j'=\sigma_j$ при $j\neq i$; при этом $\sigma_{i-1}=\sigma_i-1$. В подходящей системе координат множество $\partial[e(\sigma')]$ задаётся в $\partial[e(\sigma)]$ уравнением $v_{i,\sigma_i}=0$ (рис. 3.4). В зависимости от ориентаций двух частей клетки $e(\sigma)$, примыкающих к $\overline{e(\sigma')}$, клетка $e(\sigma')$ может входить в $\partial[e(\sigma)]$ с коэффициентом ± 2 или 0. Поэтому для гомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ получаем $\partial[e(\sigma)]=0$. Таким образом, $H_r\bigl(G(n,k);\mathbb{Z}_2\bigr)\cong\mathbb{Z}_2^{N(r,n,k)}$, где $N(r,n,k)$ — количество r-мерных клеток Шуберта многообразия $G(n,k)$.

Каждому символу Шуберта σ можно сопоставить последовательность чисел σ_1-1, σ_2-2, $\ldots$, σ_k-k. После удаления из неё нулей получим последовательность i_1, i_2, $\ldots$, i_s, где $s\leqslant k$ и $1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\ldots\leqslant i_s\leqslant n-k$ (неравенство $i_\alpha\leqslant i_{\alpha+1}$ следует из неравенства $\sigma_\beta<\sigma_{\beta+1}$).

Неупорядоченный набор натуральных чисел i_1, i_2, $\ldots$, i_s называют *разбиением* числа r, если $i_1+\ldots+i_s=r$. Каждому неупорядоченному набору однозначно соответствует набор чисел, расположенных в порядке возрастания. Поэтому число $N(r,n,k)$ равно количеству разбиений числа r на не более чем k натуральных чисел, каждое из которых не превосходит $n-k$. В частности, если оба числа k и $n-k$ не меньше r, то $N(r,n,k)=p(r)$ — количество всех разбиений числа r.

Если $n \geqslant r+k$, то вложение $G(n,k) \to G(n+1,k)$ индуцирует изоморфизм гомологий $H_r\big(G(n,k);\mathbb{Z}_2\big) \to H_r\big(G(n+1,k);\mathbb{Z}_2\big)$ и изоморфизм двойственных пространств когомологий $H^r\big(G(n+1,k);\mathbb{Z}_2\big) \to H^r\big(G(n,k);\mathbb{Z}_2\big)$; здесь имеется в виду двойственность линейных пространств, а не двойственность Пуанкаре. При $n \geqslant r+k$ группу $H^r\big(G(n,k);\mathbb{Z}_2\big)$ будем обозначать $H^r\big(G(\infty,k);\mathbb{Z}_2\big)$.

Чтобы вычислить мультипликативную структуру кольца $H^*\big(G(\infty,k);\mathbb{Z}_2\big)$, рассмотрим вложение

$$f:\underbrace{\mathbb{R}P^{n-1}\times\ldots\times\mathbb{R}P^{n-1}}_{k} \to G(nk,k),$$

при котором набору векторов $v_1,\ldots,v_k \in \mathbb{R}^n$ сопоставляется подпространство в $\mathbb{R}^n\times\ldots\times\mathbb{R}^n$, натянутое на векторы $(v_1,0,\ldots,0)$, $(0,v_2,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,v_k)$. Это отображение индуцирует гомоморфизм колец

$$H^*\big(G(nk,k);\mathbb{Z}_2\big) \to H^*(\mathbb{R}P^{n-1}\times\ldots\times\mathbb{R}P^{n-1};\mathbb{Z}_2).$$

Кольцо $H^*(\mathbb{R}P^{n-1}\times\ldots\times\mathbb{R}P^{n-1};\mathbb{Z}_2)$ изоморфно кольцу многочленов $\mathbb{Z}_2[\alpha_1,\ldots,\alpha_k]$, профакторизованному по соотношениям $\alpha_i^n=0$, $i=1,\ldots,k$.

Вложение $\mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^{n+1}$ при $r \leqslant n$ индуцирует изоморфизм $H^r(\mathbb{R}P^{n+1};\mathbb{Z}_2) \to H^r(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$, поэтому можно ввести кольцо $H^*(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha]$. При каждом фиксированном r нужно просто считать, что мы имеем дело с $\mathbb{R}P^n$, где n достаточно велико. Аналогично можно ввести кольцо $H^*(\mathbb{R}P^\infty\times\ldots\times\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha_1,\ldots,\alpha_k]$ и определить гомоморфизм

$$f^*: H^*\big(G(\infty,k);\mathbb{Z}_2\big) \to H^*(\mathbb{R}P^\infty\times\ldots\times\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha_1,\ldots,\alpha_k].$$

Теорема 3.2.19. *f^* — изоморфизм на подкольцо симметрических многочленов. При этом $f^*\big(w_i(\gamma_\infty^k)\big)=\sigma_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, где σ_i — элементарная симметрическая функция.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что размерность пространства $H^r\big(G(\infty,k);\mathbb{Z}_2\big)$ совпадает с размерностью пространства симметрических многочленов степени r от k переменных над полем $\mathbb{Z}_2$. Для этого нужно установить взаимно однозначное соответствие между разбиениями числа r на не более чем k положительных слагаемых и многочленами вида $\sigma_1^{r_1}\ldots\sigma_k^{r_k}$, где $r_1+2r_2+\ldots+kr_k=r$ $(r_1\geqslant 0)$. Рассмотрим числа $r_k\leqslant r_k+r_{k-1}\leqslant\ldots\leqslant r_k+\ldots+r_1$. Их сумма равна r. Наоборот, если $r=s_1+\ldots+s_k$ и $s_1\geqslant s_2\geqslant\ldots\geqslant s_k\geqslant 0$, то положим $r_k=s_k$, $r_{k-1}=s_{k-1}-s_k$, $\ldots$, $r_1=s_1-s_2$.

Легко проверить, что $f^*\gamma_\infty^k\cong\gamma_\infty^1\times\ldots\times\gamma_\infty^1$, точнее говоря, $f^*\gamma_{nk}^k\cong\gamma_{n-1}^1\times\ldots\times\gamma_{n-1}^1$. Действительно, слой расслоения $f^*\gamma_{nk}^k$ над точкой $(x_1,\ldots,x_k)$, $x_i\in\mathbb{R}^n$, состоит из векторов $\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_kx_k$.

Воспользовавшись естественностью, получим $f^*\bigl(w(\gamma_\infty^k)\bigr)=$ $=w\bigl(f^*(\gamma_\infty^k)\bigr)=w(\gamma_\infty^1\times\ldots\times\gamma_\infty^1)=(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_k)$, где α_i — образующая кольца когомологий i-го пространства $\mathbb{R}P^\infty$. Таким образом, $f^*\bigl(w(\gamma_\infty^k)\bigr)=\sigma_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$. Из этого следует, что f^* — эпиморфизм кольца $H^*\bigl(G(\infty,k);\mathbb{Z}_2\bigr)$ на кольцо симметрических многочленов над полем $\mathbb{Z}_2$ от переменных $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$. Поэтому f^* — изоморфизм пространства $H^r\bigl(G(\infty,k);\mathbb{Z}_2\bigr)$ на пространство симметрических многочленов степени r. □

Следствие (аксиоматический подход к классам Штифеля–Уитни). *Предположим, что каждому векторному расслоению ξ над каждым симплициальным комплексом B сопоставлены когомологические классы $W_i(\xi)\in H^i(B;\mathbb{Z}_2)$ так, что $W_0(\xi)=1$, $W_i(\xi)=0$ при $i>\dim\xi$, $W_1(\gamma_\infty^1)=\alpha$, выполняется свойство естественности и справедлива формула Уитни (формула 3.3 на с. 165). Тогда $W_i(\xi)=w_i(\xi)$ — класс Штифеля–Уитни.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 3.2.19 мы пользовались только этими свойствами классов Штифеля–Уитни. Поэтому, повторив те же самые рассуждения, получим $f^*\bigl(W_i(\gamma_\infty^k)\bigr)=f^*\bigl(w_i(\gamma_\infty^k)\bigr)$. Но f^* — изоморфизм, поэтому $W_i(\gamma_\infty^k)=w_i(\gamma_\infty^k)$. Из универсальности расслоения γ_∞^k следует, что $W_i(\xi)=w_i(\xi)$ для любого k-мерного расслоения ξ. □

С помощью теоремы 3.2.19 можно получить формулу, выражающую характеристические классы расслоения $\xi^m\otimes\eta^n$ (m и n — размерности расслоений) через характеристические классы расслоений ξ^m и η^n.

Теорема 3.2.20. *Пусть σ_1, $\ldots$, σ_m и σ_1', $\ldots$, σ_n' — элементарные симметрические функции над полем $\mathbb{Z}_2$ от переменных $t_1,\ldots,t_m$ и $t_1',\ldots,t_n'$. Рассмотрим (единственный) многочлен $p_{m,n}$ от $m+n$ пе-*

ременных, для которого

$$p_{m,n}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_n) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1 + t_i + t'_j).$$

Тогда $w(\xi^m \otimes \eta^n) = p_{m,n}(w_1, \ldots, w_m, w'_1, \ldots, w'_n)$, *где* $w_i = w_i(\xi^m)$ *и* $w'_j = w_j(\eta^n)$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что для 1-мерных расслоений выполняется равенство $w_1(\xi^1 \otimes \eta^1) = w_1(\xi^1) + w_1(\eta^1)$. Действительно, для 1-мерного расслоения класс w_1 полностью определяется определяется ограничением расслоения на 1-мерный остов, поэтому требуемое равенство достаточно проверить для 1-мерных расслоений над окружностью. А в случае окружности расслоение $\xi^1 \otimes \eta^1$ ориентируемо тогда и только тогда, когда оба расслоения ξ^1 и η^1 одновременно либо ориентируемы, либо неориентируемы (если при обходе вдоль окружности ориентации слоёв расслоений ξ^1 и η^1 умножаются на ε_1 и ε_2, то ориентация слоя расслоения $\xi^1 \otimes \eta^1$ умножается на $\varepsilon_1\varepsilon_2$).

По-другому требуемое утверждение равенство можно доказать, воспользовавшись тем, что коцикл, представляющий, к примеру, класс $w_1(\xi^1)$, принимает на 1-мерной клетке значение, равное остатку от деления на 2 количества невырожденных нулей сечения расслоения ξ^1 над этой клеткой. Выберем над 1-мерным остовом сечения расслоений ξ^1 и η^1 так, чтобы у них не было общих нулей и все нули были невырожденными. Тензорное произведение этих сечений является сечением расслоения $\xi^1 \otimes \eta^1$, нулями которого служат нули сечений расслоений ξ^1 и η^1.

Шаг 1. *Требуемое утверждение верно для прямых сумм 1-мерных расслоений, т.е. в том случае, когда* $\xi^m = \xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_m$ *и* $\eta^n = \eta_1 \oplus \ldots \oplus \eta_n$, *где все расслоения* ξ_i *и* η_j *1-мерные.*

Пусть $t_i = w_1(\xi_i)$ и $t'_j = w_1(\eta_i)$. Тогда $w = \prod(1 + t_i)$ и $w' = \prod(1 + t'_j)$, т.е. $w_i = \sigma_i$ и $w'_j = \sigma'_j$. При этом

$$(\xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_m) \otimes (\eta_1 \oplus \ldots \oplus \eta_n) = \bigoplus_{i,j}(\xi_i \otimes \eta_j).$$

Значит,

$$w(\xi^m \otimes \eta^n) = \prod_{i,j} w(\xi_i \otimes \eta_j) = \prod_{i,j}^{n}(1 + t_i + t'_j).$$

По условию

$$\prod_{i,j}^{n}(1+t_i+t_j')=p_{m,n}(\sigma_1,\ldots,\sigma_m,\sigma_1',\ldots,\sigma_n'),$$

т.е. $w(\xi^m\otimes\eta^n)=p_{m,n}(w_1,\ldots,w_m,w_1',\ldots,w_n')$.

Шаг 2. *Требуемое утверждение достаточно доказать для прямых сумм 1-мерных расслоений.*

Пусть p_1 и p_2 — проекции $G(\infty,m)\times G(\infty,n)$ на первый и второй множители, $\gamma_1^m=p_1^*\gamma^m$ и $\gamma_2^m=p_2^*\gamma^m$. Расслоение $\gamma_1^m\otimes\gamma_2^m$ над $G(\infty,m)\times G(\infty,n)$ является универсальным для расслоений вида $\xi^m\otimes\eta^n$. Действительно, если $\xi^m=f_1^*\gamma^m$ и $\eta^n=f_2^*\gamma^n$, то $\xi^m\otimes\eta^n= =(f_1\times f_2)^*(\gamma_1^m\otimes\gamma_2^m)$; здесь $(f_1\times f_2)(b)=\big(f_1(b),f_2(b)\big)$.

Таким образом,

$$w(\xi^m\otimes\eta^n)\in(f_1\times f_2)^*H^*\big(G(\infty,m)\times G(\infty,n);\mathbb{Z}_2\big);$$

для краткости будем опускать группу коэффициентов $\mathbb{Z}_2$. Если $\alpha\in H^*\big(G(\infty,m)\big)$ и $\beta\in H^*\big(G(\infty,n)\big)$, то $\alpha\times\beta=p_1^*\alpha\smile p_2^*\beta$. Согласно теореме Кюннета отображение $\alpha\otimes\beta\mapsto\alpha\times\beta$ индуцирует изоморфизм когомологий

$$H^*\big(G(\infty,m)\big)\otimes H^*\big(G(\infty,n)\big)\to H^*\big(G(\infty,m)\times G(\infty,n)\big).$$

Поэтому кольцо $H^*\big(G(\infty,m)\times G(\infty,n)\big)$ мультипликативно порождено свободными образующими $w_i(\gamma_1^m)=w_i$ и $w_i(\gamma_2^n)=w_j'$. Значит, полный класс Штифеля–Уитни расслоения $\gamma_1^m\otimes\gamma_2^m$ *единственным* образом представляется в виде $p_{m,n}(w_1,\ldots,w_m,w_1',\ldots,w_n')$. □

Пример 3.2.13. $w_1(\xi^m\otimes\eta^n)=nw_1(\xi^m)+mw_1(\eta^n)$.

Доказательство. $\prod_{i=1}^m\prod_{j=1}^n(1+t_i+t_j')=1+n(t_1+\ldots+t_m)+ +m(t_1'+\ldots+t_n')+\ldots$. □

Теорему 3.2.20 можно применить для вычисления классов Штифеля–Уитни многообразий Грассмана. Пусть $\overline{\gamma_n^k}$ — расслоение над $G(n,k)$, слой которого над $\Pi^k\in G(n,k)$ представляет собой ортогональное дополнение к подпространству Π^k. Тогда расслоение $\gamma_n^k\oplus\overline{\gamma_n^k}$ тривиально, поэтому $w(\overline{\gamma_n^k})=\bar w(\gamma_n^k)$.

Теорема 3.2.21. $\tau_{G(n,k)}\cong\mathrm{Hom}(\gamma_n^k,\overline{\gamma_n^k})$.

Доказательство. Касательный вектор в точке $\Pi^k \in G(n,k)$ задаётся кривой $\Pi^k(t)$, где $\Pi^k(0)=\Pi^k$. При малых t подпространство $\Pi^k(t)$ однозначно задаётся линейным отображением $\varphi_t : \Pi^k \to (\Pi^k)^\perp$. Действительно, выберем в Π^k базис $e_1, \ldots, e_k$. Пусть $e_1', \ldots, e_k'$ — векторы $\Pi^k(t)$, которые при ортогональной проекции на Π^k отображаются в $e_1, \ldots, e_k$. Пусть, далее, $e_1'', \ldots, e_k''$ — ортогональные проекции векторов $e_1', \ldots, e_k'$ на $(\Pi^k)^\perp$. Формула $\varphi_t(e_i) = e_i''$ задаёт линейное отображение $\varphi_t : \Pi^k \to (\Pi^k)^\perp$; при этом $\varphi_0 = 0$. Отображение φ_t однозначно задаёт подпространство $\Pi^k(t)$. Действительно, подпространство $\Pi^k(t)$ натянуто на векторы $e_1 + \varphi_t(e_1), \ldots, e_k + \varphi_t(e_k)$.

Итак, кривую на многообразии $G(n,k)$, проходящую через точку Π^k, при малых t можно рассматривать как кривую в пространстве $\mathrm{Hom}\big(\Pi^k, (\Pi^k)^\perp\big)$, проходящую через начало координат. Касательные векторы к таким кривым находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами $\mathrm{Hom}\big(\Pi^k, (\Pi^k)^\perp\big)$. В результате получаем изоморфизм $\tau_{G(n,k)} \cong \mathrm{Hom}(\gamma_n^k, \overline{\gamma_n^k})$. □

Из линейной алгебры известен изоморфизм $\mathrm{Hom}(\gamma_n^k, \overline{\gamma_n^k}) \cong (\gamma_n^k)^* \otimes \overline{\gamma_n^k}$, где $*$ означает переход к двойственному пространству. Выбрав в расслоении γ_n^k риманову метрику, получим изоморфизм $(\gamma_n^k)^* \cong \gamma_n^k$. Итак, $\tau_{G(n,k)} \cong \gamma_n^k \otimes \overline{\gamma_n^k}$, поэтому $w\big(G(n,k)\big) = w(\gamma_n^k \otimes \overline{\gamma_n^k}) = p_{k,n-k}(w_1, \ldots, w_k, \bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_{n-k})$, где $w_i = w_i(\gamma_n^k)$ и $\bar{w}_j = w_j(\overline{\gamma_n^k}) = \bar{w}_j(\gamma_n^k)$.

Пример 3.2.14. *Многообразие Грассмана $G(n,k)$ ориентируемо тогда и только тогда, когда n чётно.*

Доказательство. $w_1\big(G(n,k)\big) = (n-k)w_1(\gamma_n^k) + k\bar{w}_1(\gamma_n^k) = n\,w_1(\gamma_n^k)$, поскольку $\bar{w}_1 = w_1$. Кроме того, $w_1(\gamma_n^k) \neq 0$. □

3.2.8. Характеристические классы Чженя

По аналогии с вещественными векторными расслоениями можно определить *комплексные* векторные расслоения, слоями которых служат векторные пространства над $\mathbb{C}$. Для комплексных векторных расслоений тоже можно применить конструкции теории препятствий и построить характеристические классы. Для комплексных расслоений ситуация даже во многом упрощается. Одна из причин этого состоит в том, что овеществление комплексного пространства имеет каноническую ориентацию, и поэтому овеществление комплексного векторного расслоения всегда ориентируемо. Поясним это подробнее.

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{C}$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Ему можно сопоставить векторное пространство $V_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$, $ie_1, \ldots, ie_n$. Если матрица перехода от базиса e к базису ε имеет вид $A + iB$, где A и B — матрицы с вещественными элементами, то матрица перехода от базиса e, ie к базису ε, $i\varepsilon$ имеет вид $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы равен $|\det(A+iB)|^2 > 0$, поскольку

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & 0 \\ B & A-iB \end{vmatrix}.$$

Поэтому в пространстве $V_{\mathbb{R}}$ есть каноническая ориентация.

Пусть ω — комплексное расслоение, $\omega_{\mathbb{R}}$ — его овеществление; это расслоение ориентировано. По аналогии с конструкцией универсального расслоения в вещественном случае можно построить универсальное расслоение в комплексном случае. База этого расслоения — комплексное многообразие Грассмана $G_{\mathbb{C}}(\infty, k)$, $k = \dim_{\mathbb{C}} \omega = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \omega_{\mathbb{R}}$.

В каждом слое комплексного векторного расслоения ω над компактной базой можно задать эрмитову метрику и построить расслоение ω_k, слоем которого является *комплексное многообразие Штифеля* $V_{\mathbb{C}}(n, k)$; точками этого многообразия служат наборы k векторов в $\mathbb{C}^n$, ортонормированных относительно эрмитова скалярного произведения. Для построения характеристического класса расслоения ω_k нужно вычислить первую нетривиальную гомотопическую группу $\pi_i\bigl(V_{\mathbb{C}}(n,k)\bigr)$.

Теорема 3.2.22 (Стинрод [Ст1]). *Если $i \leqslant 2(n-k)$, то $\pi_i\bigl(V_{\mathbb{C}}(n,k)\bigr) = 0$. Первая нетривиальная гомотопическая группа $\pi_{2(n-k)+1}\bigl(V_{\mathbb{C}}(n,k)\bigr)$ равна $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Мы воспользуемся той же схемой рассуждений, что и при доказательстве теоремы 3.2.3 (см. с. 157). В комплексном случае рассуждения упрощаются, потому что не нужно вычислять гомоморфизм ∂_*.

При $k = 1$ многообразие $V_{\mathbb{C}}(n, 1)$ гомеоморфно S^{2n-1}; ясно, что $\pi_i(S^{2n-1}) = 0$ при $i \leqslant 2(n-1)$. Локально тривиальное расслоение $V_{\mathbb{C}}(n, k+1) \to V_{\mathbb{C}}(n,k)$ со слоем $S^{2(n-k)-1}$ позволяет сделать шаг индукции и показать, что $\pi_i\bigl(V_{\mathbb{C}}(n,k+1)\bigr) = 0$ при $i \leqslant 2(n-k-1)$.

Локально тривиальное расслоение $V_{\mathbb{C}}(n+1, k+1) \to V_{\mathbb{C}}(n+1, 1) = S^{2n+1}$ со слоем $V_{\mathbb{C}}(n,k)$ позволяет показать, что $\pi_i\bigl(V_{\mathbb{C}}(n,k)\bigr) \cong \pi_i\bigl(V_{\mathbb{C}}(n+1,k+1)\bigr)$ при $i \leqslant 2n-1$. Поэтому при $i \leqslant 2(n-k)+1$ получаем $\pi_i\bigl(V_{\mathbb{C}}(n-k+1,1)\bigr) \cong \pi_i\bigl(V_{\mathbb{C}}(n-k+2,2)\bigr) \cong \ldots$ Следовательно, $\pi_{2(n-k)+1}\bigl(V_{\mathbb{C}}(n,k)\bigr) \cong \pi_{2(n-k)+1}\bigl(V_{\mathbb{C}}(n-k+1,1)\bigr) = \pi_{2(n-k)+1}(S^{2(n-k)+1}) = \mathbb{Z}$. $\square$

Каноническая ориентация пространства $\mathbb{C}^n$ позволяет установить канонический изоморфизм $\pi_{2(n-k)+1}\big(V_{\mathbb{C}}(n,k)\big) \cong \mathbb{Z}$. Поэтому вместо когомологий с локальными коэффициентами мы получаем обычные когомологии с коэффициентами $\mathbb{Z}$. *Характеристический класс Чженя*[1] $c_{i+1}(\omega)$ определяется как препятствие к продолжению $n-i$ линейно независимых сечений расслоения ω на $(2i+2)$-мерный остов; это препятствие лежит в группе $H^{2i+2}\left(B; \{\pi_{2i+1}(V_{\mathbb{C}}(n,n-i)\}\right) = H^{2i+2}(B;\mathbb{Z})$.

Непосредственно из определений видны следующие свойства классов Чженя.

- Если $\dim_{\mathbb{C}} \omega = n$, то $c_n(\omega) = e(\omega_{\mathbb{R}})$, т.е. старший класс Чженя совпадает с эйлеровым классом овеществления расслоения ω.
- Гомоморфизм $H^i(B;\mathbb{Z}) \to H^i(B;\mathbb{Z}_2)$ отображает полный класс Чженя $c(\omega)$ в полный класс Штифеля–Уитни $w(\omega_{\mathbb{R}})$. В частности, $w_{2j+1}(\omega_{\mathbb{R}}) = 0$ для всех j.

Точно так же, как и для классов Штифеля–Уитни, доказываются следующие утверждения.

- Классы Чженя обладают свойством естественности.
- Классы Чженя стабильно эквивалентных расслоений одинаковы.

Пусть γ_n^1 — расслоение над $\mathbb{C}P^n$, для которого пространство расслоения состоит из пар $(x \in \mathbb{C}P^n,\ v = \lambda x)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$.

Теорема 3.2.23. *$c_1(\gamma_n^1) = \alpha$, где α — образующая группы $H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$.*

Доказательство. Вычислим сначала $c_1(\gamma_1^1)$. Для этого опишем более подробно строение расслоения γ_1^1. Представим $\mathbb{C}P^1 = \{(z_1 : z_2)\}$ в виде объединения множеств U_1 и U_2, заданных неравенствами $|z_1| \leqslant |z_2|$ и $|z_1| \geqslant |z_2|$. В качестве координат на U_1 и U_2 можно взять $w_1 = z_1/z_2$ и $w_2 = z_2/z_1$. Слой расслоения γ_1^1 над точкой $(z_1 : z_2)$ состоит из векторов $(\lambda z_1 : \lambda z_2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Ограничение расслоения γ_1^1 на U_1 и U_2 тривиальны; тривиализации имеют вид $(\lambda w_1, \lambda)$ и $(\mu, \mu w_2)$. Слои над точками w_1 и $w_2 = w_1^{-1}$ отождествляются следующим образом: $(\lambda w_1, \lambda) = (\mu, \mu w_2)$, т.е. $\mu = \lambda w_1$. Сечение $\lambda = 1$ над окружностью $|w_1| = 1$ переходит в сечение, которое над точкой $w_2 = w_1^{-1}$ задаётся формулой $\mu = w_1$. Получаем отображение $S^1 \to S^1$ степени -1. Значит, при продолжении этого сечения внутрь U_2 получится сечение с одним невырожденным нулём. Из этого следует, что $c_1(\gamma_1^1) = e\big((\gamma_1^1)_{\mathbb{R}}\big)$ — образующая группы $H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

[1] Эту фамилию часто пишут по-другому: Черн.

Пусть $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^n$ — естественное включение. Непосредственно из определения видно, что $i^*(\gamma_n^1) \cong \gamma_1^1$, поэтому $i^*c_1(\gamma_n^1) = c_1(\gamma_1^1)$. Ясно, что включение i индуцирует изоморфизм $i^* : H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z})$. Поэтому $c_1(\gamma_n^1)$ — образующая группы $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$. □

Замечание. Из того, что степень рассматриваемого отображения $S^1 \to S^1$ равна -1, следует, что $c_1(\gamma_n^1)$ — не та образующая группы $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$, которая на $\mathbb{C}P^1$ с канонической ориентацией принимает значение $+1$, а та, которая принимает значение -1.

Теорема 3.2.24. *Пусть ω и φ — комплексные векторные расслоения над симплициальными комплексами X и Y. Тогда $c_k(\omega \times \varphi) = \sum_{i+j=k} c_i(\omega) \times c_j(\varphi)$.*

Доказательство. Рассуждения во многом похожи на доказательство обобщённой формулы Уитни (формула (3.3) на с. 165), но есть и существенные отличия. Снова рассмотрим вложения i_X и j_Y. Расслоение $\omega|_{X^i}$ имеет $\dim \omega - [i/2]$ линейно независимых сечений, поэтому оно стабильно эквивалентно расслоению ω_0 размерности $[i/2]$. Если вместо теоремы 3.2.7 мы воспользуемся теоремой 3.2.8, то получим, что элемент $c_k(\omega \times \varphi) - \sum_{\alpha+\beta=k} c_\alpha(\omega) \times c_\beta(\varphi)$ лежит в ядре гомоморфизма $(i_X \times j_Y)^*$ для всех пар i, j, для которых $[i/2] + [j/2] = k$. Мы хотим доказать, что этот элемент равен нулю. Отметим, что если $i + j = 2k + 1$, то $[i/2] + [j/2] = k$. Действительно, $i = 2i'$ и $j = 2j' + 1$ (или наоборот), поэтому $[i/2] + [j/2] = i' + j' = (i + j - 1)/2 = k$. Покажем, что прямая сумма отображений $(i_X \times j_Y)^*$ для всех пар i, j, сумма которых равна $2k + 1$, является мономорфизмом.

Для коэффициентов $\mathbb{Z}$ согласно теореме Кюннета группа $H^{2k}(X \times Y)$ является прямой суммой групп $\bigoplus_{\alpha+\beta=2k} H^\alpha(X) \otimes H^\beta(Y)$ и $\bigoplus_{\alpha+\beta=2k+1} \operatorname{Tor}\bigl(H^\alpha(X), H^\beta(Y)\bigr)$. Аналогично группа $H^{2k}(X^i \times Y^j)$ является прямой суммой групп

$$\bigoplus_{\alpha+\beta=2k} H^\alpha(X^i) \otimes H^\beta(Y^j) \cong \bigl(H^i(X^i) \otimes H^{j-1}(Y^j)\bigr) \oplus \bigl(H^{i-1}(X^i) \otimes H^j(Y^j)\bigr)$$

и $\bigoplus_{\alpha+\beta=2k+1} \operatorname{Tor}\bigl(H^\alpha(X^i), H^\beta(Y^j)\bigr) = \operatorname{Tor}\bigl(H^i(X^i), H^j(Y^j)\bigr)$. Оба отображения $H^\alpha(X) \otimes H^\beta(Y)$ в $H^\alpha(X^\alpha) \otimes H^\beta(Y^{\beta+1})$ и в $H^\alpha(X^{\alpha+1}) \otimes H^\beta(Y^\beta)$ являются мономорфизмами. Для слагаемого Tor отображения тоже мономорфизмы. □

Доказанные свойства классов Чженя позволяют воспользоваться той же схемой рассуждений, что и при доказательстве теоремы 3.2.19, и доказать следующее утверждение.

Теорема 3.2.25. *Гомоморфизм* $f^*: H^*(G_{\mathbb{C}}(\infty, k); \mathbb{Z}) \to H^*(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \ldots \times \mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]$. *— изоморфизм на подкольцо симметрических многочленов. При этом* $f^*(c_i(\gamma^k_\infty)) = \sigma_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *где* σ_i *— элементарная симметрическая функция.*

Единственное существенное отличие в доказательстве от вещественного случая состоит в том, что у комплексных многообразий Грассмана все клетки Шуберта имеют чётную размерность, поэтому граничный гомоморфизм нулевой по очевидным причинам и для коэффициентов $\mathbb{Z}$.

Характеристические классы Чженя, как и классы Штифеля–Уитни, можно задавать набором аксиом; переформулировка следствия теоремы 3.2.19 достаточно очевидна.

Формула для выражения класса Чженя $c(\xi^m \otimes \eta^n)$ через классы $c(\xi^m)$ и $c(\eta^n)$ выглядит точно так же, как и соответствующая формула для классов Штифеля–Уитни (теорема 3.2.20). Единственное существенное отличие в доказательстве состоит в том, что теперь нам нужно следующее утверждение.

Лемма. *Если* ω_1^1 *и* ω_2^1 *— 1-мерные комплексные расслоения над одной и той же базой, то* $c_1(\omega_1^1 \otimes \omega_2^1) = c_1(\omega_1^1) + c_1(\omega_2^1)$.

Доказательство. Для 1-мерного расслоения класс c_1 — это препятствие к продолжению ненулевого сечения на 2-мерный остов. Коцикл, представляющий этот класс, на 2-мерной клетке принимает значение, равное сумме индексов особых точек сечения (предполагается, что все особые точки невырожденные). Выберем сечения расслоений ω_1^1 и ω_2^1 в общем положении, т.е. так, чтобы все нули были попарно различны. Тензорное произведение этих сечений имеет нули в тех точках, в которых имеет нули одно из них. Проверим, что знак нуля сечения и тензорного произведения сечений над каждой особой точкой совпадают.

Достаточно рассмотреть случай, когда одно сечение постоянно, а другое задаётся линейным отображением. Пусть сечение расслоения ω_1^1 на базисе задаётся формулой $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12}i \\ a_{21} + a_{22}i \end{pmatrix}$, а на вектор $xe_1 + {} + ye_2$ отображение продолжается по линейности; сечение ω_2^1 постоянно — оно задаётся вектором $\lambda + \mu i$. Тогда сечение расслоения $\omega_1^1 \otimes \omega_2^1$ задаётся формулой

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (a_{11} + a_{12}i) \otimes (\lambda + \mu i) \\ (a_{21} + a_{22}i) \otimes (\lambda + \mu i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} - \mu a_{12} + (\lambda a_{12} + \mu a_{11})i \\ \lambda a_{21} - \mu a_{22} + (\lambda a_{22} + \mu a_{21})i \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы этого отображения равен $(\lambda^2 + \mu^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$. Поэтому особая точка сечения ω_1^1 имеет такой же индекс, как и особая точка сечения $\omega_1^1 \otimes \omega_2^1$. □

Для комплексных расслоений тоже можно доказать классификационные теоремы, аналогичные теоремам 3.2.16 и 3.2.18; нужно только заменить вещественные многообразия Грассмана на комплексные. Для 1-мерных расслоений эти классификационные теоремы можно существенно уточнить, используя то обстоятельство, что пространства $G(\infty, 1) = \mathbb{R}P^\infty$ и $G_\mathbb{C}(\infty, 1) = \mathbb{C}P^\infty$ являются пространствами типа $K(\pi, n)$, а именно, $\mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1)$ и $\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$. Поэтому, воспользовавшись теоремой 3.1.9 (см. с. 140), получим, что если X — конечный симплициальный комплекс, то элементы множеств $[X, \mathbb{R}P^\infty]$ и $[X, \mathbb{C}P^\infty]$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами групп $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ и $H^2(X; \mathbb{Z})$. С другой стороны, элементы множеств $[X, \mathbb{R}P^\infty]$ и $[X, \mathbb{C}P^\infty]$ находятся во взаимно однозначном соответствии с 1-мерными вещественными или комплексными расслоениями над X, рассматриваемыми с точностью до изоморфизма.

С помощью характеристических классов это соответствие описывается явным образом. А именно, пусть расслоение ξ задаётся отображением $f : X \to \mathbb{R}P^\infty$ или $f : X \to \mathbb{C}P^\infty$. Теорема 3.1.9 сопоставляет отображению f элемент $f^*(F_\pi) \in H^n(X; \pi)$; здесь $n = 1$ и $\pi = \mathbb{Z}_2$ в вещественном случае, $n = 2$ и $\pi = \mathbb{Z}$ в комплексном случае. При этом когомологический класс F_π, как видно из его описания, является образующей группы $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ или $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$. Таким образом, взаимно однозначное соответствие между 1-мерными расслоениями и элементами группы $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ или $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ задаётся формулой $\xi \mapsto w_1(\xi)$ или $\xi \mapsto c_1(\xi)$; при этом сложение когомологических классов соответствует тензорному умножению расслоений. В итоге получаем следующее утверждение.

Теорема 3.2.26. *Пусть X — конечномерный симплициальный комплекс.*

а) 1-мерные вещественные расслоения ξ и η над X изоморфны тогда и только тогда, когда $w_1(\xi) = w_1(\eta)$, причём для каждого элемента $\alpha \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ существует 1-мерное вещественное расслоение ξ над X, для которого $w_1(\xi) = \alpha$.

б) 1-мерные комплексные расслоение ξ и η над X изоморфны тогда и только тогда, когда $c_1(\xi) = c_1(\eta)$, причём для каждого элемента $\alpha \in H^2(X; \mathbb{Z})$ существует 1-мерное комплексное расслоение ξ над X, для которого $c_1(\xi) = \alpha$.

1-мерные комплексные расслоения — это то же самое, что ориентированные вещественные 2-мерные расслоения с фиксированной римановой метрикой. Действительно, чтобы задать комплексную структуру на плоскости $\mathbb{R}^2$, нужно задать умножение на i, т.е. поворот на 90°. Ясно также, что эйлеров класс ориентированного 2-мерного вещественного расслоения совпадает с первым классом Чженя соответствующего 1-мерного комплексного расслоения. Напомним, что при изменении ориентации расслоения его эйлеров класс меняет знак. Из теоремы 3.2.26 б) вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.2.27. *Ориентированные 2-мерные вещественные расслоения ξ и η над конечным симплициальным комплексом X изоморфны тогда и только тогда, когда $e(\xi) = e(\eta)$, причём для любого элемента $\alpha \in H^2(X; \mathbb{Z})$ существует ориентированное 2-мерное вещественное расслоение ξ, для которого $e(\xi) = \alpha$.*

3.2.9. Расщепляющие отображения

Пусть ξ — векторное расслоение над базой B. Непрерывное отображение $f : B_1 \to B$ называют *расщепляющим* для расслоения ξ, если $f^*(\xi)$ — прямая сумма 1-мерных расслоений и $f^* : H^*(B) \to H^*(B')$ — мономорфизм. Расщепляющие отображения позволяют сводить доказательства многих утверждений о характеристических классах к их проверке для прямых сумм 1-мерных расслоений. Для доказательства существования расщепляющих отображений нам понадобится следующая конструкция с векторными расслоениями.

Каждому векторному расслоению ξ над базой B можно сопоставить его *проективизацию* $P\xi$, которая является локально тривиальным расслоением над B. Слой расслоения $P\xi$ над точкой $b \in B$ получается следующим образом. Возьмём слой V расслоения ξ и отождествим в $V \setminus \{0\}$ все точки прямой, проходящей через нуль. Таким образом, слой расслоения $P\xi$ — это $\mathbb{R}P^{n-1}$ или $\mathbb{C}P^{n-1}$, где $n = \dim \xi$.

Задача 3.2.20. *Пусть $E(P\gamma_n^k) \to G(n, k)$ — проективизация канонического расслоения γ_n^k над $G(n, k)$, $E(P\bar{\gamma}_n^{k-1}) \to G(n, k-1)$ — проективизация ортогонального дополнения канонического расслоения γ_n^{k-1} над $G(n, k-1)$. Докажите, что $E(P\gamma_n^k) \approx E(P\bar{\gamma}_n^{k-1})$.*

Пусть расслоение $P\xi$ — это отображение $q : E(P\xi) \to B$. Рассмотрим индуцированное векторное расслоение $q^*(\xi)$ над $E(P\xi)$. Точками пространства $E(P\xi)$ служат прямые l, проходящие через нуль. Поэтому в $q^*(\xi)$ есть 1-мерное подрасслоение λ_ξ, для которого пространство расслоения состоит из пар (v, l), где $v \in l$. Если база B компактна, то в расслоении $q^*(\xi)$ можно ввести риманову (в комплексном случае — эрмитову) метрику, поэтому $q^*(\xi) \cong \lambda_\xi \oplus \sigma_\xi$, где σ_ξ — ортогональное дополнение к λ_ξ.

Расслоение λ_ξ, как и любое другое 1-мерное расслоение, получается из канонического расслоения γ^1 над $\mathbb{R}P^\infty$ (или над $\mathbb{C}P^\infty$), т.е. существует отображение $f : E(\xi) \to \mathbb{R}P^\infty$, для которого $f^*(\gamma^1) \cong \lambda_\xi$. Пусть α — образующая группы $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ в вещественном случае и образующая группы $H^1(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ в комплексном случае. Рассмотрим элемент $a_\xi = f^*(\alpha) \in H^*\bigl(E(P\xi)\bigr)$; этот элемент зависит только от расслоения ξ, поскольку если два отображения $E(P\xi) \to \mathbb{R}P^\infty$ индуцируют из γ^1 изоморфные расслоения, то эти отображения гомотопны.

Теорема 3.2.28 (Лере–Хирш). *Пусть ξ — вещественное или комплексное векторное расслоение размерности n над компактной базой $B(\xi)$.*

а) В вещественном случае элементы 1, a_ξ, a_ξ^2, …, a_ξ^{n-1} порождают линейное пространство $\langle 1, a_\xi, \ldots, a_\xi^{n-1}\rangle$ размерности n и при этом

$$H^*\bigl(E(P\xi); \mathbb{Z}_2\bigr) \cong H^*\bigl(B(\xi); \mathbb{Z}_2\bigr) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \langle 1, a_\xi, \ldots, a_\xi^{n-1}\rangle.$$

Здесь пространство $H^*\bigl(B(\xi); \mathbb{Z}_2\bigr)$ можно отождествить с образом отображения $q^* : H^*\bigl(B(\xi); \mathbb{Z}_2\bigr) \to H^*\bigl(E(P\xi); \mathbb{Z}_2\bigr)$ и тогда каждый элемент $\beta \otimes a_\xi^i$ отождествится с $\beta \smile a_\xi^i$.

б) В комплексном случае элементы 1, a_ξ, a_ξ^2, …, a_ξ^{n-1} порождают в $H^*\bigl(E(P\xi); \mathbb{Z}\bigr)$ свободную абелеву группу $\langle 1, a_\xi, \ldots, a_\xi^{n-1}\rangle$ ранга n и при этом

$$H^*\bigl(E(P\xi); \mathbb{Z}\bigr) \cong H^*\bigl(B(\xi); \mathbb{Z}\bigr) \otimes \langle 1, a_\xi, \ldots, a_\xi^{n-1}\rangle.$$

Это разложение тоже согласовано с гомоморфизмом q^*.

Доказательство. Для каждой точки $b \in B$ рассмотрим отображение $i_b : \mathbb{R}P^{n-1} \to E(P\xi)$ — включение слоя в пространство расслоения (в комплексном случае вместо $\mathbb{R}P^{n-1}$ берётся $\mathbb{C}P^{n-1}$). Непосредственно из определений видно, что $i_b^*(\lambda_\xi)$ — это каноническое расслоение γ_{n-1}^1 над $\mathbb{R}P^{n-1}$ или $\mathbb{C}P^{n-1}$. Расслоение $i_b^*\bigl(f^*(\gamma^1)\bigr)$ совпадает с γ_{n-1}^1, поэтому отображение fi_b гомотопно естественному вложению $\mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}P^\infty$ или $\mathbb{C}P^{n-1} \to \mathbb{C}P^\infty$. Из этого следует, что элементы $i_b^*(1)$, …, $i_b^*(a_\xi^{n-1})$ независимы.

Требуемые изоморфизмы доказываются следующим образом. Рассмотрим в B подкомплекс K, над которым расслоение $P\xi$ тривиально.

Например, в качестве K можно взять любой симплекс. Пусть $E_K = q^{-1}(K)$. Тогда имеется гомеоморфизм $K \times F \to E_K$, согласованный с проекцией q. Изоморфизм $H^*(E_K) \cong H^*(K) \otimes H^*(F)$, согласованный с проекцией q, существует в силу теоремы Кюннета. В вещественном случае здесь имеется в виду тензорное произведение векторных пространств над $\mathbb{Z}_2$. В комплексном случае для доказательства нужно воспользоваться тем, что группа $H^*(F) = \langle 1, a_\xi, \ldots, a_\xi^{n-1} \rangle$ свободная.

Изоморфизм групп $H^*(E_K)$ и $H^*(K) \otimes H^*(F)$, согласованный с проекцией, формально можно записать следующим образом. Рассмотрим гомоморфизм φ_K^m, заданный формулой $\sum \beta^k \to \sum q^*(\beta^k) \smile a_\xi^l$, где $\beta^k \in H^k(K)$, а l выбирается так, что $k + l = m$ в вещественном случае и $k + 2l = m$ в комплексном случае. В вещественном случае должны выполняться неравенства $0 \leqslant m - k \leqslant n - 1$, а в комплексном случае должны выполняться неравенства $0 \leqslant m - k \leqslant 2n - 2$ и число $m - k$ должно быть чётным. Рассмотрим группу $\mathcal{H}^m(K)$, которая равна $\bigoplus_{k=1-n+m}^{m} H^k(K)$ в вещественном случае и $\bigoplus_{k=2-2n+m,\, m-k \text{ чётно}}^{m} H^k(K)$ в комплексном случае. Отображение $\varphi_K^m : \mathcal{H}^m(K) \to H^m(E_K)$ является изоморфизмом для всех m.

Группу $\mathcal{H}^m(L)$ и гомоморфизм φ_L^m можно определить для любого подкомплекса $L \subset B$. Требуется доказать, что φ_B^m — изоморфизм для всех m. Для этого мы воспользуемся точной последовательностью Майера–Вьеториса и 5-леммой. Точная последовательность Майера–Вьеториса для групп $\mathcal{H}^*$ имеет место, поскольку прямая сумма точных последовательностей тоже является точной последовательностью. Коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^{m+1}(K \cap L) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{m+1}_{K\cap L}"] & \mathcal{H}^m(K) \oplus \mathcal{H}^m(L) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^m_K \oplus \varphi^m_L"] & \mathcal{H}^m(K \cup L) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^m_{K\cup L}"] & {} \\
H^{m+1}(E_{K\cap L}) \arrow[r] & H^m(E_K) \oplus H^m(E_L) \arrow[r] & H^m(E_{K\cup L}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathcal{H}^m(K \cap L) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^m_{K\cap L}"] & \mathcal{H}^{m-1}(K) \oplus \mathcal{H}^{m-1}(L) \arrow[d, "\varphi^{m-1}_K \oplus \varphi^{m-1}_L"] \\
{} \arrow[r] & H^m(E_{K\cap L}) \arrow[r] & H^{m-1}(E_K) \oplus H^{m-1}(E_L)
\end{tikzcd}$$

показывает, что если φ_K, φ_L и $\varphi_{K\cap L}$ — изоморфизмы, то $\varphi_{K\cup L}$ тоже изоморфизм. Из этого следует требуемое. $\square$

Из теоремы 3.2.28 легко выводится существование расщепляющих отображений.

Теорема 3.2.29. *Для любого векторного расслоения ξ над компактным симплициальным комплексом B существует расщепляющее отображение $f : B_1 \to B$.*

Доказательство. Применим индукцию по $n = \dim\xi$. При $n = 1$ отображение id_B является расщепляющим. Предположим, что для любого векторного расслоения размерности меньше n существует расщепляющее отображение. Согласно теореме 3.2.28 отображение $q^* : H^*(B) \to H^*\bigl(E(P\xi)\bigr)$ — мономорфизм. Кроме того, $q^*(\xi) = \lambda_\xi \oplus \sigma_\xi$, где λ_ξ — 1-мерное расслоение. Согласно предположению индукции для σ_ξ существует расщепляющее отображение $g : B_1 \to E(P\xi)$. Покажем, что отображение $f = qg$ расщепляющее. Действительно, $f^* = g^*q^*$ — мономорфизм, поскольку g^* и q^* мономорфизмы. Кроме того, $f^*(\xi) = g^*(\lambda_\xi) \oplus g^*(\sigma_\xi)$, а по условию $g^*(\sigma_\xi)$ — прямая сумма 1-мерных расслоений. □

В качестве приложения расщепляющих отображений приведём новое доказательство одного доказанного ранее утверждения. А именно, покажем, что из существования расщепляющих отображений следует единственность классов Штифеля–Уитни и Чженя (аксиоматический подход: см. с. 179). Действительно, для 1-мерного расслоения класс Штифеля–Уитни или класс Чженя непосредственно определяется естественностью, условием на $w_1(\gamma^1)$ и универсальностью расслоения γ^1. Пусть $f : B_1 \to B$ — расщепляющее отображение для расслоения ξ. Тогда $f^*(\xi) = \xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_n$, где все расслоения $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 1-мерные. Поэтому класс $f^*\bigl(w(\xi)\bigr) = \prod\bigl(1 + w_1(\xi_i)\bigr)$ определён однозначно. Из мономорфности отображения f^* следует, что класс $w(\xi)$ определён однозначно.

Мы уже обсудили два подхода к характеристическим классам Штифеля–Уитни и Чженя: построение их как препятствий к продолжению сечений и аксиоматический подход. Теорема 3.2.28 предоставляет ещё одну возможность построения этих характеристических классов. Согласно этой теореме элемент a_ξ^n однозначно представляется в виде суммы $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_i(\xi) a_\xi^{n-i}$, где элемент $x_i(\xi)$ лежит в $H^i(B; \mathbb{Z}_2)$ в вещественном случае и в $H^{2i}(B; \mathbb{Z})$ в комплексном случае. Характеристические классы Штифеля–Уитни и Чженя можно строить на основе следующего утверждения.

Теорема 3.2.30. *Положим $x_0(\xi) = 1$ и $x_i(\xi) = 0$ при $i > \dim\xi$. Тогда в вещественном случае $x_i(\xi) = w_i(\xi)$, а в комплексном случае $x_i(\xi) = c_i(\xi)$.*

Теорему 3.2.30 удобно доказывать с помощью сингулярных когомологий, поэтому мы отложим её доказательство до с. 281.

Векторному пространству V над $\mathbb{C}$ можно сопоставить векторное пространство $\bar{V}$ над $\mathbb{C}$, элементами которого служат векторы из V (вектору $v \in V$ соответствует вектор $\bar{v} \in \bar{V}$), а умножение на комплексные числа задаётся формулой $\lambda\bar{v} = \overline{\bar{\lambda}v}$, т.е. умножение на λ заменяется умножением на $\bar{\lambda}$. Такую операцию можно проделать с каждым слоем комплексного векторного расслоения ω. В результате получим расслоение $\bar{\omega}$, которое называют *сопряжённым*.

Пример 3.2.15. *Пусть τ^1 — комплексное касательное расслоение $\mathbb{C}P^1$. Тогда расслоения τ^1 и $\overline{\tau^1}$ не изоморфны.*

Доказательство. Пусть $f : V \to \bar{V}$ — изоморфизм над $\mathbb{C}$. Если $f(v) = \bar{w}$, то $f(\lambda v) = \lambda\bar{w} = \overline{\bar{\lambda}w}$. Это означает, что если мы отождествим соответствующие элементы пространств V и $\bar{V}$, то отображение f должно удовлетворять соотношению $f(\lambda v) = \bar{\lambda} f(v)$. Если $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$, то изоморфизм f изменяет ориентацию пространства $V_{\mathbb{R}}$, поэтому с геометрической точки зрения f — симметрия относительно некоторой прямой; эта прямая однозначно задаёт изоморфизм f.

Овеществление расслоения τ^1 — это касательное расслоение сферы S^2. Поэтому если бы расслоения τ^1 и $\overline{\tau^1}$ были изоморфны, мы получили бы на S^2 непрерывное поле направлений, чего не может быть. □

С сопряжённым расслоением $\bar{\omega}$ тесно связано *двойственное* расслоение $\omega^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\omega, \mathbb{C})$. Если в пространстве V над $\mathbb{C}$ задано эрмитово скалярное произведение, для которого $(\lambda v, \mu w) = \lambda\bar{\mu}(v, w)$, то формула $\bar{v} \mapsto \varphi(x) = (x, v)$ задаёт изоморфизм $\bar{V} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$. Поэтому при наличии в расслоении ω эрмитовой метрики сопряжённое расслоение $\bar{\omega}$ канонически изоморфно двойственному расслоению $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\omega, \mathbb{C})$.

Теорема 3.2.31. *Расслоение $\omega^* \otimes \omega$ имеет ненулевое сечение. В частности, если $\dim_{\mathbb{C}} \omega = 1$, то расслоение $\omega^* \otimes \omega$ тривиально.*

Доказательство. Имеет место канонический изоморфизм $V^* \otimes V \cong \mathrm{Hom}(V, V)$ (см., например, [Пр2] с. 170). В пространстве $\mathrm{Hom}(V, V)$ есть выделенный элемент — тождественное отображение. Поэтому расслоение $\omega^* \otimes \omega$ имеет ненулевое сечение. □

Теорема 3.2.32. $c_k(\bar{\omega}) = (-1)^k c_k(\omega)$.

Доказательство. Если $\dim \omega = 1$, то $c_1(\omega) = e(\omega_{\mathbb{R}})$ и $c_1(\bar{\omega}) = e(\bar{\omega}_{\mathbb{R}})$. Ориентации расслоений $\omega_{\mathbb{R}}$ и $\bar{\omega}_{\mathbb{R}}$ противоположны, поэтому $c_1(\bar{\omega}) = -c_1(\omega)$.

Пусть ω — комплексное векторное расслоение размерности n, f — расщепляющее отображение для ω. Тогда $f^*(\omega) = \omega_1 \oplus \ldots \oplus \omega_n$, поэтому

$$\begin{aligned} f^*\big(c(\bar\omega)\big) &= c\big(f^*(\bar\omega)\big) = c(\bar\omega_1)\ldots c(\bar\omega_n) = \\ &= \big(1 - c_1(\bar\omega_1)\big)\ldots\big(1 - c_1(\bar\omega_n)\big) = \\ &= \sum(-1)^k c_k\big(f^*(\bar\omega)\big) = f^*\left(\sum(-1)^k c_k(\bar\omega)\right). \end{aligned}$$

Учитывая, что f^* — мономорфизм, получаем требуемое. □

Следствие. *Если* $\bar\omega \cong \omega$, *то* $2c_{2k+1}(\omega) = 0$.

Доказательство. Если $\bar\omega \cong \omega$, то $c_{2k+1}(\omega) = c_{2k+1}(\bar\omega) = (-1)^{2k+1}c_{2k+1}(\omega) = -c_{2k+1}(\omega)$. □

Классы Чженя комплексных многообразий определяются как классы Чженя их касательных расслоений.

Пример 3.2.16. $c(\mathbb{C}P^n) = (1+\alpha)^{n+1}$, *где* α — *образующая группы* $H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$, *а именно,* $\alpha = -c_1(\gamma_n^1)$

Доказательство. Слоем расслоения γ_n^1 над точкой $L \in \mathbb{C}P^n$ является прямая L в $\mathbb{C}^{n+1}$. Пусть ω^n — расслоение над $\mathbb{C}P^n$, слоем которого над точкой L является ортогональное дополнение $L^\perp$ к прямой L в $\mathbb{C}^{n+1}$ относительно эрмитова произведения. Покажем, что $\tau_{\mathbb{C}P^n} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_n^1, \omega^n)$. Действительно, касательный вектор к $\mathbb{C}P^n$ задаётся парой (x, v), где $x \in L \setminus \{0\}$ и v — вектор, ортогональный x; при этом пары $(\lambda x, \lambda v)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ задают один и тот же касательный вектор. Поэтому касательный вектор однозначно задаётся линейным отображением $L \to L^\perp$, которое переводит x в v.

Расслоение $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$ тривиально, поскольку оно имеет нулевое сечение, соответствующее тождественному отображению. Пусть θ^k — тривиальное k-мерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$. Тогда $\tau_{\mathbb{C}P^n} \oplus \theta^1 \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_n^1, \omega^n \oplus \gamma_n^1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_n^1, \theta^{n+1})$, поэтому расслоение $\tau_{\mathbb{C}P^n} \oplus \theta^1$ изоморфно прямой сумме $n+1$ экземпляров расслоения $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_n^1, \theta^1) \cong \overline{\gamma_n^1}$. Согласно теореме 3.2.32 $c_1(\overline{\gamma_n^1}) = -c_1(\gamma_n^1)$. Поэтому согласно теоремам 3.2.24 и 3.2.23 $c(\mathbb{C}P^n) = \big(1 - c_1(\gamma_n^1)\big)^{n+1} = (1+\alpha)^{n+1}$. □

Каждому векторному пространству V над $\mathbb{R}$ можно сопоставить его *комплексификацию* $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Как пространство над $\mathbb{R}$ оно канонически изоморфно пространству, состоящему из векторов $v + iw$, где $v, w \in V$. Умножение на i задаётся формулой $i(v + iw) = iv - w$.

Если ξ — вещественное расслоение, то можно комплексифицировать каждый его слой. Полученное расслоение будем обозначать $\xi \otimes \mathbb{C}$.

Лемма. *Расслоение $\xi \otimes \mathbb{C}$ изоморфно сопряжённому расслоению $\overline{\xi \otimes \mathbb{C}}$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение f, заданное формулой $f(v+iw) = v - iw$. Легко проверить, что $f\big(i(v+iw)\big) = -if(v+iw)$. Поэтому отображение f задаёт послойный изоморфизм расслоений $\xi \otimes \mathbb{C}$ и $\overline{\xi \otimes \mathbb{C}}$. □

Следствие. $2c_{2k+1}(\xi \otimes \mathbb{C}) = 0$.

Для каждого вещественного расслоения ξ *характеристические классы Понтрягина* определяются следующим образом: $p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi \otimes \mathbb{C}) \in H^{4k}(B;\mathbb{Z})$. Элементы порядка 2, а именно $c_{2k+1}(\xi \otimes \mathbb{C})$, при этом игнорируются. Классы Понтрягина обладают свойством естественности; классы Понтрягина стабильно эквивалентных расслоений одинаковы. Но формула $p(\xi \oplus \eta) = p(\xi)p(\eta)$ неверна, потому что мы отбросили элементы порядка 2. Верно лишь следующее утверждение.

Теорема 3.2.33. $2\big(p(\xi \oplus \eta) - p(\xi)p(\eta)\big) = 0$.

Доказательство. Расслоение $(\xi \oplus \eta) \otimes \mathbb{C}$ изоморфно $(\xi \otimes \mathbb{C}) \oplus (\eta \otimes \mathbb{C})$. Поэтому

$$c_k\big((\xi \oplus \eta) \otimes \mathbb{C}\big) = \sum_{i+j=k} c_i(\xi \otimes \mathbb{C}) c_j(\eta \otimes \mathbb{C}).$$

Отбрасывая нечётномерные классы Чженя, получим

$$2c_{2k}\big((\xi \oplus \eta) \otimes \mathbb{C}\big) = 2 \sum_{i+j=k} c_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C}) c_{2j}(\eta \otimes \mathbb{C}).$$

Чтобы получить требуемое, умножим обе части на $(-1)^k = (-1)^i(-1)^j$. □

Теорема 3.2.34. *Пусть ω — комплексное n-мерное векторное расслоение, $p_k = p_k(\omega_{\mathbb{R}})$ и $c_k = c_k(\omega)$. Тогда*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k p_k = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k \right) \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

Доказательство. По определению $(-1)^k p_k = c_{2k}(\omega_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C})$. Поэтому достаточно проверить, что $\omega_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \cong \omega \oplus \bar{\omega}$.

Пусть W — комплексное пространство и $V = W_{\mathbb{R}}$. Пространство $V \otimes \mathbb{C}$ канонически изоморфно пространству $V \oplus V$, на котором задана операция $J(x, y) = (-y, x)$, соответствующая умножению на i. В пространстве W задано умножение на i, поэтому можно рассмотреть два отображения $f_{\pm}(x) = (x, \mp ix)$ из V в $V \oplus V$. Легко проверить, что $f_{\pm}(ix) = \pm J\bigl(f_{\pm}(x)\bigr)$, т.е. отображение f_+ комплексно–линейное, а отображение f_- антилинейное. Кроме того, $V \oplus V = \operatorname{Im} f_+ \oplus \operatorname{Im} f_-$, поскольку $(x, y) = f_+\left(\frac{x+iy}{2}\right) + f_-\left(\frac{x-iy}{2}\right)$. Пространство $\operatorname{Im} f_+$ канонически изоморфно W, а пространство $\operatorname{Im} f_-$ канонически изоморфно $\bar{W}$. Такие канонические разложения можно построить для всех слоёв расслоения $\omega_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$. В результате получим требуемый изоморфизм. □

Следствие. *$p(\mathbb{C}P^n) = (1 + \alpha^2)^{n+1}$, где α — образующая группы $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$.*

Доказательство. Пусть τ — касательное расслоение $\mathbb{C}P^n$ как комплексного многообразия, $\tau_{\mathbb{R}}$ — его овеществление, т.е. касательное расслоение $\mathbb{C}P^n$ как вещественного многообразия. Мы уже знаем, что $c(\tau) = (1 + \alpha)^{n+1} = \sum c_k$. Поэтому $\sum (-1)^k c_k = (1 - \alpha)^{n+1}$, а значит, $\sum (-1)^k p_k(\tau_{\mathbb{R}}) = \bigl((1 - \alpha)(1 + \alpha)\bigr)^{n+1} = (1 - \alpha^2)^{n+1}$. А из этого уже следует, что $\sum p_k(\tau_{\mathbb{R}}) = (1 + \alpha^2)^{n+1}$. □

3.3. Действия групп

3.3.1. Симплициальные действия

Топологическое пространство X с фиксированным действием группы G называют *G-пространством*. Отображение $f : X \to Y$ двух G-пространств называют *эквивариантным*, если $f(g(x)) = g(f(x))$ для всех $g \in G$ и всех $x \in X$.

Пусть G — конечная группа, действующая на пространстве $|K|$, где K — симплициальный комплекс. Это действие называют *симплициальным*, если для любого $g \in G$ отображение $g : |K| \to |K|$ симплициально. Симплициальный комплекс K с фиксированным симплициальным действием конечной группы G называют *симплициальным G-комплексом*.

Симплициальное отображение симплициальных комплексов индуцирует симплициальное отображение их барицентрических подразделений. Поэтому барицентрическое подразделение симплициального G-комплекса тоже является симплициальным G-комплексом.

Для симплициального G-комплекса K определим симплициальный комплекс K/G следующим образом. Вершины K/G — это орбиты действия группы G на множестве вершин K, т.е. каждая вершина K/G имеет вид $v^* = G(v)$, где v — вершина K. Вершины $v_0^*, \ldots, v_n^*$ являются вершинами симплекса в K/G тогда и только тогда, когда из орбит $v_0^*, \ldots, v_n^*$ можно выбрать вершины $v_0, \ldots, v_n$, которые являются вершинами симплекса в K. В таком случае будем говорить, что симплекс $[v_0, \ldots, v_n]$ лежит *над* симплексом $[v_0^*, \ldots, v_n^*]$. Отметим, что если из орбит $v_0^*, \ldots, v_n^*$ выбрать другие вершины, то не обязательно получится симплекс.

Сопоставляя вершине v орбиту v^*, получаем симплициальное отображение $K \to K/G$, а значит, и непрерывное отображение $|K| \to |K/G|$. На топологическом пространстве $|K|$ действует группа G: элемент $g \in G$ переводит точку $\sum \lambda_i v_i$ в точку $\sum \lambda_i g v_i$ (мы пользуемся тем, что g переводит симплекс в симплекс). Поэтому можно рассмотреть пространство орбит $|K|/G$. Сопоставим орбите $G(\sum \lambda_i v_i)$ точку $\sum \lambda_i G(v_i) = \sum \lambda_i v_i^*$. В результате получим отображение $|K|/G \to |K/G|$. Это отображение взаимно однозначно тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: если $(v_0, \ldots, v_n)$ и $(g_0 v_0, \ldots, g_n v_n)$ — два симплекса в K, то найдётся такой элемент $g \in G$, что $g v_i = g_i v_i$ для $i = 0, 1, \ldots, n$.

Симплициальный G-комплекс K называют *регулярным*, если для любой подгруппы $H \subset G$ выполняется следующее свойство:

(R) Пусть $h_0, \ldots, h_n \in H$ и $[v_0, \ldots, v_n]$, $[h_0 v_0, \ldots, h_n v_n]$ — два симплекса в K. Тогда найдётся такой элемент $h \in H$, что $h v_i = h_i v_i$ для $i = 0, 1, \ldots, n$.

Теорема 3.3.1. *Второе барицентрическое подразделение любого симплициального G-комплекса является регулярным G-комплексом.*

Доказательство. Будем говорить, что симплициальный G-комплекс обладает свойством (A), если он обладает любым из двух свойств, сформулированных в условии следующей леммы.

Лемма. *Для симплициального G-комплекса K следующие условия эквивалентны:*

1) *для любого элемента $g \in G$ и для любого симплекса Δ из K все точки множества $\Delta \cap g\Delta$ неподвижны относительно действия элемента g;*

2) *если вершины v и gv принадлежат одному симплексу, то $v = gv$.*

Доказательство. Предположим, что выполнено условие (1). Пусть вершины v и gv принадлежат симплексу Δ. Тогда вершины $g^{-1}v$ и v принадлежат симплексу $g^{-1}\Delta$, поэтому они соединены ребром Δ^1 (или совпадают). Ясно, что $v \in \Delta^1 \cap g\Delta^1$, поэтому $gv = v$.

Предположим, что выполнено условие (2). Пусть $v \in \Delta \cap g\Delta$. Тогда вершины v и gv принадлежат одному симплексу Δ, а значит, $v = gv$. □

Шаг 1. *Барицентрическое подразделение K' любого симплициального G-комплекса K обладает свойством (A).*

Каждой вершине v комплекса K' соответствует симплекс $\Delta(v)$ в K, внутренней точкой которого она является. При этом вершины v_1 и v_2 принадлежат одному и тому же симплексу из K' тогда и только тогда, когда один из симплексов $\Delta(v_1)$ и $\Delta(v_2)$ является гранью другого. Кроме того, $\Delta(gv) = g\Delta(v)$; в частности, размерности симплексов $\Delta(v)$ и $\Delta(gv)$ равны. Поэтому если вершины v и gv лежат в K' в одном и том же симплексе, то один из симплексов $\Delta(v)$ и $\Delta(gv)$ является гранью другого и при этом их размерности равны. Следовательно, $\Delta(v) = \Delta(gv)$, а значит, $v = gv$.

Шаг 2. *Если симплициальный G-комплекс K обладает свойством (A), то его барицентрическое подразделение K' обладает свойством (R).*

Применим индукцию по n. Предположим, что $[v_0, \dots, v_n]$ и $[h_0v_0, \dots, h_nv_n]$ — симплексы в K' и свойство (R) выполняется для $(n-1)$-мерных симплексов, $n \geqslant 1$ (для 0-мерных симплексов свойство (R) выполняется всегда). Изменив нумерацию вершин, можно считать, что $\Delta(v_0) \subset \Delta(v_1) \subset \ldots \subset \Delta(v_n)$, т.е. v_0 — вершина симплекса из K, v_1 — середина ребра и т.д. Согласно предположению индукции найдётся такой элемент $h \in H$, что $hv_i = h_iv_i$ при $i = 0, 1, \dots, n-1$. Покажем, что $h_nv_i = h_iv_i$ при всех i. При $i = n$ равенство очевидно, поэтому его нужно проверить для $i = 0, 1, \dots, n-1$. Под действием элемента h^{-1} симплекс $(h_0v_0, \dots, h_nv_n)$ переходит в симплекс $(v_0, \dots, v_{n-1}, h^{-1}h_nv_n)$. При этом

$$\Delta(v_0) \subset \Delta(v_1) \subset \ldots \subset \Delta(v_{n-1}) \subset \Delta(h^{-1}h_nv_n) = h^{-1}h_n\Delta(v_n).$$

Следовательно, $\Delta(v_{n-1}) \subset \Delta(v_n) \cap h^{-1}h_n\Delta(v_n)$. Согласно свойству (A) все точки $(n-1)$-мерного симплекса $\Delta(v_{n-1})$ неподвижны относительно действия элемента $h^{-1}h_n$. Поэтому $h^{-1}h_nv_i = v_i$ при $i = 0, 1, \dots, n-1$. Следовательно, $h_nv_i = hv_i = h_iv_i$, что и требовалось. □

Итак, после измельчения триангуляции K можно отождествить множества $|K|/G$ и $|K/G|$. При таком отождествлении естественные топологии этих множеств совпадают, т.е. отображение $|K|/G \to |K/G|$ — гомеоморфизм. Действительно, симплициальное отображение $K \to K/G$ сюръективно, поэтому множество открыто в $|K/G|$ тогда и только тогда, когда его прообраз открыт в $|K|$. На пространстве орбит $|K|/G$ топология такова: множество открыто в $|K|/G$ тогда и только тогда, когда его прообраз открыт в $|K|$. Остаётся заметить, что композиция отображений $|K| \to |K|/G \to |K/G|$ совпадает с отображением $|K| \to |K/G|$.

3.3.2. Эквивариантная симплициальная аппроксимация

Пусть K — симплициальный G-комплекс. Его барицентрическое подразделение K' обладает следующим свойством:

(I) если Δ' — симплекс в K' и $g(\Delta') = \Delta'$, то ограничение действия элемента g на Δ' — тождественное отображение.

Это — общее свойство симплициальных отображений (часть I, теорема 8.3).

Теорема 3.3.2. *Пусть K и L — симплициальные G-комплексы, причём L обладает свойством (I). Тогда для любого непрерывного отображения $f : |K| \to |L|$ существует эквивариантная симплициальная аппроксимация $\varphi : K^{(n)} \to L$.*

Доказательство. Пусть $\psi : K^{(n)} \to L$ — произвольная симплициальная аппроксимация отображения f. Определим эквивариантное симплициальное отображение $\varphi : K^{(n)} \to L$ следующим образом. Каждой вершине $v \in K^{(n)}$ сопоставим её орбиту $\{g(v) \mid g \in G\}$. Орбиты двух вершин либо совпадают, либо не пересекаются. Выберем в каждой орбите одну вершину v. Для неё положим $\varphi(v) = \psi(v)$, а для всех остальных вершин из той же самой орбиты положим $\varphi(g(v)) = g(\varphi(v)) = g(\psi(v))$. Прежде всего нужно проверить, что это определение корректно, т.е. если $g_1(v) = g_2(v)$, то $g_1(\psi(v)) = g_2(\psi(v))$. Эквивалентное условие таково: если $g(v) = v$, то $g(\psi(v)) = \psi(v)$; здесь $g = g_1^{-1}g_2$. Для доказательства воспользуемся свойством (I). Пусть Δ — симплекс в L, внутренней точкой которого является точка $f(v)$. Точка $g(f(v)) = f(g(v)) = f(v)$ тоже является внутренней точкой Δ, поэтому $g(\Delta) = \Delta$. В таком случае согласно свойству (I) $g|_\Delta = \mathrm{id}_\Delta$. Но ψ — симплициальная аппроксимация отображения f, поэтому $\psi(v) \in \Delta$, а значит, $g(\psi(v)) = \psi(v)$.

Остаётся проверить, что φ — симплициальная аппроксимация отображения f, т.е. $f(\operatorname{st} v) \subset \operatorname{st} \varphi(v)$ для любой вершины $v \in K^{(n)}$. Если v — выбранная точка для данной орбиты, то $\varphi(v) = \psi(v)$ и $f(\operatorname{st} v) \subset \operatorname{st} \varphi(v)$, поскольку ψ — симплициальная аппроксимация отображения f. Для любого элемента $g \in G$ симплициальное отображение g взаимно однозначно, поэтому $\operatorname{st} g(v) = g(\operatorname{st} v)$, где v — вершина $K^{(n)}$ или L. Таким образом, если $f(\operatorname{st} v) \subset \operatorname{st} \varphi(v)$, то $f(\operatorname{st} g(v)) = f(g(\operatorname{st} v)) = g(f(\operatorname{st} v)) \subset g(\operatorname{st} \varphi(v)) = \operatorname{st}(g\varphi(v)) = \operatorname{st} \varphi(g(v))$. □

Замечание. Построенное отображение φ эквивариантно гомотопно f, т.е. гомотопно в классе эквивариантных отображений. Гомотопия строится обычным образом (точки $\varphi(x)$ и $f(x)$ лежат в одном и том же симплексе, поэтому их можно соединить отрезком).

3.3.3. Неподвижные точки и неподвижные симплексы

Для G-пространства X положим $X^G = \{x \in X \mid gx = x \quad \forall g \in G\}$, т.е. X^G — множество неподвижных точек относительно действия группы G. Для симплициального G-комплекса K обозначим K^G подкомплекс в K, состоящий из симплексов, поточечно неподвижных относительно действия G. Ясно, что $K^G \subset |K^G|$. Точка x принадлежит множеству $|K^G| \setminus K^G$ тогда и только тогда, когда она лежит внутри симплекса $\Delta = [v_0, \ldots, v_n]$, $gx = x$ для всех $g \in G$, но $gv_i \neq v_i$ для некоторого i и некоторого $g \in G$. Если внутренняя точка симплекса Δ неподвижна относительно действия g, то $g\Delta = \Delta$. В частности, если симплициальный G-комплекс K обладает свойством (A), то $K^G = |K^G|$. Напомним, что свойством (A) обладает барицентрическое подразделение любого симплициального G-комплекса. Поэтому после измельчения разбиения всегда можно считать, что $K^G = |K^G|$.

Теорема 3.3.3. *Пусть K — симплициальный $\mathbb{Z}_n$-комплекс, обладающий свойством (A), g — образующая группы $\mathbb{Z}_n$. Тогда $\chi(K^G) = \Lambda(g)$, где $\Lambda(g)$ — число Лефшеца отображения $g\colon |K| \to |K|$.*

Доказательство. [We3] Представим $C_k(K; \mathbb{R})$ в виде $V_k \oplus W_k$, где $V_k = C_k(K^G; \mathbb{R})$, а базисом пространства W_k служат симплексы, не принадлежащие K^G. По определению $\chi(K^G) = \sum (-1)^k \dim V_k$ и $\Lambda(g) = \sum (-1)^k \operatorname{tr} g_k$, где отображение $g_k : C_k(K; \mathbb{R}) \to C_k(K; \mathbb{R})$ индуцировано действием элемента g на k-мерных симплексах. Из свойства (A) следует, что если $g\Delta = \Delta$, то $\Delta \subset K^G$. Поэтому если записать матрицу отображения g_k относительно естественного базиса пространства

$V_k \oplus W_k$, то первые $\dim V_k$ диагональных элементов этой матрицы будут равны 1, а все остальные диагональные элементы будут равны 0. Следовательно, $\operatorname{tr} g_k = \dim V_k$. □

Действие группы G на пространстве X называют *эффективным*, если для любого элемента $g \in G$, отличного от единичного элемента, найдётся точка $x \in X$, для которой $gx \neq x$.

Теорема 3.3.4 (Минковский). *Пусть M — триангулированная сфера с n ручками, $n \geqslant 2$, на которой эффективно (и симплициально) действует конечная группа G, причём выполняется свойство (A). Тогда для любого элемента $g \in G$, отличного от единичного элемента, отображение $g_* : H_1(M; \mathbb{R}) \to H_1(M; \mathbb{R})$ не тождественно.*

Доказательство. [We3] Покажем, что множество точек M, неподвижных относительно действия подгруппы $\mathbb{Z}_n \subset G$, порождённой элементом g, представляет собой объединение нескольких изолированных точек и непересекающихся окружностей. Во-первых, эффективное действие на M не может иметь неподвижных 2-мерных симплексов, потому что 2-мерные симплексы, имеющие общее ребро с неподвижным симплексом, тоже должны быть неподвижными (свободная вершина может перейти только сама в себя). Во-вторых, если v — неподвижная вершина, то либо она — изолированная неподвижная точке, либо из неё выходят ровно два неподвижных ребра. Действительно, пусть v_1, …, v_m — вершины, соседние с v, занумерованные по порядку (например, по часовой стрелке). Предположим, что $gv_1 = v_k$. Тогда $gv_2 = v_{k+1}$ или $gv_2 = v_{k-1}$. В первом случае $gv_i = v_{k-1+i}$, а во втором случае $gv_i = v_{k+1-i}$. В первом случае внутри многоугольника $v_1 \dots v_m$ неподвижна только точка v, а во втором случае есть два неподвижных отрезка, соединяющих v либо с некоторой вершиной v_j, либо с серединой некоторого ребра $v_j v_{j+1}$. Свойство (A) исключает второй вариант.

Предположим, что отображение g_* тождественное. Тогда $\Lambda(g) = \chi(M) = 2 - 2n < 0$, поскольку $n > 1$. С другой стороны, согласно теореме 3.3.3 $\Lambda(g) = \chi(M^{\mathbb{Z}_n})$, а $\chi(M^{\mathbb{Z}_n}) \geqslant 0$, поскольку $M^{\mathbb{Z}_n}$ состоит из нескольких изолированных точек и попарно непересекающихся окружностей. □

3.3.4. Трансфер

Пусть G — конечная группа, K — регулярный симплициальный G-комплекс, $C_*(K)$ — симплициальный цепной комплекс. Зададим на

$C_*(K)$ действие группы G, положив $g[v_0, \dots, v_n] = [gv_0, \dots, gv_n]$. Рассмотрим гомоморфизм $\sigma : C_*(K) \to C_*(K)$, переводящий цепь c в $\sum_{g\in G} gc$.

Если подкомплекс $L \subset K$ инвариантен относительно действия группы G, то действие группы G можно перенести на $C_*(K, L) = C_*(K)/C_*(L)$. В этом случае гомоморфизм $\sigma : C_*(K, L) \to C_*(K, L)$ определяется аналогично.

Пусть $p : K \to K/G$ — каноническая проекция (она является симплициальным отображением). Отображение p индуцирует цепное отображение $p_\# : C_*(K, L) \to C_*(K/G, L/G)$.

Теорема 3.3.5. *Пусть подкомплекс $L \subset K$ инвариантен относительно действия группы G. Тогда* $\operatorname{Ker} \sigma = \operatorname{Ker} p_\#$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что из условия регулярности следует свойство (A). Предположим, что вершины v и gv принадлежат одному симплексу. Тогда $[v, v]$ и $[v, gv]$ — симплексы в K. Согласно условию регулярности $v = g'v$ и $gv = g'v$ для некоторого элемента $g' \in G$. Таким образом, $v = g'v = gv$, что и требовалось.

Рассмотрим в K/G симплекс Δ^k. Пусть $\Delta^k_1, \dots, \Delta^k_n$ — симплексы из K, лежащие над Δ^k. Из условия регулярности следует, что эти симплексы можно ориентировать согласовано с Δ^k, т.е. так, чтобы проекция $p_i : \Delta^k_i \to \Delta^k$ сохраняла ориентацию. Действительно, из условия регулярности следует свойство (A). Поэтому если $g[v_0, \dots, v_n] = [v_0, \dots, v_n]$, то все точки симплекса $[v_0, \dots, v_n]$ неподвижны относительно действия элемента g; в частности, g сохраняет ориентацию симплекса $[v_0, \dots, v_n]$.

Пусть $c = \sum_{i=1}^n a_i \Delta^k_i$. Тогда $p_\# c = (\sum_{i=1}^n a_i) \Delta^k$ и $\sigma c = \frac{|G|}{n} (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n \Delta^k_i)$; второе равенство следует из того, что $\sum_{g\in G} g\Delta^k_j = \frac{|G|}{n} \sum_{i=1}^n \Delta^k_i$. При вычислении $\operatorname{Ker} \sigma$ и $\operatorname{Ker} p_\#$ нужно разбить каждую цепь на слагаемые вида $\sum_{i=1}^n a_i \Delta^k_i$; цепь лежит в ядре тогда и только тогда, когда каждое её слагаемое такого вида лежит в ядре. Для таких слагаемых условие принадлежности ядрам почти одинаковые: $\frac{|G|}{n}(\sum_{i=1}^n a_i) = 0$ и $\sum_{i=1}^n a_i = 0$; для целочисленных коэффициентов a_i эти условия в точности одинаковые. □

Замечание. Если вместо группы коэффициентов $\mathbb{Z}$ рассматривать произвольную группу коэффициентов A, то теорема 3.3.5 остаётся верной в том случае, когда в A нет элемента a, для которого $|G|a = 0$.

Отображение $p_\# : C_*(K, L) \to C_*(K/G, L/G)$ эпиморфно, поэтому $C_*(K/G, L/G) \cong C_*(K, L)/\operatorname{Ker} p_\# = C_*(K, L)/\operatorname{Ker} \sigma \cong \sigma C_*(K, L)$, т.е. мы получаем канонический цепной изоморфизм

$\mu : C_*(K/G, L/G) \to C_*(K, L)$. Композиция этого гомоморфизма и включения $\sigma C_*(K, L) \subset C_*(K, L)$ индуцирует гомоморфизм $\mu_* : H_*(K/G, L/G) \to H_*(K, L)$, называемый *трансфером*. Ясно также, что отображение p индуцирует гомоморфизм $p_* : H_*(K, L) \to H_*(K/G, L/G)$. Выясним, как устроены композиции гомоморфизмов $p_*\mu_*$ и μ_*p_*.

Непосредственно из определения видно, что $\mu p_\# c = \sigma c$, поэтому $\mu_* p_* = \sum_{g\in G} g_*$, где отображение $g_* : H_*(K, L) \to H_*(K, L)$ индуцировано действием элемента g. Кроме того, любой элемент $\tilde{c} \in C_*(K/G, L/G)$ можно представить в виде $\tilde{c} = p_\# c$, где $c \in C_*(K, L)$. Поэтому $\mu\tilde{c} = \mu p_\# c = \sigma c$, а значит, $p_\# \mu \tilde{c} = p_\# \sigma c = |G| p_\# c = |G|\tilde{c}$. Таким образом, $p_*\mu_*$ — умножение на $|G|$.

Любая цепь $\sigma c = \sum_{g\in G} gc$ инвариантна относительно действия группы G. Поэтому $\operatorname{Im}\mu \subset C_*(K, L)^G$ и $\operatorname{Im}\mu_* \subset H_*(K, L)^G$. Ясно, что ограничение отображения $\mu_* p_*$ на $H_*(K, L)^G$ представляет собой сумму $|G|$ тождественных отображений, т.е. тоже является умножением на $|G|$. Воспользовавшись замечанием после теоремы 3.3.5, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.3.6. *Пусть F — поле, характеристика которого взаимно проста с $|G|$ или равна нулю. Тогда отображения $p_* : H_*(K, L; F)^G \to H_*(K/G, L/G; F)$ и $\mu_* : H_*(K/G, L/G; F) \to H_*(K, L; F)^G$ — изоморфизмы. Кроме того, ядро гомоморфизма $p_* : H_*(K, L; F) \to H_*(K/G, L/G; F)$ совпадает с ядром отображения σ_*.*

Рассмотрим в качестве примера линзу $L(p, q)$. В этом случае $K = S^3$ — регулярный G-комплекс, где $G = \mathbb{Z}_p$, $L(p, q) = K/G$. Из формулы универсальных коэффициентов легко выводится, что если p' — простое число, то при $k = 1$ и 2

$$H_k\big(L(p, q); \mathbb{Z}_{p'}\big) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{p'}, & \text{если } p \text{ делится на } p'; \\ 0, & \text{если } p \text{ не делится на } p'. \end{cases}$$

Таким образом, если $p = |G|$ делится на p', то группы $H_k\big(L(p, q); \mathbb{Z}_{p'}\big)$ и $H_k(S^3; \mathbb{Z}_{p'})^G = 0$ не изоморфны.

Теорема 3.3.6 естественным образом переносится и на группы когомологий.

3.3.5. Теория Смита

Здесь мы будем рассматривать случай, когда $G = \mathbb{Z}_p$, причём p — простое число. Гомологии и когомологии тоже будем рассматривать только с коэффициентами $\mathbb{Z}_p$.

Пусть K — регулярный G-комплекс, L — инвариантный подкомплекс. Цепи из $C_*(K, L; \mathbb{Z}_p)$ можно умножать на элементы *группового кольца* $\mathbb{Z}_p G$, состоящего из формальных сумм $\sum a_i g_i$, где $a_i \in \mathbb{Z}_p$ и $g_i \in G = \mathbb{Z}_p$. Пусть g — фиксированная образующая группы G (т.е. любой ненулевой элемент). Для группы G мы будем использовать мультипликативные обозначения, т.е. будем считать, что G состоит из элементов $\{1, g, \ldots, g^{p-1}\}$. Рассмотрим в групповом кольце $\mathbb{Z}_p G$ элементы $\sigma = 1 + g + \ldots + g^{p-1}$ и $\tau = 1 - g$. Из равенства $g^p = 1$ следует, что $\sigma\tau = 0$.

Проверим теперь, что $\tau^{p-1} = \sigma$, т.е. $(-1)^k \binom{p-1}{k} \equiv 1 \pmod p$. В самом деле, $(1-p)(2-p)\ldots(k-p) \equiv 1 \cdot 2 \ldots k \pmod p$, поэтому

$$\frac{1 \cdot 2 \ldots (p-k-1) \cdot (-1)^k (p-k) \ldots (p-1)}{1 \cdot 2 \ldots (p-k-1) \cdot 1 \cdot 2 \ldots k} \equiv 1 \pmod p.$$

Для $\rho = \tau^k$ введём обозначение $\bar\rho = \tau^{p-k}$. В частности, $\tau = \bar\sigma$ и $\sigma = \bar\tau$. Для каждого $\rho = \tau^k$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$, рассмотрим цепной подкомплекс $\rho C_*(K, L; \mathbb{Z}_p) \subset C_*(K, L; \mathbb{Z}_p)$. В дальнейших обозначениях группу коэффициентов $\mathbb{Z}_p$ будем опускать.

Теорема 3.3.7. *Для любого $\rho = \tau^k$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$, последовательность цепных комплексов*

$$0 \to \bar\rho C_*(K, L) \oplus C_*(K^G, L^G) \xrightarrow{i} C_*(K, L) \xrightarrow{\rho\times} \rho C_*(K, L) \to 0$$

точна. (Здесь i — сумма естественных включений, $\rho\times$ — умножение на ρ.)

Доказательство. Прежде всего отметим, что включение $C_*(K^G, L^G) \to C_*(K, L)$ определено корректно, поскольку $L^G = L \cap K^G$.

Нас интересуют только симплексы из $K \setminus L$. Предположим, что $\Delta \subset K^G$. Тогда $\tau\Delta = 0$, поэтому $\rho\Delta = 0$ и $\bar\rho\Delta = 0$. Это, в частности, означает, что отображение i переводит $\bar\rho C_*(K, L) \oplus 0$ и $0 \oplus C_*(K^G, L^G)$ в подпространства, которые пересекаются только по нулю. Кроме того, отображение $\rho\times$ переводит подпространство $C_*(K^G, L^G) \subset C_*(K, L)$ в нуль. Поэтому достаточно проверить точность для цепей вида $\sum a_i g^i \Delta$, где $\Delta \not\subset K^G$. При фиксированном Δ цепь такого вида однозначно задаётся элементом $\sum a_i g^i \in \Lambda$, где $\Lambda = \mathbb{Z}_p G$ — групповое кольцо. Поэтому остаётся проверить точность последовательности

$$0 \to \bar\rho\Lambda \xrightarrow{i} \Lambda \xrightarrow{\rho\times} \rho\Lambda \to 0.$$

Ясно, что i — мономорфизм, а $\rho\times$ — эпиморфизм. Поэтому нужно лишь проверить, что $\dim(\rho\Lambda)+\dim(\bar\rho\Lambda)=\dim\Lambda=p$ (имеется в виду размерность над полем $\mathbb{Z}_p$). Напомним, что $\rho=\tau^k$, где $1\leqslant k\leqslant p-1$, и $\bar\rho = \tau^{p-k}$. Покажем, что $\dim(\tau^k\Lambda)=p-k$. Ядро отображения τ состоит из элементов $\sum a_i g^i$, для которых $\sum a_i g^i=\sum a_i g^{i+1}$. Это означает, что $a_i=a_{i+1}=\ldots$, т.е. ядро порождено одним элементом $\sigma=1+g+\ldots+g^{p-1}$. Поэтому $\dim(\tau\Lambda)=p-1$. Кроме того, $\sigma=\tau^{p-1}=\tau^k\tau^{p-k-1}$, поэтому $\operatorname{Ker}\tau=\langle\sigma\rangle\subset\tau\Lambda$. Следовательно, $\dim(\tau^{k+1}\Lambda)=\dim\tau(\tau^k\Lambda)=\dim(\tau^k\Lambda)-1$. □

Группы гомологий $H_*^\rho(K,L;\mathbb{Z}_p)=H_*\big(\rho C_*(K,L;\mathbb{Z}_p)\big)$ называют *гомологическими группами Смита*. Короткая точная последовательность из теоремы 3.3.7 индуцирует точную последовательность гомологий

$$\to H_q^{\bar\rho}(K,L)\oplus H_q(K^G,L^G)\xrightarrow{i_*}H_q(K,L)\xrightarrow{(\rho\times)_*}H_q^\rho(K,L)\xrightarrow{d_*}$$
$$\xrightarrow{d_*}H_{q-1}^{\bar\rho}(K,L)\oplus H_{q-1}(K^G,L^G)\to$$

Её называют *точной последовательностью Смита*. Обычно точную последовательность Смита используют для $\rho=\sigma$ и для $\rho=\tau$.

Для гомологических групп Смита можно построить ещё один набор точных последовательностей (для каждого $k=1,\ldots,p-2$). Рассуждения, приведённые в конце доказательства теоремы 3.3.7, показывают, что последовательность

$$0\to\sigma\Lambda\xrightarrow{i}\tau^k\Lambda\xrightarrow{\tau\times}\tau^{k+1}\Lambda\to 0. \tag{1}$$

точна. Это следует из того, что $\sigma=\tau^{p-1}$ и $\dim(\tau^k\Lambda)=p-k$. Отметим, что при $k=p-1$ последовательность (1) вырождается: $0\to\sigma\Lambda\to\sigma\Lambda\to 0\to 0$. Из короткой точной последовательности (1) получаем точную последовательность гомологий

$$\to H_q^\sigma(K^G,L^G)\xrightarrow{i_*}H_q^{\tau^k}(K,L)\xrightarrow{(\tau\times)_*}H_q^{\tau^{k+1}}(K,L)\xrightarrow{d_*}H_{q-1}^\sigma(K^G,L^G)\to \tag{2}$$

Пусть K — конечный симплициальный комплекс, L — его подкомплекс. Назовём *эйлеровой характеристикой* пары (K,L) число $\chi(K,L)=\sum(-1)^i\dim H_i(K,L;F)$, где F — некоторое поле. Как и для обычной эйлеровой характеристики, число $\chi(K,L)$ не зависит от выбора поля F.

Теорема 3.3.8. *а) Для любого целого $n\geqslant 0$ выполняется неравенство*

$$\dim H_n^\rho(K,L)+\sum_{i\geqslant n}\dim H_n(K^G,L^G)\leqslant\sum_{i\geqslant n}\dim H_n(K,L).$$

б) $\chi(K^G, L^G) \equiv \chi(K, L) \pmod{p}$.

Доказательство. Пусть $a_i = \dim H_i(K^G, L^G)$, $b_i = \dim H_i(K, L)$, $c_i = \dim H_i^{\rho}(K, L)$ и $\bar{c}_i = \dim H_i^{\bar{\rho}}(K, L)$. Из точной последовательности Смита

$$H_{i+1}^{\rho}(K, L) \to H_i^{\bar{\rho}}(K, L) \oplus H_i(K^G, L^G) \to H_i(K, L)$$

следует неравенство $\bar{c}_i + a_i \leqslant c_{i+1} + b_i$. Если записать последовательность Смита для $\bar{\rho}$, аналогично получим $c_i + a_i \leqslant \bar{c}_{i+1} + b_i$. Рассмотрим последовательность неравенств

$$\begin{array}{rcl} c_n + a_n & \leqslant & \bar{c}_{n+1} + b_n, \\ \bar{c}_{n+1} + a_{n+1} & \leqslant & c_{n+2} + b_{n+1}, \\ c_{n+2} + a_{n+2} & \leqslant & \bar{c}_{n+3} + b_{n+2}, \\ \dots & & \dots \end{array}$$

Мы предполагаем, что симплициальный комплекс K конечный, поэтому эта последовательность неравенств конечная (т.е. неравенства с большими номерами имеют вид $0 \leqslant 0$). Сложив все неравенства, получим требуемое.

б) Точную последовательность пространств $0 \to V_0 \to V_1 \to \dots \to V_n \to 0$ можно представить в виде прямой суммы коротких точных последовательностей $0 \to \dots \to 0 \to V_{i-1}^{\alpha} \to V_i^{\alpha} \to V_{i+1}^{\alpha} \to 0 \dots \to 0$. Для каждой короткой точной последовательности выполняется равенство $\sum (-1)^i \dim V_i^{\alpha} = 0$, поэтому $\sum (-1)^i \dim V_i = 0$. Таким образом, если для пространств A_i, B_i, C_i имеет место точная последовательность $0 \to A_0 \to B_0 \to C_0 \to A_1 \to B_1 \to \dots \to C_n \to 0$, то $\sum (-1)^i \dim A_i + \sum (-1)^i \dim C_i = \sum (-1)^i \dim B_i$. Поэтому из точной последовательности Смита следует, что

$$\chi(\bar{\rho}) + \chi(K^G, L^G) + \chi(\rho) = \chi(K, L), \tag{3}$$

где $\chi(\rho) = \sum (-1)^i \dim H_i^{\rho}(K, L)$.

Аналогично из точной последовательности (2) на с. 204 получаем

$$\chi(\sigma) + \chi(\tau^{k+1}) = \chi(\tau^k), \quad k = 1, \dots, p-2. \tag{4}$$

Сложим равенства (4) для $k = 1, \dots, p-2$. В результате получим $(p-2)\chi(\sigma) + \chi(\tau^{p-1}) = \chi(\tau)$. Но $\sigma = \tau^{p-1}$, поэтому $\chi(\tau) = (p-1)\chi(\sigma)$.

Запишем равенство (3) для $\rho = \tau$:

$$\chi(\sigma) + \chi(\tau) + \chi(K^G, L^G) = \chi(K, L).$$

Таким образом, $\chi(K, L) = p\chi(\sigma) + \chi(K^G, L^G) \equiv \chi(K^G, L^G) \pmod{p}$. $\square$

Теорема 3.3.8 позволяет наложить существенные ограничения на то, какие множества неподвижных точек могут быть для действия группы $\mathbb{Z}_p$ на сферах и дисках. При этом используется только информация о гомологиях, т.е. эти рассуждения можно применить к гомологическим сферам и дискам. Симплициальный комплекс K называют r-мерной *гомологической* $\mathbb{Z}_p$*-сферой*, если $H_i(K;\mathbb{Z}_p) \cong H_i(S^r;\mathbb{Z}_p)$ для всех i. Пару (K, L) называют r-мерным *гомологическим* $\mathbb{Z}_p$*-диском*, если $H_i(K, L;\mathbb{Z}_p) \cong H_i(D^r, S^{r-1};\mathbb{Z}_p)$ для всех i.

Теорема 3.3.9 (Смит [Sm]). *Пусть $G = \mathbb{Z}_p$ (p — простое), K — регулярный G-комплекс, L — его инвариантный подкомплекс.*

а) Если K — n-мерная $\mathbb{Z}_p$-гомологическая сфера, то K^G — r-мерная $\mathbb{Z}_p$-гомологическая сфера, где $-1 \leqslant r \leqslant n$. (Подразумевается, что сфера размерности -1 — пустое множество.) Если $p > 2$, то $r \equiv n \pmod 2$.

б) Если пара (K, L) — n-мерный $\mathbb{Z}_p$-гомологический диск, то (K^G, L^G) — r-мерный $\mathbb{Z}_p$-гомологический диск, где $-1 \leqslant r \leqslant n$. Если $p > 2$, то $r \equiv n \pmod 2$.

Доказательство. [F] а) Применим теорему 3.3.8 в случае $L = \varnothing$. В результате получим $\sum_{i\geqslant 0} \dim H_i(K^G) \leqslant \sum_{i\geqslant 0} \dim H_i(K) = 2$ и $\chi(K^G) \equiv \chi(K) \pmod p$. Мы знаем, что $\chi(K) = 0$ или 2. Поэтому равенство $\sum_{i\geqslant 0} \dim H_i(K^G) = 1$ выполняться не может. Следовательно, $\sum_{i\geqslant 0} \dim H_i(K^G) = 0$ или 2. В первом случае $K^G = \varnothing$, во втором случае K^G — $\mathbb{Z}_p$-гомологическая сфера некоторой неотрицательной размерности r.

Неравенство $r \leqslant n$ следует из того, что $\sum_{i\geqslant n+1} \dim H_i(K^G) \leqslant \sum_{i\geqslant n+1} \dim H_i(K) = 0$.

Если $p > 2$, то из сравнения $\chi(K^G) \equiv \chi(K) \pmod p$, т.е. $(-1)^r + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod p$, следует, что $r \equiv n \pmod 2$.

б) Для гомологических дисков доказательство ещё проще. Достаточно воспользоваться тем, что $\sum_{i\geqslant 0} \dim H_i(K^G, L^G) \leqslant \sum_{i\geqslant 0} \dim H_i(K, L) = 1$ и $\sum_{i\geqslant n+1} \dim H_i(K^G, L^G) \leqslant \sum_{i\geqslant n+1} \dim H_i(K, L) = 0$. □

Действие группы G на топологическом пространстве X называют *свободным*, если $gx \neq x$ для любой точки $x \in X$ и любого элемента $g \in G$, $g \neq e$.

Задача 3.3.1 (Смит). *Докажите, что конечная*[1] *группа не может свободно действовать на $\mathbb{R}^n$.*

[1] Содержащая не только единичный элемент.

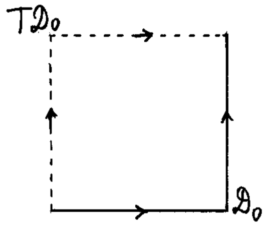

Рис. 3.5. Две диагональные аппроксимации

Упражнение. *Докажите, что если $G = \mathbb{Z}_p$ (p — простое) и K — ациклический регулярный G-комплекс, то K^G — ациклический комплекс. (В частности, $K^G \neq \varnothing$.)*

3.4. Квадраты Стинрода

3.4.1. Построение квадратов Стинрода

Квадраты Стинрода — это дополнительные алгебраические операции на кольце когомологий, обобщающие cup-произведение. Напомним, что cup-произведение можно построить, используя произвольную диагональную аппроксимацию $D_0 : C_*(K) \to C_*(K) \otimes C_*(K)$, переводящую вершину v в $v \otimes v$. Диагональная аппроксимация не единственна. В случае, когда K представляет собой 1-мерный симплекс, две диагональные аппроксимации D_0 и TD_0 изображены на рис. 3.5. Диагональная аппроксимация TD_0 симметрична D_0 относительно диагонали. Формально симметрию относительно диагонали можно определить следующим образом. Рассмотрим на $C_*(K) \otimes C_*(K)$ цепное преобразование T, заданное формулой $T(\sigma^p \otimes \tau^q) = (-1)^{pq}\tau^q \otimes \sigma^p$; знак выбран так, чтобы отображение было цепным. Диагональная аппроксимация TD_0 — это композиция диагональной аппроксимации D_0 и цепного преобразования T.

Диагональное отображение $d : |K| \to |K \times K|$ не клеточное, поэтому $TD_0 \neq D_0$ и имеет смысл рассмотреть разность $D_0 - TD_0$. Оказывается, что отображения D_0 и TD_0 цепно гомотопны, т.е. $D_0 - TD_0 = \partial D_1 + D_1 \partial$ для некоторого гомоморфизма $D_1 : C_*(K) \to C_*(K) \otimes C_*(K)$, повышающего размерность цепи на 1. Более того, эту конструкцию можно продолжить дальше и получить последовательность гомоморфизмов $D_k : C_*(K) \to \big(C_*(K) \otimes C_*(K)\big)_{i+k}$.

Квадраты Стинрода строятся с помощью гомоморфизмов D_k, поэтому займёмся построением этих гомоморфизмов.

Для этой цели используется цепной комплекс W, соответствующий CW-комплексу S^∞, имеющему по две клетки в каждой размерности от 0 до ∞ (k-мерный остов S^∞ — это сфера S^k). Цепное преобразование T можно рассматривать как действие образующей T группы $\mathbb{Z}_2$. Образующая T группы $\mathbb{Z}_2$ действует и на S^∞ как симметрия относительно центра сферы. Поэтому цепной комплекс W в каждой размерности $k \geqslant 0$ имеет две образующие w_k и Tw_k. Образующие можно выбрать так, что $\partial w_1 = w_0 - Tw_0$, $\partial w_2 = w_1 + Tw_1$ и вообще $\partial w_k = w_{k-1} + (-1)^k T w_{k-1}$ (отображение T сохраняет ориентацию клетки при нечётном k и изменяет при чётном k).

Пусть K — произвольный симплициальный комплекс. Зададим действие группы $\mathbb{Z}_2$ на цепном комплексе $W \otimes C_*(K)$ формулой $T(w_k \otimes \sigma) = (Tw_k \otimes \sigma)$. Действие на $C_*(K) \otimes C_*(K)$ уже было определено выше. Цепной комплекс $C_*(K \times K)$ можно отождествить с $C_*(K) \otimes C_*(K)$, если вычислять клеточные гомологии. Для любой клетки (симплекса) σ в K определён цепной подкомплекс $C_*(\sigma \times \sigma)$; соответствующий ему подкомплекс в $C_*(K) \otimes C_*(K)$ будем обозначать точно так же.

Положим $\mathcal{L}(w_k \otimes \sigma) = C_*(\sigma \times \sigma) \subset C_*(K) \otimes C_*(K)$. Подкомплекс $\mathcal{L}(w_k \otimes \sigma)$ ацикличен и $T\mathcal{L}(w_k \otimes \sigma) = \mathcal{L}(w_k \otimes \sigma)$. Эти свойства позволяют построить цепное отображение $\varphi : W \otimes C_*(K) \to C_*(K) \otimes C_*(K)$, которое эквивариантно (т.е. $\varphi T = T\varphi$) и переносится $\mathcal{L}$ в том смысле, что $\varphi(w_k \otimes \sigma) \in \mathcal{L}(w_k \otimes \sigma)$. Отображение φ строится индукцией по $\dim(w_k \otimes \sigma)$. Для вершины v положим $\varphi(w_0 \otimes v) = v \otimes v$. Заметим, далее, что

$$\begin{aligned}
\partial\big(\varphi(w_k \otimes \sigma)\big) &= \varphi\big(\partial(w_k \otimes \sigma)\big) = \varphi(\partial w_k \otimes \sigma \pm w_k \otimes \partial\sigma) = \\
&= \varphi\big((w_{k-1} \pm Tw_{k-1}) \otimes \sigma \pm w_k \otimes \partial\sigma\big) \subset \\
&\subset \mathcal{L}(w_{k-1} \otimes \sigma) + \mathcal{L}(w_k \otimes \partial\sigma) = \\
&= C_*(\sigma \times \sigma) + C_*(\partial\sigma \times \partial\sigma) = C_*(\sigma \times \sigma).
\end{aligned}$$

Цепь $\partial\big(\varphi(w_k \otimes \sigma)\big)$ является циклом и лежит в ацикличном цепном комплексе $C_*(\sigma \times \sigma)$. Поэтому в $C_*(\sigma \times \sigma) = \mathcal{L}(w_k \otimes \partial\sigma)$ есть цепь c, для которой $\partial\big(\varphi(w_k \otimes \sigma)\big) = \partial c$. Положим $\varphi(w_k \otimes \sigma) = c$ и $\varphi(Tw_k \otimes \sigma) = Tc$.

Теперь уже можно построить гомоморфизмы D_k. А именно, положим $D_k(c) = \varphi(w_k \otimes c)$ для $c \in C_*(K)$. Ясно, что D_k увеличивает размерность цепи c на k и D_0 — диагональная аппроксимация.

Теорема 3.4.1. *$D_{k-1} + (-1)^k T D_{k-1} = \partial D_k + (-1)^{k+1} D_k \partial$.*

Доказательство. Отображение φ цепное, поэтому

$$\begin{aligned}\partial D_k(c) &= \partial\big(\varphi(w_k \otimes c)\big) = \varphi\big(\partial(w_k \otimes c)\big) = \\ &= \varphi\big(\partial w_k \otimes c + (-1)^k w_k \otimes \partial c\big).\end{aligned}$$

Учитывая, что $D_k \partial c = \varphi(w_k \otimes \partial c)$, получаем

$$\begin{aligned}\partial D_k(c) + (-1)^{k+1} D_k \partial c &= \varphi(\partial w_k \otimes c) = \\ &= \varphi\big((w_{k-1} + (-1)^k T w_{k-1}) \otimes c\big) = \\ &= D_{k-1}c + (-1)^k T D_{k-1} c,\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Следствие. *$D_0 - TD_0 = \partial D_1 + D_1 \partial$, т.е. D_1 — цепная гомотопия, связывающая D_0 и TD_0.*

Для $k \geqslant 0$ определим $\smile_k$-умножение следующим образом. Коцепь $c^p \smile_k c^q$, где $c^p \in C^p(K)$ и $c^q \in C^q(K)$, принимает на цепи $c \in C_{p+q-k}(K)$ значение

$$\langle c^p \otimes c^q,\, D_k c\rangle = \langle c^p \otimes c^q,\, \varphi(w_k \otimes c)\rangle.$$

Удобно также положить $c^p \smile_{-1} c^q = 0$.

Отметим, что $\smile_k$-умножение зависит от выбора отображения φ. Поэтому нам ещё предстоит проверить, что отображение Sq_k, которое определяется с помощью $\smile_k$, не зависит от φ.

Теорема 3.4.2 (формула кограницы).

$$\begin{aligned}\delta(c^p \smile_k c^q) &= (-1)^k \delta c^p \smile_k c^q + (-1)^{p+k} c^p \smile_k \delta c^q - \\ &\quad -(-1)^k c^p \smile_{k-1} c^q - (-1)^{pq} c^q \smile_{k-1} c^p.\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $c \in C_{p+q-k+1}(K)$. Тогда

$$\langle \delta(c^p \smile_k c^q), c\rangle = \langle c^p \smile_k c^q, \partial c\rangle = \langle c^p \otimes c^q,\, \varphi(w_k \otimes c)\rangle.$$

По определению $\partial(w_k \otimes c) = \partial w_k \otimes c + (-1)^k w_k \otimes \partial c$. Поэтому

$$\begin{aligned}\langle \delta(c^p \smile_k c^q), c\rangle &= (-1)^k \langle c^p \otimes c^q, \varphi\big(\partial(w_k \otimes c)\big)\rangle - (-1)^k \langle c^p \otimes c^q, \varphi(\partial w_k \otimes c)\rangle = \\ &= (-1)^k \langle c^p \otimes c^q, \partial\big(\varphi(w_k \otimes c)\big)\rangle - (-1)^k \langle c^p \otimes c^q, \varphi(w_{k-1} \otimes c)\rangle - \\ &\qquad - (-1)^{2k} \langle c^p \otimes c^q, \varphi(T w_{k-1} \otimes c)\rangle = \\ &= (-1)^k \langle \delta(c^p \otimes c^q), \varphi(w_k \otimes c)\rangle - (-1)^k \langle c^p \otimes c^q, \varphi(w_{k-1} \otimes c)\rangle - \\ &\qquad - \langle c^p \otimes c^q, T\varphi(w_{k-1} \otimes c)\rangle = \\ &= (-1)^k \langle \delta(c^p \otimes c^q), \varphi(w_k \otimes c)\rangle - (-1)^k \langle c^p \otimes c^q, \varphi(w_{k-1} \otimes c)\rangle - \\ &\quad - (-1)^{pq} \langle c^q \otimes c^p, \varphi(w_{k-1} \otimes c)\rangle.\end{aligned}$$

По определению $\delta(c^p \otimes c^q) = (\delta c^p) \otimes c^q + (-1)^p c^p \otimes \delta c^q$. Поэтому первый член полученного выражения равен

$$(-1)^k \langle \delta c^p \otimes c^q), \varphi(w_k \otimes c)\rangle + (-1)^{p+k} \langle c^p \otimes \delta c^q), \varphi(w_k \otimes c)\rangle.$$

Это завершает доказательство. □

Следствие. *Если коцепь $c^p \in C^p(K)$ является коциклом по модулю 2, т.е. $\delta c^p = 2c^{p+1}$, где $c^{p+1} \in C^{p+1}(K)$, то коцепь $c^p \smile_k c^p \in C^{2p-k}(K)$ тоже является коциклом по модулю 2.*

Доказательство. Согласно формуле кограницы

$$\delta(c^p \smile_k c^p) = (-1)^k 2c^{p+1} \smile_k c^p + \\ + (-1)^{p+k} c^p \smile_k 2c^{p+1} - (-1)^k c^p \smile_{k-1} c^p - (-1)^{p^2} c^p \smile_{k-1} c^p.$$

Остаётся заметить, что $(-1)^k + (-1)^{p^2} = \pm 1 \pm 1 \equiv 0 \pmod 2$. □

Таким образом, формула $\mathrm{Sq}_k c^p = c^p \smile_k c^p$ задаёт некоторое отображение $\mathrm{Sq}_k : Z^p(K; \mathbb{Z}_2) \to Z^{2p-k}(K; \mathbb{Z}_2)$. Применив естественную проекцию $Z^{2p-k}(K; \mathbb{Z}_2) \to H^{2p-k}(K; \mathbb{Z}_2)$, получим отображение $\mathrm{Sq}_k : Z^p(K; \mathbb{Z}_2) \to H^{2p-k}(K; \mathbb{Z}_2)$.

Теорема 3.4.3. *Для любого $k \geqslant 0$ отображение $c^p \mapsto \mathrm{Sq}_k c^p$ индуцирует гомоморфизм групп $\mathrm{Sq}_k : H^p(K; \mathbb{Z}_2) \to H^{2p-k}(K; \mathbb{Z}_2)$.*

Доказательство. Проверим сначала, что если $c^p \equiv \delta c \pmod 2$, то $\mathrm{Sq}_k c^p$ — кограница по модулю 2. Действительно, $c^p \smile_k c^p \equiv \delta(c \smile_k \delta c + c \smile_{k-1} c) \pmod 2$, поскольку

$$\delta(c \smile_k \delta c + c \smile_{k-1} c) \equiv \delta c \smile_k \delta c + c \smile_{k-1} \delta c + \delta c \smile_{k-1} c + \\ + \delta c \smile_{k-1} c + c \smile_{k-1} \delta c + c \smile_{k-2} c + c \smile_{k-2} c \equiv \\ \equiv \delta c \smile_k \delta c \equiv c^p \smile_k c^p \pmod 2,$$

Проверим теперь, что отображение Sq_k — гомоморфизм. Ясно, что

$$\mathrm{Sq}_k(c^p + d^p) = \mathrm{Sq}_k c^p + \mathrm{Sq}_k d^p + c^p \smile_k d^p + d^p \smile_k c^p.$$

Кроме того, если $\delta c^p \equiv 0 \pmod 2$ и $\delta d^p \equiv 0 \pmod 2$, то

$$\delta(c^p \smile_{k+1} d^p) \equiv \delta c^p \smile_{k+1} d^p + c^p \smile_{k+1} \delta d^p + c^p \smile_k d^p + d^p \smile_k c^p \equiv \\ \equiv c^p \smile_k d^p + d^p \smile_k c^p \pmod 2.$$

□

Теорема 3.4.4. *Для любого симплициального отображения $f : K \to L$ гомоморфизм $f^* : H^*(L; \mathbb{Z}_2) \to H^*(K; \mathbb{Z}_2)$ коммутирует с Sq_k.*

Доказательство. По определению

$$\begin{aligned}\langle f^*(\mathrm{Sq}_k\, c), c'\rangle &= \langle c\otimes c, \varphi_L\bigl(w_k\otimes f(c')\bigr)\rangle =\\ &= \langle c\otimes c, \varphi_L(1\otimes f)(w_k\otimes c')\rangle,\\ \langle \mathrm{Sq}_k(f^*c), c'\rangle &= \langle f^*c\otimes f^*c, \varphi_K(w_k\otimes c')\rangle =\\ &= \langle c\otimes c, (f\otimes f)\varphi_K(w_k\otimes c')\rangle.\end{aligned}$$

У эквивариантных цепных отображений $\varphi_L(1\otimes f)$ и $(f\otimes f)\varphi_K$ есть общий эквивариантный носитель $\mathcal{L}(w_k\otimes\sigma) = C_*(f\sigma\times f\sigma)$. Этот носитель эквивариантен в том смысле, что $T\mathcal{L}(w_k\otimes\sigma) = \mathcal{L}(w_k\otimes\sigma)$. Из цикличности и эквивариантности носителя посредством стандартной конструкции (см. с. 208 и с. 16) выводится существование цепной гомотопии D, которая связывает отображения $\varphi_L(1\otimes f)$ и $(f\otimes f)\varphi_K$ и обладает свойством $DT = D$ (если $D(w_k\otimes\sigma) = c$, то мы полагаем $D(Tw_k\otimes\sigma) = c$). Таким образом,

$$\begin{aligned}\langle (f^*\,\mathrm{Sq}_k - \mathrm{Sq}_k\, f^*)c, c'\rangle &= \langle c\otimes c, (\partial D + D\partial)(w_k\otimes c')\rangle =\\ &= \langle \delta(c\otimes c), D(w_k\otimes c')\rangle + \langle c\otimes c, D(\partial w_k\otimes c' \pm w_k\otimes\partial c')\rangle.\end{aligned}$$

Если $\delta c \equiv 0 \pmod 2$, то $\delta(c\otimes c)\equiv 0 \pmod 2$. Кроме того,

$$\begin{aligned}D(\partial w_k\otimes c') &= D\bigl((w_{k-1}\pm Tw_{k-1})\otimes c'\bigr) =\\ &= D(w_{k-1}\otimes c') \pm D(w_{k-1}\otimes c') \equiv 0 \pmod 2.\end{aligned}$$

Поэтому $(f^*\,\mathrm{Sq}_k - \mathrm{Sq}_k\, f^*)c \equiv \delta d \pmod 2$, где $\langle d, c''\rangle = \langle c\otimes c, D(w_k\otimes c')\rangle$. □

Следствие. *Операция* Sq_k *не зависит от выбора* φ.

Доказательство. Положим $K = L$ и $f = \mathrm{id}_K$. В таком случае φ_K и φ_L — два варианта выбора φ. Если Sq_k и Sq'_k — две операции, построенные с помощью разных вариантов выбора φ, то $\mathrm{Sq}_k - \mathrm{Sq}'_k = \mathrm{id}^*\,\mathrm{Sq}_k - \mathrm{Sq}'_k\,\mathrm{id}^* = 0$. □

По некоторым причинам более удобно другое обозначение $\mathrm{Sq}^k = \mathrm{Sq}_{p-k}\colon H^p(K;\mathbb{Z}_2)\to H^{p+k}(K;\mathbb{Z}_2)$. Здесь предполагается, что $0\leqslant k\leqslant p$. При $k > p$ операция Sq^k на $H^p(K;\mathbb{Z}_2)$ нулевая.

Непосредственно из определения видно, что для k-мерных когомологий $\mathrm{Sq}^k = \mathrm{Sq}_0$ — когомологическое возведение в квадрат. В связи с этим операции Sq^k, построенные Стинродом ([St2], [St3], [St4]), называют *квадратами Стинрода*.

Квадраты Стинрода можно определить и для относительных когомологий. Пусть $L \subset K$ — симплициальный подкомплекс. Тогда имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to C^*(K,L) \xrightarrow{p^*} C^*(K) \xrightarrow{i^*} C^*(L) \to 0.$$

По построению $\varphi_K(w_k \otimes \sigma) \in C_*(\sigma \times \sigma) \subset C_*(L \times L)$ для всех $\sigma \subset L$. Поэтому можно считать, что $\varphi_L = \varphi_K|_{W \otimes C_*(L)}$. Тогда для любых коцепей $c, c' \in C^*(K)$ имеет место равенство $i^*(c \smile_k c') = i^*c \smile_k i^*c'$. В частности, для любых двух коцепей $c, c' \in C^*(K,L)$ имеет место равенство $i^*(p^*c \smile_k p^*c') = i^*p^*c \smile_k i^*p^*c' = 0$, поскольку $i^*p^* = 0$. Из точности последовательности вытекает, что $p^*c \smile_k p^*c' = p^*d$ для некоторой коцепи $d \in C^*(K,L)$; коцепь d определена однозначно в силу мономорфности отображения p^*. Положим $c \smile_k c' = d$. По определению $p^*(c \smile_k c') = p^*c \smile_k p^*c'$. Для относительного $\smile_k$-умножения легко доказывается формула кограницы. После этого строится отображение $\mathrm{Sq}^k : H^p(K,L;\mathbb{Z}_2) \to H^{p+k}(K,L;\mathbb{Z}_2)$. Непосредственно из определений видно, что $p^* \mathrm{Sq}_k = \mathrm{Sq}_k\, p^*$.

3.4.2. Свойства квадратов Стинрода

Квадраты Стинрода Sq^k, $k \geqslant 0$, обладают многими интересными свойствами. Напомним те свойства квадратов Стинрода, которые мы уже доказали и которыми будем пользоваться.

- Квадраты Стинрода обладают следующим свойством естественности: если $f : (K,L) \to (K_1,L_1)$ — отображение симплициальных пар, то $f^* \mathrm{Sq}^k = \mathrm{Sq}^k f^*$.
- Если $k > p$, то $\mathrm{Sq}^k \alpha = 0$ для всех $\alpha \in H^p(K,L;\mathbb{Z}_2)$.
- $\mathrm{Sq}^k \alpha = \alpha \smile \alpha$ для всех $\alpha \in H^k(K,L;\mathbb{Z}_2)$.

Сформулируем некоторые другие свойства квадратов Стинрода в виде отдельной теоремы; для краткости будем опускать группу коэффициентов $\mathbb{Z}_2$.

Теорема 3.4.5. *а) Операция* Sq^k *коммутирует со связывающим гомоморфизмом* $\delta : H^*(L) \to H^*(K,L)$.

б) Операция Sq^k *коммутирует с изоморфизмом надстройки* $\Sigma^* : \tilde{H}^p(K) \to \tilde{H}^{p+1}(\Sigma K)$.

в) Sq^0 *— тождественное отображение.*

г) Sq^1 *— гомоморфизм Бокштейна для точной последовательности* $0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$.

д) $\mathrm{Sq}^k(\alpha \smile \beta) = \sum_i (\mathrm{Sq}^i\,\alpha) \smile (\mathrm{Sq}^{k-i}\,\beta)$ *(*формула Картана*)*.

Помимо перечисленных свойств квадраты Стинрода обладают ещё одним очень важным свойством — они удовлетворяют так называемым соотношениям Адема. Но доказательство соотношений Адема выходит за рамки этой книги.

Коммутирование с δ

Связывающий гомоморфизм $\delta : H^*(L) \to H^*(K, L)$ устроен следующим образом. Пусть $c^q \in Z^q(L)$ и $[c^q]$ — соответствующий класс когомологий. Гомоморфизм $i^* : C^*(K) \to C^*(L)$ — эпиморфизм, поэтому существует коцепь $\tilde{c}^q \in C^*(K)$, для которой $i^*\tilde{c}^q = c^q$. Но $i^*(\delta\tilde{c}^q) = \delta c^q = 0$, поэтому существует коцепь $d^{q+1} \in C^{q+1}(K, L)$, для которой $\delta\tilde{c}^q = p^*d^{q+1}$. Гомоморфизм $p^* : C^*(K, L) \to C^*(K)$ — мономорфизм, поэтому $\delta d^{q+1} = 0$, поскольку $p^*\delta d^{q+1} = \delta^2\tilde{c}^q = 0$. В качестве класса когомологий $\delta^*[c^q]$ выбирается класс $[d^{q+1}]$.

Требуется доказать, что коциклы $\delta^*\,\mathrm{Sq}^k\,c^q$ и $\mathrm{Sq}^k\,d^{q+1}$ когомологичны. По определению

$$
\begin{aligned}
p^*(\mathrm{Sq}^k\,d^{q+1}) &= \mathrm{Sq}^k(p^*d^{q+1}) = \mathrm{Sq}^k(\delta\tilde{c}^q) = \\
&= \delta\tilde{c}^q \smile_{q+1-k} \delta\tilde{c}^q = \delta(\tilde{c}^q \smile_{q+1-k} \delta\tilde{c}^q + \tilde{c}^q \smile_{q-k} \tilde{c}^q).
\end{aligned}
$$

Кроме того, $i^*(\tilde{c}^q \smile_{q+1-k} \delta\tilde{c}^q + \tilde{c}^q \smile_{q-k} \tilde{c}^q) = c^q \smile_{q-k} c^q$, так как $i^*(\delta\tilde{c}^q) = 0$ и $i^*(\tilde{c}^q) = c^q$. Пусть $d' = \mathrm{Sq}^k\,d^{q+1}$, $c' = c^q \smile_{q-k} c^q$ и $\tilde{c}' = \tilde{c}^q \smile_{q+1-k} \delta\tilde{c}^q + \tilde{c}^q \smile_{q-k} \tilde{c}^q$. Тогда $p^*d' = \delta\tilde{c}'$ и $i^*\tilde{c}' = c'$. Это означает, что $\delta^*[c'] = [d']$. Но $c' = c^q \smile_{q-k} c^q$, поэтому мы получаем требуемое.

Коммутирование с надстройкой

При доказательстве свойства (а) мы не использовали никаких конкретных свойств короткой точной последовательности, по которой строится связывающий гомоморфизм δ^*. Те же самые рассуждения показывают, что операция Sq^k коммутирует со связывающим гомоморфизмом из когомологической последовательности Майера–Вьеториса. Изоморфизм надстройки представляет собой связывающий гомоморфизм из последовательности Майера–Вьеториса для K_0 и K_1, где K_0 и K_1 — конусы над K и $K_0 \cup K_1 = \Sigma K$.

Операции Sq^0 и Sq^1

Пусть $\beta : H^p(K, L; \mathbb{Z}) \to H^{p+1}(K, L; \mathbb{Z})$ — гомоморфизм Бокштейна для короткой точной последовательности $0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$. Для вычисления операций Sq^0 и Sq^1 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. $\beta\,\mathrm{Sq}^k = \begin{cases} 0 & \textit{при } k \textit{ нечётном;} \\ \mathrm{Sq}^{k+1} & \textit{при } k \textit{ чётном.} \end{cases}$

Доказательство. Пусть $c \in H^p(K, L; \mathbb{Z}_2)$, $\tilde{c}$ — целочисленная коцепь, при приведении которой по модулю 2 получается коцикл, представляющий c. По определению $\mathrm{Sq}^k c$ — это класс когомологий коцепи $\tilde{c} \smile_{p-k} \tilde{c}$, приведённой по модулю 2. По условию $\tilde{c} = 2c'$ для некоторой целочисленной коцепи c', поэтому, положив для краткости $q = p - k$, получим $\delta(\tilde{c} \smile_{p-k} \tilde{c}) = (-1)^q 2c' \smile_q \tilde{c} + (-1)^p \tilde{c} \smile_q 2c' - (-1)^q \tilde{c} \smile_{q-1} \tilde{c} - (-1)^p \tilde{c} \smile_{q-1} \tilde{c}$. Значит, класс когомологий $\beta(\mathrm{Sq}^k c)$ задаётся коциклом

$$c' \smile_q \tilde{c} + \tilde{c} \smile_q c' + \varepsilon(\tilde{c} \smile_{q-1} \tilde{c}) \pmod 2,$$

где $\varepsilon = 0$ при $k = q - p$ нечётном и $\varepsilon = 1$ при k чётном. Но $c' \smile_q \tilde{c} + \tilde{c} \smile_q c' \equiv \delta(\tilde{c} \smile_{q+1} c') \pmod 2$, поскольку $\delta\tilde{c} = 2c' \equiv 0 \pmod 2$ и $2\delta c' = \delta^2\tilde{c} = 0$, т.е. $\delta c' = 0$. Таким образом, $\beta(\mathrm{Sq}^k c) = 0$ при нечётном k и $\beta(\mathrm{Sq}^k c) = [\tilde{c} \smile_{q-1} \tilde{c}] = \mathrm{Sq}^{k+1} c$ при чётном k. □

Лемма показывает, что свойство (г) следует из свойства (в), поскольку если $\mathrm{Sq}^0 = \mathrm{id}$, то согласно лемме $\mathrm{Sq}^1 = \beta\,\mathrm{Sq}^0 = \beta$. В свою очередь, свойство (в) тоже доказывается с помощью этой леммы. Точнее говоря, с помощью леммы доказывается, что свойство (в) выполняется для $K = \mathbb{R}P^2$, а уже из этого выводится, что оно выполняется для всех симплициальных пар (K, L).

Пусть α — образующая группы $H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$. Согласно лемме $\beta\,\mathrm{Sq}^0 \alpha = \mathrm{Sq}^1 \alpha = \alpha \smile \alpha \neq 0$, поэтому $\mathrm{Sq}^0 \alpha \neq 0$. Значит, $\mathrm{Sq}^0 \alpha = \alpha$, поскольку в $H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$ есть только один ненулевой элемент.

Естественное вложение $f : \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^2$ индуцирует гомоморфизм $f^* : H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$, при котором α переходит в образующую α' группы $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$. Поэтому в силу свойства естественности $\mathrm{Sq}^0 \alpha' = \mathrm{Sq}(f^*\alpha) = f^*(\mathrm{Sq}^0 \alpha) = f^*\alpha = \alpha'$. Таким образом, свойство (в) выполняется и для $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$. Операция Sq^0 коммутирует с изоморфизмом надстройки, поэтому свойство (в) выполняется ещё и для S^n.

Пусть K — n-мерный симплициальный комплекс. Согласно теореме 3.1.6 любой элемент группы $H^n(K; \mathbb{Z})$ можно реализовать отображением $K \to S^n$. Это верно и для группы $H^n(K;\mathbb{Z}_2)$, поскольку приведение коэффициентов по модулю 2 индуцирует эпиморфизм $H^n(K;\mathbb{Z}) \to H^n(K;\mathbb{Z}_2)$. Обратите внимание, что это верно только для когомологий; для гомологий это неверно. Например, отображение $H_2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}) \to H_2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2)$ заведомо не может быть эпиморфизмом, поскольку $H_2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}) = 0$, а $H_2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2) \neq 0$. Эпиморфность отображения $H^n(K;\mathbb{Z}) \to H^n(K;\mathbb{Z}_2)$ следует из того, что группа $H_n(K)$ для n-мерного симплициального комплекса не имеет кручения. Эпиморфность доказывается следующим образом. Согласно формуле универсальных коэффициентов группа $H^n(K;G)$ является прямой суммой групп $\mathrm{Hom}\big(H_n(K),G\big)$ и $\mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(K),G\big)$. Отображение $\mathrm{Hom}\big(H_n(K),\mathbb{Z}\big) \to \mathrm{Hom}\big(H_n(K),\mathbb{Z}_2\big)$ — эпиморфизм, потому что группа $H_n(K)$ не имеет кручения, а отображение $\mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(K),\mathbb{Z}\big) \to \mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(K),\mathbb{Z}_2\big)$ эпиморфно в любом случае (здесь нужно воспользоваться вычислением группы $\mathrm{Ext}(A,B)$ для циклических групп A и B). Выполнение свойства (в) для K вытекает теперь из естественности операции Sq^0.

Если K — бесконечномерный симплициальный комплекс, то естественное включение $K^n \to K$ индуцирует мономорфизм $H^n(K;\mathbb{Z}_2) \to H^n(K^n;\mathbb{Z}_2)$. Поэтому из естественности операции Sq^0 вытекает выполнение свойства (в) для любого K.

Обратимся теперь к относительным группам когомологий $H^n(K,L;\mathbb{Z}_2)$. Пусть CL — конус над L. Тогда имеют место изоморфизмы $H^n(K,L) \cong H^n(K \cup CL, CL) \cong \tilde{H}^n(K \cup CL)$. Первый изоморфизм очевиден на уровне (ко)цепей, а второй изоморфизм вытекает из точной последовательности пары, поскольку CL — стягиваемое пространство. Оба эти изоморфизма коммутируют с Sq^0, поэтому свойство (в) выполняется и для любой пары симплициальных комплексов (K,L).

Формула Картана

Достаточно доказать, что $\mathrm{Sq}^k(\alpha \times \beta) = \sum_i \mathrm{Sq}^i \alpha \times \mathrm{Sq}^{k-i} \beta$. Действительно, $\alpha \smile \beta = d^*(\alpha \times \beta)$, где $d : |K| \to |K \times K|$ — диагональное отображение. Поэтому $\mathrm{Sq}^k d^*(\alpha \times \beta) = d^* \mathrm{Sq}^k(\alpha \times \beta) = d^* \sum_i \mathrm{Sq}^i \alpha \times \mathrm{Sq}^{k-i} \beta = \sum_i \mathrm{Sq}^i \alpha \smile \mathrm{Sq}^{k-i} \beta$.

Введём отображение $r : W \to W \otimes W$, полагая $r(w_k) = \sum (-1)^{i(k-i)} w_i \otimes T^i w_{k-i}$ и продолжая это отображение на W по линейности. Проверим, что отображение r цепное. Ясно, что $r(\partial w_k) = r\big(w_{k-1} + (-1)^k T w_{k-1}\big) = \sum (-1)^{i(k-1-i)} w_i \otimes T^i w_{k-1-i} + \sum (-1)^{i(k-1-i)+k} T w_i \otimes T^i w_{k-1-i}$ и

$\partial r(w_k) = \sum(-1)^{i(k-i)}\partial w_i \otimes T^i w_{k-i} + \sum(-1)^{i(k-i)+i} w_i \otimes T^i \partial w_{k-i} = = \sum(-1)^{i(k-i)} w_{i-1} \otimes T^i w_{k-i} + \sum(-1)^{i(k-i)+i} T w_{i-1} \otimes T^i w_{k-i} + + \sum(-1)^{i(k-i)+i} w_i \otimes T^i w_{k-i-1} + \sum(-1)^{i(k-i)+k} w_i \otimes T^{i+1} w_{k-i-1}$. В выражении для $\partial r(w_k)$ первая и четвёртая суммы сокращаются: если мы заменим i на $i+1$, то $i(k-i)$ заменится на $i(k-i)+k-1$. Теперь уже легко видеть, что $\partial r(w_k) = r(\partial w_k)$: в выражении для $\partial r(w_k)$ первая сумма непосредственно совпадает с третьей суммой в выражении для $r(\partial w_k)$, а совпадение вторых сумм в обоих выражениях доказывается заменой i на $i+1$.

С помощью отображения r построим отображение $\varphi_{K\times L}$, которое является композицией отображений

$$\begin{array}{rcl} W\otimes C_*(K)\otimes C_*(L) & \xrightarrow{r\otimes 1} & W\otimes W\otimes C_*(K)\otimes C_*(L) \xrightarrow{T} \\ W\otimes C_*(K)\otimes W\otimes C_*(L) & \xrightarrow{\varphi_K\otimes\varphi_L} & C_*(K)\otimes C_*(K)\otimes C_*(L)\otimes C_*(L) \xrightarrow{T} \\ & & C_*(K)\otimes C_*(L)\otimes C_*(K)\otimes C_*(L), \end{array}$$

где T в обоих случаях меняет местами второй и третий множители. Отображение $\varphi_{K\times L}$ эквивариантно и переносится соответствующим отображением $\mathcal{L}$, поэтому его можно использовать для вычисления произведения $\smile_k$ в цепном комплексе $C_*(K\times L)\cong C_*(K)\otimes C_*(L)$, а значит, и для вычисления операций Sq^k.

Пусть $\alpha\in Z^p(K;\mathbb{Z}_2)$, $\beta\in Z^p(L;\mathbb{Z}_2)$, $a\in C_*(K;\mathbb{Z}_2)$ и $b\in C_*(L;\mathbb{Z}_2)$. Нас интересует действие операции $\mathrm{Sq}^k=\mathrm{Sq}_{p+q-k}$ на $(p+q)$-мерный коцикл $\alpha\times\beta$. Для краткости положим $p+q-k=n$. Тогда, используя определение $\varphi_{K\times L}$ и отбрасывая знаки, поскольку сейчас мы работаем с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$, получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Sq}^k(\alpha\otimes\beta), a\otimes b\rangle &= \langle(\alpha\otimes\beta)\smile_n(\alpha\otimes\beta), a\otimes b\rangle = \\ &= \langle \alpha\otimes\beta\otimes\alpha\otimes\beta, \varphi_{K\times L}(w_n\otimes a\otimes b\rangle = \\ &= \langle \alpha\otimes\alpha\otimes\beta\otimes\beta, \sum\varphi_K(w_i\otimes a)\otimes T^i\varphi_L(w_{n-i}\otimes b\rangle = \\ &= \sum\langle\alpha\smile_i\alpha, a\rangle\langle\beta\smile_{n-i}\beta, b\rangle = \\ &= \sum\langle \mathrm{Sq}^{p-i}\alpha, a\rangle\langle\mathrm{Sq}^{q-n+i}\beta, b\rangle = \\ &= \sum\langle\mathrm{Sq}^{p-i}\alpha\times\mathrm{Sq}^{q-n+i}\beta, a\otimes b\rangle, \end{aligned}$$

где суммирование ведётся по всем i от 0 до n. Значит, $\mathrm{Sq}^k(\alpha\times\beta) = = \sum_{i=0}^n \mathrm{Sq}^{p-i}\alpha\times\mathrm{Sq}^{q-n+i}\beta = \sum_{j=p-n}^p \mathrm{Sq}^j\alpha\times\mathrm{Sq}^{k-j}\beta$. Остаётся проверить, что суммирование ведётся в нужных пределах. В формуле Картана $\mathrm{Sq}^k(\alpha\times\beta)=\sum_i \mathrm{Sq}^i\alpha\times\mathrm{Sq}^{k-i}\beta$ слагаемые ненулевые лишь в том случае, когда $0 \leqslant i \leqslant p$ и $0 \leqslant k-i \leqslant q$, т.е. $k-q \leqslant i \leqslant k$. Поэтому суммирование ведётся от $i = k-q = p-n$ до p.

Формула Картана имеет следующую интерпретацию. Для каждого элемента $\alpha \in H^*(K;\mathbb{Z}_2)$ положим $\operatorname{Sq}\alpha = \sum_k \operatorname{Sq}^k \alpha$ (эта сумма содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых). Тогда отображение $\operatorname{Sq}: H^*(K;\mathbb{Z}_2) \to H^*(K;\mathbb{Z}_2)$ является гомоморфизмом колец. Действительно, если $\dim\alpha = p$ и $\dim\beta = q$, то $(p+q+k)$-мерная компонента элемента $\operatorname{Sq}\alpha \smile \operatorname{Sq}\beta = (\sum_i \operatorname{Sq}\alpha) \smile \left(\sum_j \operatorname{Sq}^j \beta\right)$ имеет вид $\sum \operatorname{Sq}^i \alpha \smile \operatorname{Sq}^j \beta$, где суммирование ведётся по тем i, j, для которых $(i+p)+(j+q) = = p+q+k$, т.е. $i+j=k$. Значит, она имеет вид $\sum_i \operatorname{Sq}^i \alpha \smile \operatorname{Sq}^{k-i} \beta$. Согласно формуле Картана эта сумма равна $\operatorname{Sq}^k(\alpha \smile \beta)$, т.е. она равна $(p+q+k)$-мерной компоненте элемента $\operatorname{Sq}(\alpha \smile \beta)$.

Гомоморфизм Sq позволяет вычислить $\operatorname{Sq}^k(\alpha^n)$ для любого элемента $\alpha \in H^1(K;\mathbb{Z}_2)$.

Теорема 3.4.6. *Если $\alpha \in H^1(K;\mathbb{Z}_2)$, то $\operatorname{Sq}^k(\alpha^n) = \binom{n}{k}\alpha^{n+k}$.*

Доказательство. Согласно свойствам квадратов Стинрода $\operatorname{Sq}^k \alpha = 0$ при $k \geqslant 2$, $\operatorname{Sq}^0 \alpha = \alpha$ и $\operatorname{Sq}^1 \alpha = \alpha^2$. Поэтому $\operatorname{Sq}\alpha = \alpha + \alpha^2$. Учитывая, что Sq — гомоморфизм, получаем $\operatorname{Sq}(\alpha^n) = (\operatorname{Sq}\alpha)^n = (\alpha+\alpha^2)^n = = \alpha \sum_k \binom{n}{k}\alpha^k$. Значит, $\operatorname{Sq}^k(\alpha^n) = \binom{n}{k}\alpha^{n+k}$. □

Задача 3.4.1. *Докажите, что если когомологический класс α одномерен, то*

$$\operatorname{Sq}(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^4+\ldots) = 1+\alpha.$$

Задача 3.4.2. [Ву] *Докажите, что*

$$\operatorname{Sq}^k w_m = w_k w_m + \binom{m-k}{1} w_{k-1}w_{m+1} + \binom{m-k+1}{2} w_{k-2}w_{m+2} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{m-1}{k} w_0 w_{m+k}.$$

(Указание: докажите, что если требуемая формула верна для расслоения ξ, то она верна и для расслоения $\xi \times \gamma^1$).

3.4.3. Операции Стинрода в $\mathbb{R}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{R}P^\infty$

Пусть $K_n = \mathbb{R}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{R}P^\infty$ (произведение n множителей). Кольцо когомологий $H^*(K_n;\mathbb{Z}_2)$ является кольцом многочленов $\mathbb{Z}_2[x_1,\ldots,x_n]$. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — элементарные симметрические многочлены от $x_1, \ldots, x_n$ над полем $\mathbb{Z}_2$.

Теорема 3.4.7. *В кольце $H^*(K_n;\mathbb{Z}_2)$ имеют место равенства* $\mathrm{Sq}^i\,\sigma_n = \sigma_n\sigma_i,\ \ 0 \leqslant i \leqslant n$.

Доказательство. Согласно теореме 3.4.6 $\mathrm{Sq}\,x_i = x_i + x_i^2$. Поэтому $\mathrm{Sq}\,\sigma_n = \mathrm{Sq}(\prod x_i) = \prod \mathrm{Sq}\,x_i = \prod(x_i + x_i^2) = \sigma_n\prod(1 + x_i) = \sigma_n\sum_{i=0}^n\sigma_i$. □

Пусть $e_n \in H^n\big(K(\mathbb{Z}_2,n);\mathbb{Z}_2\big)$ — фундаментальный когомологический класс пространства $K(\mathbb{Z}_2,n)$. Согласно теореме 3.1.9 (см. с. 140) для элемента $\sigma_n \in H^n(K_n;\mathbb{Z}_2)$, как и для любого другого элемента этой группы, найдётся непрерывное отображение $f: K_n \to K(\mathbb{Z}_2,n)$, для которого $f^*e_n = \sigma_n$. Поэтому, воспользовавшись только что доказанной теоремой, получаем $f^*\,\mathrm{Sq}^i(e_n) = \mathrm{Sq}^i\,f^*(e_n) = \mathrm{Sq}^i\,\sigma_n = \sigma_n\sigma_i \neq 0$. Следовательно, $\mathrm{Sq}^i(e_n) \neq 0$ при $0 \leqslant i \leqslant n$.

Аналогично мы сейчас построим набор мультииндексов $I = \{i_1,\ldots,i_r\}$, для которых в пространстве $H^*\big(K(\mathbb{Z}_2,n);\mathbb{Z}_2\big)$ все элементы $\mathrm{Sq}^I\,e_n$, где $\mathrm{Sq}^I = \mathrm{Sq}^{i_1}\ldots\mathrm{Sq}^{i_r}$, линейно независимы. Операцию Sq^I будем называть *допустимой*, если $i_j \geqslant 2i_{j+1}$ для всех $j < r$. Число r будем называть *длиной* операции, а сумму $i_1 + \ldots + i_r = d(I)$ — её *степенью*.

Упорядочим мономы $m = \sigma_n^{j_1}\ldots\sigma_1^{j_n}$ лексикографически, т.е. будем считать, что $m > m'$, если $j_1 = j_1'$, …, $j_k = j_k'$ и $j_{k+1} > j_{k+1}'$ для некоторого $k \geqslant 0$.

Теорема 3.4.8. *Для любой допустимой последовательности I степени $d(I) \leqslant n$ в кольце $H^*\big(K(\mathbb{Z}_2,n);\mathbb{Z}_2\big)$ имеет место равенство* $\mathrm{Sq}^I\,\sigma_n = \sigma_n Q_I$, *где Q_I — симметрический многочлен со старшим членом $\sigma_{i_1}\ldots\sigma_{i_r}$.*

Доказательство. Применим индукцию по длине r операции Sq^I. При $r = 1$ утверждение доказано (теорема 3.4.7). Сопоставим последовательности I допустимую последовательность $J = \{i_2,\ldots,i_r\}$. По предположению индукции для последовательности J утверждение верно.

Воспользовавшись теоремой 3.4.7 и формулой Картана, получим

$$\begin{aligned}\operatorname{Sq}^I \sigma_n &= \operatorname{Sq}^{i_1} \operatorname{Sq}^J \sigma_n = \operatorname{Sq}^{i_1}(\sigma_n Q_J) = \sum_{p=0}^{i_1} (\operatorname{Sq}^p \sigma_n)(\operatorname{Sq}^{i_1-p} Q_J) = \\ &= \sigma_n \sigma_{i_1} Q_J + \sum_{p=0}^{i_1-1} \sigma_n \sigma_p \operatorname{Sq}^{i_1-p} Q_J = \\ &= \sigma_n \left(\sigma_{i_1}(\sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_r} + \dots) + \sum_{p=0}^{i_1-1} \sigma_p \operatorname{Sq}^{i_1-p} Q_J \right).\end{aligned}$$

Остаётся проверить, что старший моном симметрического многочлена $\sum_{p=0}^{i_1-1} \sigma_p \operatorname{Sq}^{i_1-p} Q_J$ меньше $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\dots\sigma_{i_r}$. Ясно, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Sq} \sigma_i = \operatorname{Sq}\left(\sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_i} x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_i} \right) &= \sum (x_{\alpha_1} + x_{\alpha_1}^2) \dots (x_{\alpha_i} + x_{\alpha_i}^2) = \\ &= \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_i} x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_i} (1 + x_{\alpha_1}) \dots (1 + x_{\alpha_i}).\end{aligned}$$

Значит, $\operatorname{Sq}\sigma_i = \sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_i} x_{\alpha_1}\dots x_{\alpha_i}\sigma_j(x_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha_i})$, поэтому в $\operatorname{Sq}^j \sigma_i$ не может быть монома старше σ_{i+j}. Кроме того, σ_i лежит в i-мерных когомологиях, поэтому $\operatorname{Sq}^i \sigma_i = \sigma_i^2 < \sigma_{2i}$. Поскольку $p < i_1$, нас интересуют лишь те слагаемые, для которых старший моном $\operatorname{Sq}^{i_1-p}(\sigma_{i_2}\dots\sigma_{i_r})$ не меньше σ_{i_1}. Но этот старший моном строго меньше σ_{2i_2}, а из допустимости последовательности I следует, что $i_1 \geqslant 2i_2 > 2i_2 - 1$. □

Следствие. *Элементы $\operatorname{Sq}^I e_n$, соответствующие допустимым последовательностям I степени $d(I) \leqslant n$, линейно независимы в пространстве $H^*\bigl(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2\bigr)$.*

Доказательство. Многочлены $\sigma_I = \sigma_{i_1}\dots\sigma_{i_r}$, соответствующие допустимым последовательностям степени $d(I) \leqslant n$, линейно независимы в пространстве симметрических многочленов, поэтому из теоремы 3.4.8 следует, что элементы $\operatorname{Sq}^I \sigma_n$ линейно независимы в пространстве $H^*(K_n; \mathbb{Z}_2)$. Пусть $f : K_n \to K(\mathbb{Z}_2, n)$ — отображение, для которого $f^* e_n = \sigma_n$. Элементы $\operatorname{Sq}^I \sigma_n = f^* \operatorname{Sq}^I e_n$ линейно независимы, поэтому элементы $\operatorname{Sq}^I e_n$ тоже линейно независимы. □

Избыточностью допустимой операции Sq^I будем называть число

$$e(I) = 2i_1 - d(I) = i_1 - i_2 - \dots - i_r = (i_1 - 2i_2) + (i_2 - 2i_3) + \dots + i_r.$$

Теорема 3.4.9. *Пусть α^n — n-мерный класс когомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$, I — произвольная допустимая последовательность. Если $e(I) > n$, то $\mathrm{Sq}^I \alpha^n = 0$, а если $e(I) = n$, то $\mathrm{Sq}^I \alpha^n = (\mathrm{Sq}^J \alpha^n)^2$, где J — последовательность, полученная из I вычёркиванием первого члена i_1.*

Доказательство. Если $e(I) = i_1 - i_2 - \ldots - i_r > n$, то $i_1 > i_2 + \ldots + i_r + n$, т.е. i_1 больше размерности класса когомологий $\mathrm{Sq}^J \alpha^n$. Следовательно, $\mathrm{Sq}^I \alpha^n = \mathrm{Sq}^{i_1}(\mathrm{Sq}^J \alpha^n) = 0$. А если $e(I) = n$, то число i_1 равно размерности класса когомологий $\mathrm{Sq}^J \alpha^n$. Поэтому $\mathrm{Sq}^I \alpha^n = (\mathrm{Sq}^J \alpha^n)^2$. □

Глава 4.

Сингулярные гомологии

4.1. Основные определения и свойства

Чтобы сразу получить инвариантное определение гомологий, можно поступить следующим образом. Будем рассматривать сразу все непрерывные отображения $f : \Delta^k \to X$, где Δ^k — симплекс $[0, 1, \ldots, k]$; такие отображения будем называть *сингулярными* k-мерными симплексами. Группу $C_k(X; G)$ определим как множество конечных сумм $\sum a_i f_i$, где $a_i \in G$, f_i — сингулярный k-мерный симплекс.

Чтобы определить граничный гомоморфизм ∂, введём отображения $\varepsilon_j = \varepsilon_j^k : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$, $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ k$, положив $\varepsilon_j^k[i] = [i]$ при $i < j$ и $\varepsilon_j^k[i] = [i+1]$ при $i \geqslant j$; на весь симплекс отображение продолжается по линейности. Для сингулярного симплекса $f : \Delta^k \to X$ положим $\partial f = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j f \varepsilon_j^k \in C_{k-1}(X; G)$. Для 0-мерного симплекса f полагаем $\partial f = 0$.

Теорема 4.1.1. $\partial\partial = 0$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что если $i < j$, то $\varepsilon_j^{k+1}\varepsilon_i^k = \varepsilon_i^{k+1}\varepsilon_{j-1}^k$. Действительно, выражения в обеих частях равенства переводят $[a]$ в $[a]$ при $a < i$, в $[a+1]$ при $i \leqslant a < j-1$ и в $[a+2]$ при

$a \geqslant j-1$. Поэтому

$$\begin{aligned}\partial\partial f &= \partial\Big(\sum_j (-1)^j f\varepsilon_j\Big) = \sum_{i,\,j}(-1)^{i+j} f\varepsilon_j\varepsilon_i = \\ &= \sum_{i\geqslant j}(-1)^{i+j} f\varepsilon_j\varepsilon_i + \sum_{i<j}(-1)^{i+j} f\varepsilon_i\varepsilon_{j-1}.\end{aligned}$$

Заменим во второй сумме индекс i на j, а индекс j на $i+1$. После такой замены вторая сумма сократится с первой. □

Снова введём группы $Z_k = \operatorname{Ker}\partial_k$ и $B_k = \operatorname{Im}\partial_{k+1}$. Согласно теореме 4.1.1 $B_k \subset Z_k$, поэтому можно рассмотреть группу $H_k(X; G) = Z_k/B_k$; эту группу называют группой *сингулярных гомологий* пространства X с коэффициентами в группе G. Мы не будем вводить различных обозначений для сингулярных и симплициальных гомологий; в §4.1.3 мы покажем, что для любого симплициального комплекса его сингулярные гомологии изоморфны симплициальным.

Теорема 4.1.2. *Пусть пространство X состоит из n компонент линейной связности. Тогда* $H_0(X; G) = \underbrace{G \oplus \ldots \oplus G}_{n}$.

Доказательство. Выберем в компонентах линейной связности пространства X точки $x_1, \ldots, x_n$. Если точка y_i лежит в той же компоненте связности, что и точка x_i, то существует путь из x_i в y_i. Этот путь можно рассматривать как сингулярный симплекс $f : \Delta^1 \to X$; при этом $\partial(af) = a[y_i] - a[x_i]$. Таким образом, с точностью до границы сингулярная цепь $a[y_i]$ равна $a[x_i]$. Предположим теперь, что $a[x_i] = \partial c$, где $c = \sum a_i f_i$ и f_i — путь из z_i в w_i. Тогда $\partial c = \sum a_i[w_i] - \sum a_i[z_i]$. В этом выражении сумма всех коэффициентов равна 0 и сумма коэффициентов при каждом 0-мерном симплексе $[x]$, $x \neq x_i$, тоже равна 0. Поэтому сумма коэффициентов при $[x_i]$ равна 0, т.е. $a = 0$. □

Пусть $C_k = C_k(X)$ и $C'_k = C_k(Y)$. Непрерывное отображение $\varphi : X \to Y$ индуцирует отображение $\varphi_k : C_k \to C'_k$, а именно, сингулярному симплексу $f : \Delta^k \to X$ сопоставляется сингулярный симплекс $\varphi f : \Delta^k \to Y$. При этом $\varphi_{k-1}\partial_k f = \sum(-1)^j \varphi f \varepsilon_j^k = \partial'_k \varphi_k f$. Из равенства $\varphi_{k-1}\partial_k = \partial'_k\varphi_k$ следует, что $\varphi_k(\operatorname{Ker}\partial_k) \subset \operatorname{Ker}\partial'_k$ и $\varphi_k(\operatorname{Im}\partial_{k+1}) \subset \operatorname{Im}\partial'_{k+1}$. Поэтому возникает гомоморфизм $\varphi_* : H_k(X) \to H_k(Y)$

Тождественное отображение $X \to X$ индуцирует тождественное отображение $H_k(X) \to H_k(X)$, поэтому гомеоморфизм $X \to Y$ индуцирует изоморфизм $H_k(X) \to H_k(Y)$. Это утверждение допускает следующее обобщение: гомотопическая эквивалентность $X \to Y$ индуцирует изоморфизм $H_k(X) \to H_k(Y)$. Ещё более общее утверждение таково.

Теорема 4.1.3. *Если отображения $\varphi, \psi : X \to Y$ гомотопны, то отображения $\varphi_*, \psi_* : H_k(X) \to H_k(Y)$ одинаковы.*

Доказательство. Так же, как и для симплициальных гомологий, можно определить *цепную гомотопию* как семейство гомоморфизмов $D_k : C_k(X) \to C_{k+1}(Y)$, для которых

$$D_{k-1}\partial_k + \partial'_{k+1} D_k = \varphi_k - \psi_k. \tag{1}$$

Равенство $\varphi_* = \psi_*$ доказывается точно так же, как и раньше.

Пусть $H : T \times I \to Y$ — гомотопия, связывающая φ и ψ. По этой гомотопии построим цепную гомотопию $D_k : C_k(X) \to C_{k+1}(Y)$. Для этого поступим следующим образом. Пусть $f : \Delta^k \to X$ — сингулярный симплекс. Зададим отображение $F : \Delta^k \times I \to Y$ формулой $F(x,t) = H(f(x),t)$ и положим $D_k f = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i F \delta_i^{k+1}$, где δ_i^{k+1} — линейное отображение симплекса $[0, 1, \dots, k+1]$ на симплекс $[0_0, \dots, i_0, i^1, \dots, k^1] \subset \Delta^k \times I$; здесь $0_0, \dots, i_0$ — вершины симплекса $\Delta^k \times \{0\}$, $i^1, \dots, k^1$ — вершины симплекса $\Delta^k \times \{1\}$.

Сингулярные цепи $D_{k-1}\partial_k f$ и $\partial'_{k+1} D_k f$ представляют собой линейные комбинации сингулярных симплексов, каждый из которых имеет вид $F\alpha : \Delta^k \to Y$, где α — некоторое отображение симплекса $[0, \dots, k]$ на симплекс в $\delta^k \times I$. Чтобы доказать равенство (1), достаточно выяснить, какие именно симплексы в $\delta^k \times I$ при этом получаются (с учётом знака). Рассмотрим сначала для примера случай $k = 2$. При отображении D_2 симплекс $[0,\ 1,\ 2]$ переходит в

$$+0_0 0^1 1^1 2^1 - 0_0 1_0 1^1 2^1 + 0_0 1_0 2_0 2^1,$$

а последующее отображение ∂'_3 переводит эти симплексы в

$$\begin{array}{ccc}
+0^1 1^1 2^1 & -1_0 1^1 2^1 & +1_0 2_0 2^1 \\
\underline{-0_0 1^1 2^1} & \underline{+0_0 1^1 2^1} & -0_0 2_0 2^1 \\
+0_0 0^1 2^1 & \underbrace{-0_0 1_0 2^1} & \underbrace{+0_0 1_0 2^1} \\
-0_0 0^1 1^1 & +0_0 1_0 1^1 & -0_0 1_0 2_0
\end{array}$$

Отметим, что одинаково подчёркнутые симплексы сокращаются. Это происходит и для произвольного k: симплекс $[0_0, \dots, i_0, (i+1)^1, \dots, k^1]$, $i \neq 0,\ k$, возникает при уничтожении вершины с номером $i+2$ симплексов $(-1)^i [0_0, \dots, i_0, i^1, (i+1)^1, \dots, k^1]$ и $(-1)^{i+1} [0_0, \dots, i_0, (i+1)_0, (i+1)^1, \dots, k^1]$; при этом возникают симплексы противоположного знака.

При отображении ∂_2 симплекс $[0, 1, 2]$ переходит в $[1,2]-[0,2]+$ $+[0,1]$, а последующее отображение D_1 переводит эти симплексы в

$$\begin{array}{ccc} +1_0 1^1 2^1 & -0_0 0^1 2^1 & +0_0 0^1 1^1 \\ -1_0 2_0 2^1 & +0_0 2_0 2^1 & -0_0 1_0 1^1 \end{array}$$

В сумме $\partial_3' D_2 + D_1 \partial_2$ сокращаются все симплексы, кроме симплексов $+0^1 1^1 2^1$ и $-0_1 1_1 2_1$. Эти симплексы соответствуют отображениям φf и ψf. Для произвольного k нужно убедиться в том, что симплексы вида $[\ldots \hat{\jmath} \ldots i_0 i^1 \ldots]$ (или $[\ldots i_0 i^1 \ldots \hat{\jmath} \ldots]$) входят в $\partial_{k+1}' D_k$ и в $D_{k-1}\partial_k$ ровно по одному разу, причём с противоположными знаками. Это легко проверяется. □

Пример 4.1.1. *Пусть X — стягиваемое пространство. Тогда $H_0(X;G)=G$ и $H_k(X;G)=0$ при $k>0$.*

Доказательство. Стягиваемое пространство гомотопически эквивалентно пространству $*$, состоящему из одной точки. Поэтому достаточно проверить, что $H_0(*;G)=G$ и $H_k(*;G)=0$ при $k>0$. Для любого $k \geqslant 0$ существует единственное отображение $\Delta^k \to *$; обозначим его f_k. Ясно, что $\partial_k f_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i f_{k-1}$ при $k \geqslant 1$ и $\partial_0 f_0 = 0$. Поэтому $\partial_{2k-1} f_{2k-1} = 0$ и $\partial_{2k} f_{2k} = f_{2k-1}$ $(k \geqslant 1)$. Таким образом, $Z_0 = G$ и $B_0 = 0$; $Z_{2k-1} = G$ и $B_{2k-1} = G$; $Z_{2k} = 0$ и $B_{2k} = 0$. □

4.1.1. Теорема о вырезании и точная последовательность Майера–Вьеториса

Относительные и приведённые группы гомологий, а также группы когомологий в сингулярном случае определяются точно так же, как и в симплициальном. Точная гомологическая последовательность пары тоже строится без каких-либо изменений. Но с точной последовательностью Майера–Вьеториса возникает трудность, потому что не любую сингулярную цепь в $X \cup Y$ можно представить в виде суммы двух сингулярных цепей с носителями в X и в Y. Эта трудность принципиальная: для сингулярных гомологий точная последовательность Майера–Вьеториса существует лишь при некоторых ограничениях. Точная последовательность Майера–Вьеториса для сингулярных гомологий тесно связана со следующим утверждением.

Теорема 4.1.4 (о вырезании). *Пусть множества $U \subset A \subset X$ таковы, что $\bar{U} \subset \operatorname{int} A$. Тогда включение пар $(X \setminus U, A \setminus U) \subset (X, A)$ индуцирует изоморфизм $H_*(X \setminus U, A \setminus U) \to H_*(X, A)$.*

Доказательство. Пусть $X_1 = A$ и $X_2 = X \setminus U$. Тогда $\operatorname{int}(X \setminus U) = X \setminus \bar{U} \supset X \setminus \operatorname{int} A$, поэтому $\operatorname{int} X_1 \cup \operatorname{int} X_2 = X$.

Лемма 1. *Пусть $X = \operatorname{int} X_1 \cup \operatorname{int} X_2$. Тогда для любого сингулярного симплекса $f : \Delta^k \to X$ можно выбрать число $m = m(f)$ так, что образ любого симплекса m-го барицентрического подразделения симплекса Δ^k целиком лежит в X_1 или в X_2.*

Доказательство. Множества $f^{-1}(\operatorname{int} X_1)$ и $f^{-1}(\operatorname{int} X_2)$ образуют открытое покрытие компактного множества $\Delta^k \subset \mathbb{R}^k$. Пусть δ — число Лебега этого покрытия. Если d — диаметр симплекса Δ^k, то диаметр любого симплекса его m-го барицентрического подразделения не превосходит $\left(\frac{k}{k+1}\right)^m d$. Остаётся выбрать m так, что $\left(\frac{k}{k+1}\right)^m d < \delta$. □

Каждому сингулярному симплексу $f : \Delta^k \to X$ можно сопоставить его барицентрическое подразделение $\operatorname{sd} f = \sum f_\alpha$, где f_α — ограничение отображения f на симплекс Δ^k_α, принадлежащий барицентрическому подразделению Δ^k. Формально сингулярная цепь $\operatorname{sd} f$ определяется так. На с. 18 мы определили цепное отображение $i_k : C_k(K) \to C_k(K')$, для которого $i_k(\Delta^k) = [b, i_{k-1}\partial\Delta^k] = \sum \pm[b, b', b'', \dots, v_i]$, где b — барицентр Δ^k, b' — барицентр $(k-1)$-мерной грани $\Delta' \subset \Delta^k$, b'' — барицентр $(k-2)$-мерной грани $\Delta'' \subset \Delta' \subset \Delta^k$, $\dots$, v_i — вершина Δ^k. Положим $\operatorname{sd} f = \sum \pm g_\alpha$, где g_α — композиция отображений

$$\Delta^k = [v_0, v_1, \dots, v_k] \to [b, b', b'', \dots, v_i] \xrightarrow{f} X$$

(здесь первая стрелка — гомеоморфизм симплексов, заданных как упорядоченные наборы вершин).

По линейности sd можно продолжить до гомоморфизма $\operatorname{sd} : C_*(X) \to C_*(X)$. Отображение sd — цепное: равенство $\partial \operatorname{sd} = \operatorname{sd} \partial$ следует из равенства $i\partial = \partial i$.

Лемма 2. *Для каждого натурального m существует семейство гомоморфизмов $D_k : C_k(X) \to C_{k+1}(X)$, для которых:*

(1) $\partial_{k+1} D_k c + D_{k-1}\partial_k c = \operatorname{sd}^m c - c$;

(2) носитель[1] цепи $D_k c$ содержится в носителе цепи c.

Доказательство. Положим $D_0 = 0$. Гомоморфизм D_k будем строить, предполагая, что гомоморфизмы $D_0, \dots, D_{k-1}$ уже построены. Рассмотрим сингулярный симплекс $\operatorname{id}_k : \Delta^k \to \Delta^k$ в $C_k(\Delta^k)$. Легко проверить,

[1] Под носителем цепи здесь подразумевается объединение образов всех сингулярных симплексов, входящих в цепь.

что цепь $z_k = \operatorname{sd}^m \operatorname{id}_k - \operatorname{id}_k - D_{k-1}\partial_k \operatorname{id}_k$ является циклом. Действительно, по предположению для цепи $j_{k-1} = \partial_k \operatorname{id}_k$ выполняется равенство

$$\partial_k D_{k-1} j_{k-1} + D_{k-2}\partial_{k-1} j_{k-1} = \operatorname{sd}^m j_{k-1} - j_{k-1},$$

причём $D_{k-2}\partial_{k-1} j_{k-1} = D_{k-2}\partial_{k-1}\partial_k \operatorname{id}_k = 0$. Поэтому

$$\partial_k z_k = \partial_k \operatorname{sd}^m \operatorname{id}_k - \partial_k \operatorname{id}_k - \operatorname{sd}^m \partial_k \operatorname{id}_k + \partial_k \operatorname{id}_k = 0,$$

поскольку $\partial_k \operatorname{sd}^m = \operatorname{sd}^m \partial_k$.

Мы уже знаем, что $H_k(\Delta^k) = 0$ при $k \geqslant 1$, поскольку симплекс Δ^k — стягиваемое пространство. Следовательно, существует сингулярная цепь $b_{k+1} \in C_{k+1}(\Delta^k)$, для которой $z_k = \partial b_{k+1}$. Пусть $b_{k+1} = \sum a_i f_i$, $f_i : \Delta^{k+1} \to \Delta^k$. Для произвольного сингулярного симплекса $f : \Delta^k \to X$ положим $D_k f = \sum a_i (f \circ f_i)$, а затем продолжим отображение D_k по линейности. Требуемое равенство

$$\partial_{k+1} D_k f + D_{k-1}\partial_k f = \operatorname{sd}^m f - f$$

следует из равенства $\sum a_i f_i + D_{k-1}\partial_k = \operatorname{sd}^m \operatorname{id}_k - \operatorname{id}_k$, поскольку $\partial_{k+1} D_k f = \sum a_k \partial_{k+1}(f \circ f_i)$. □

Согласно лемме 2 любой относительный цикл $z_k \in C_k(X, A)$ гомологичен относительному циклу $\operatorname{sd}^m z_k$, поскольку $D_{k-1}\partial_k z_k \in C_k(A)$. В любой цикл входит лишь конечное число сингулярных симплексов, поэтому согласно лемме 1 для каждого цикла z_k можно выбрать число m так, что носитель любого сингулярного симплекса, входящего в $\operatorname{sd}^m z_k$, целиком лежит в $X_1 = A$ или в $X_2 = X \setminus U$. Поэтому отображение $H_*(X \setminus U, A \setminus U) \to H_*(X, A)$ — эпиморфизм. Остаётся проверить, что если $z_k \in C_k(X \setminus U)$ и $z_k - \partial b \in C_k(A)$ для некоторого $b \in C_{k+1}(X)$, то $z_k - \partial b' \in C_k(A \setminus U)$ для некоторого $b' \in C_k(X \setminus U)$.

Пусть $C_k^{\{X_1, X_2\}}(X)$ — группа, состоящая из сумм цепей из $C_k(X_1)$ и $C_k(X_2)$. По условию $\partial b \in C_k^{\{X_1, X_2\}}(X)$. Выберем число m так, что $\operatorname{sd}^m b \in C_{k+1}^{\{X_1, X_2\}}(X)$. Тогда

$$b + \partial D b = \operatorname{sd}^m b - D\partial b \in C_{k+1}^{\{X_1, X_2\}}(X).$$

Пусть $\operatorname{sd}^m b - D\partial b = b' + b''$, где $b' \in C_{k+1}(X_1)$ и $b'' \in C_{k+1}(X_2)$. Тогда

$$z_k - \partial b' - \partial b'' = z_k - \partial(b + \partial D b) = z_k - \partial b \in C_k(X_1).$$

При этом $z_k, \partial b' \in C_k(X_2)$ и $\partial b'' \in C_k(X_1)$. Следовательно,

$$z_k - \partial b' \in C_k(X_1) \cap C_k(X_2) = C_k(A) \cap C_k(X \setminus U) = C_k(A \setminus U),$$

что и требовалось. □

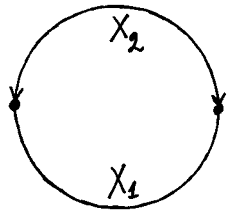

Рис. 4.1. Полуокружности X_1 и X_2

Обратимся теперь к точной последовательности Майера–Вьеториса. Для любых двух множеств $X_1, X_2 \subset X$ имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to C_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(j_1,-j_2)} C_*(X_1) \oplus C_*(X_2) \xrightarrow{(i_1,i_2)} C_*^{\{X_1,X_2\}}(X_1 \cup X_2) \to 0,$$

где $C_*^{\{X_1,X_2\}}(X_1 \cup X_2) = C_*(X_1) + C_*(X_2)$ — группа, состоящая из сумм цепей. Эта короткая точная последовательность индуцирует точную последовательность

$$\to H_k(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{j_*} H_k(X_1) \oplus H_k(X_2) \xrightarrow{i_*}$$
$$\xrightarrow{i_*} H_k\bigl(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X_1 \cup X_2)\bigr) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(X_1 \cap X_2) \to$$

Если включение $C_*^{\{X_1,X_2\}}(X_1 \cup X_2) \to C_*(X_1 \cup X_2)$ индуцирует изоморфизм гомологий, то говорят, что пара $\{X_1, X_2\}$ удовлетворяет *аксиоме вырезания*. В таком случае группу $H_k\bigl(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X_1 \cup X_2)\bigr)$ можно заменить группой $H_*(X_1 \cup X_2)$. Точную последовательность гомологий называют при этом *последовательностью Майера–Вьеториса*.

Пример 4.1.2. *Пусть X_1 и X_2 — две полуокружности, причём в X_1 входят обе граничные точки, а в X_2 граничные точки не входят (рис. 4.1). Тогда для пары $\{X_1, X_2\}$ точная последовательность Майера–Вьеториса не имеет места.*

Доказательство. По условию $X_1 \cup X_2 = S^1$ и $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Поэтому участок $H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \to H_1(X_1 \cup X_2) \to H_1(X_1 \cap X_2)$ имеет вид $0 \to \mathbb{Z} \to 0$. □

По ходу доказательства теоремы о вырезании было доказано, что если $X_1 \cup X_2 = \operatorname{int} X_1 \cup \operatorname{int} X_2$, то пара $\{X_1, X_2\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания. Доказательство эпиморфности гомоморфизма $H_*\big(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X)\big) \to H_*(X)$, где $X = X_1 \cup X_2$, там содержится явно, а мономорфность следует из того, что если $b \in C_{k+1}(X)$ и $\partial b \in C_k^{\{X_1,X_2\}}(X)$, то существует цепь $d = Db \in C_{k+2}(X)$, для которой $b + \partial d \in C_{k+1}^{\{X_1,X_2\}}(X)$; действительно, ∂b — граница цепи $b + \partial d$.

Пример 4.1.3. $\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{при } k = n; \\ 0 & \textit{при } k \neq n. \end{cases}$

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — две различные точки сферы S^n, $X_1 = S^n \setminus \{x_1\}$ и $X_2 = S^n \setminus \{x_2\}$. Пространства X_1 и X_2 стягиваемы, поэтому $\tilde{H}_k(X_i) = 0$ при всех k.

Множества X_1 и X_2 открыты в S^n, поэтому пара $\{X_1, X_2\}$ удовлетворяет аксиоме вырезания. Точная последовательность Майера–Вьеториса даёт изоморфизм

$$\tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_k(S^n \setminus \{x_1, x_2\}).$$

Но $S^n \setminus \{x_1, x_2\} \sim S^{n-1}$. Поэтому получаем изоморфизм $\tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$. Остаётся заметить, что при $n = 0$ требуемое утверждение очевидно. □

Пример 4.1.4. $H_k(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{при } k = n; \\ 0 & \textit{при } k \neq n. \end{cases}$

Доказательство. Точная последовательность пары (D^n, S^{n-1}) показывает, что

$$H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}).$$

□

Упражнение. *Докажите, что $H_k(\Sigma X) \cong \tilde{H}_{k-1}(X)$ для всех $k \geqslant 1$ (*изоморфизм надстройки*).*

Задача 4.1.1. *Докажите, что $H_i(X, Y) \cong H_i(X \cup CY, CY)$.*

Задача 4.1.2. *Докажите, что $H_i(X, Y) \cong H_i(X \cup CY)$ при $i \geqslant 1$.*

Задача 4.1.3. *Пусть X — связный CW-комплекс, Y — его подкомплекс. Докажите, что $H_i(X, Y) \cong \tilde{H}_i(X/Y)$.*

Пусть (X_1, A_1) и (X_2, A_2) — две пары топологических пространств, причём $A_i \subset X_i \subset X$, $i = 1, 2$. Предположим, что обе пары множеств

$\{X_1, X_2\}$ и $\{A_1, A_2\}$ удовлетворяют аксиоме вырезания. Тогда имеет место точная последовательность

$$\begin{gathered}\to H_k(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \xrightarrow{j_*} H_k(X_1, A_1) \oplus H_k(X_2, A_2) \xrightarrow{i_*} \\ \xrightarrow{i_*} H_k(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \to,\end{gathered}$$

которую называют *относительной последовательностью Майера–Вьеториса*. Чтобы построить эту последовательность, прежде всего заметим, что отображение относительных гомологий, индуцированное включением

$$\frac{C_*(X_1) + C_*(X_2)}{C_*(A_1) + C_*(A_2)} \to \frac{C_*(X_1 \cup X_2)}{C_*(A_1 \cup A_2)},$$

является изоморфизмом. В самом деле, рассмотрим точную гомологическую последовательность пары $(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2)$ и соответствующую точную последовательность для гомологий вида $H_*\big(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X_1 \cup X_2)\big)$, которая возникает из очевидной короткой точной последовательности. Естественные вложения цепных комплексов индуцируют отображение второй точной последовательности в первую, причём отображения абсолютных гомологий — изоморфизмы. Поэтому из 5-леммы следует, что отображения относительных гомологий тоже изоморфизмы.

Теперь остаётся построить короткую точную последовательность

$$0 \to \frac{C_*(X_1 \cap X_2)}{C_*(A_1 \cap A_2)} \to \frac{C_*(X_1)}{C_*(A_1)} \oplus \frac{C_*(X_2)}{C_*(A_2)} \to \frac{C_*(X_1) + C_*(X_2)}{C_*(A_1) + C_*(A_2)} \to 0,$$

т.е. нужно проверить, что факторизация короткой точной последовательности по точной подпоследовательности приводит к точной последовательности. Это верно не только для коротких точных последовательностей, но и для любых точных последовательностей. Чтобы доказать это, будем рассматривать точную последовательность как цепной комплекс C, а её подпоследовательность — как цепной подкомплекс C'. Точность последовательностей означает, что $H_*(C) = 0$ и $H_*(C') = 0$. Запишем точную последовательность гомологий, индуцированную короткой точной последовательностью $0 \to C' \to C \to C/C' \to 0$:

$$H_k(C) \xrightarrow{p_*} H_k(C/C') \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(C').$$

В результате получим $H_k(C/C') = 0$, что и требовалось.

4.1.2. Теорема Жордана–Брауэра

Брауэр доказал, что если множество $B \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфно S^{n-1}, то $\mathbb{R}^n \setminus B$ состоит из двух связных компонент. В частном случае $n = 2$ эта теорема была доказана ранее Жорданом. Теорема Жордана–Брауэра очевидным образом вытекает из следующего утверждения.

Теорема 4.1.5 (Александер [Al2]). *Если A, $B \subset \mathbb{R}^n$ — гомеоморфные замкнутые множества, то $H_k(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H_k(\mathbb{R}^n \setminus B)$ для всех $k \geqslant 0$.*

Доказательство. [Do] Рассмотрим $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и будем считать, что $A \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$ и $B \subset \{0\} \times \mathbb{R}^n$. Тогда $(\mathbb{R}^{2n} \setminus A) \approx (\mathbb{R}^{2n} \setminus B)$ (часть I, теорема 6.5). Если $A \neq \mathbb{R}^n$ и $B \neq \mathbb{R}^n$, то требуемое утверждение легко вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Если $A \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество и $A \neq \mathbb{R}^n$, то $\tilde{H}_{k+i}(\mathbb{R}^{n+i} \setminus A) \cong \tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus A)$ для любого $i \geqslant 0$ (здесь подразумевается, что $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+i}$).*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $i = 1$, а затем применить индукцию. Положим $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$,

$$\begin{aligned} X_+ &= \{ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,|\, t > 0 \text{ или } x \in \mathbb{R}^n \setminus A \}, \\ X_- &= \{ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,|\, t < 0 \text{ или } x \in \mathbb{R}^n \setminus A \}. \end{aligned}$$

Множества X_+ и X_- открыты в X и $X_+ \cup X_- = X$, $X_+ \cap X_- = (\mathbb{R}^n \setminus A) \times \mathbb{R}$. Запишем точную последовательность Майера–Вьеториса для приведённых гомологий

$$\to \tilde{H}_{k+1}(X_+) \oplus \tilde{H}_{k+1}(X_-) \to \tilde{H}_{k+1}(X_+ \cup X_-) \to$$
$$\to \tilde{H}_k(X_+ \cap X_-) \to \tilde{H}_k(X_+) \oplus \tilde{H}_{k+1}(X_-) \to$$

Пространства X_+ и X_- стягиваемы, поэтому их приведённые гомологии нулевые, а значит, $\tilde{H}_{k+1}(X_+ \cup X_-) \cong \tilde{H}_k(X_+ \cap X_-)$, т.е. $\tilde{H}_{k+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \tilde{H}_k\left((\mathbb{R}^n \setminus A) \times \mathbb{R}\right) \cong \tilde{H}_{k+1}(\mathbb{R}^n \setminus A)$. □

Если $A \neq \mathbb{R}^n$, то согласно лемме $\tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong \tilde{H}_{k+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus A)$; если же $A = \mathbb{R}^n$, то мы сможем получить изоморфизм $\tilde{H}_k(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \tilde{H}_{k+n-1}(\mathbb{R}^{2n} \setminus A)$. Таким образом, если $A \neq \mathbb{R}^n$ и $B \neq \mathbb{R}^n$, то $\tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong \tilde{H}_k(\mathbb{R}^n \setminus B)$, поэтому $H_k(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H_k(\mathbb{R}^n \setminus B)$. Если же $A = \mathbb{R}^n$, то $\tilde{H}_k(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \tilde{H}_k(\mathbb{R}^{n+1} \setminus B)$. В частности, $\tilde{H}_0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \tilde{H}_0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus B)$. Множество $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$ состоит ровно из двух компонент связности, поэтому множество $\mathbb{R}^{n+1} \setminus B$

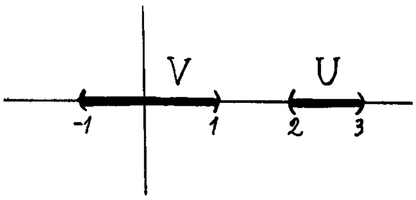

Рис. 4.2. Неинвариантность области

тоже состоит из двух компонент связности. Но это возможно лишь в том случае, когда $B = \mathbb{R}^n$. $\square$

Из теоремы Александера легко выводится следующее утверждение, доказанное Брауэром.

Теорема 4.1.6 (об инвариантности области). *Пусть U и V — гомеоморфные подмножества в $\mathbb{R}^n$, причём множество U открыто. Тогда множество V тоже открыто.*

Доказательство. Пусть $v_0 \in V$ — некоторая точка. Требуется доказать, что V содержит открытое в $\mathbb{R}^n$ множество, содержащее точку v_0. Рассмотрим гомеоморфизм $h : U \to V$ и положим $u_0 = h^{-1}(v_0)$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x - u_0\| \leqslant \varepsilon\} \subset U$. Согласно теореме Александера множество $\mathbb{R}^n \setminus h(D^n)$ связно, а множество $\mathbb{R}^n \setminus h(S^{n-1})$, где $S^{n-1} = \partial D^n$, состоит из двух компонент связности. Множества $\mathbb{R}^n \setminus h(D^n)$ и $h(D^n) \setminus h(S^{n-1}) = h(\operatorname{int} D^n)$ связны, а их объединение равно $\mathbb{R}^n \setminus h(S^{n-1})$. Поэтому именно эти множества являются компонентами связности. В частности, они являются открытыми подмножествами пространства $\mathbb{R}^n \setminus h(S^{n-1})$, которое является открытым подмножеством $\mathbb{R}^n$. Следовательно, множество $h(\operatorname{int} D^n) \ni h(u_0) = v_0$ открыто в $\mathbb{R}^n$. $\square$

Следствие (инвариантность края). *При гомеоморфизме $D^n \to D^n$ точка $x \in \partial D^n$ не может перейти во внутреннюю точку.*

Пример 4.1.5. *Пусть $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$, $U = \{\, (0,t) \,|\, 2 < t < 3 \,\}$ и $V = \{\, (0,t) \,|\, -1 < t < 1 \,\}$ (рис. 4.2). Тогда множества U и V гомеоморфны и U открыто в X, но множество V не открыто в X.*

Задача 4.1.4. *Пусть U и V — гомеоморфные подмножества $\mathbb{R}^n$, причём множество U замкнуто. Верно ли, что множество V тоже замкнуто?*

4.1.3. Изоморфизм между симплициальными и сингулярными гомологиями

Если K — симплициальный комплекс, то для него можно определить как симплициальные, так и сингулярные группы гомологий. Здесь мы докажем, что эти группы изоморфны. При построении цепного отображения, индуцирующего этот изоморфизм, удобно использовать не симплициальный цепной комплекс, а тотальный (упорядоченный) цепной комплекс $\hat{C}_*(K)$, группы гомологий которого изоморфны группам симплициальных гомологий (теорема 2.1.1 на с. 75).

Сопоставим k-мерному упорядоченному симплексу $(v_0, \ldots, v_k)$ сингулярный симплекс $f : [0, \ldots, k] \to [v_0, \ldots, v_k]$, где f — линейное отображение симплексов, переводящее точку i в точку v_i. Это сопоставление, продолженное по линейности, определяет гомоморфизм $j_k : \hat{C}_k(K) \to C_k(K)$, где $C_k(K)$ — сингулярный цепной комплекс. Непосредственно из определений граничных гомоморфизмов в $\hat{C}_*$ и в C_* видно, что j — цепное отображение. Поэтому j индуцирует гомоморфизм гомологий $j_* : H_k(\hat{C}_*(K)) \to H_k(K)$.

Теорема 4.1.7. j_* *— изоморфизм.*

Доказательство. Сначала мы рассмотрим случай, когда симплициальный комплекс K конечен. В этом случае доказательство проведём индукцией по n, где n — количество всех симплексов всех размерностей в K. Если $n = 1$, то K состоит из одной точки. Для одноточечного пространства очевиден изоморфизм даже на уровне цепей.

Предположим теперь, что j_* — изоморфизм для любого симплициального комплекса, содержащего менее n симплексов. Пусть K — симплициальный комплекс, содержащий ровно n симплексов. Рассмотрим в K симплекс Δ максимальной размерности. Симплекс Δ не является гранью из K, поэтому $K_1 = K \setminus \Delta$ — подкомплекс в K, содержащий менее n симплексов.

Для краткости введём обозначение $\hat{H}_k(K) = H_k(\hat{C}_*(K))$. Для гомологий $\hat{H}_k$ можно рассмотреть последовательность Майера–Вьеториса пары (Δ, K_1). Эта пара не удовлетворяет аксиоме вырезания, поэтому для сингулярных гомологий рассмотрим последовательность Майера–Вьеториса пары (Δ, K_1'), где $K_1' = K_1 \cup (\operatorname{int}\Delta \setminus \{x_0\})$, $x_0 \in \operatorname{int}\Delta$. В результате получим следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & \hat{H}_{k+1}(\partial\Delta) & \longrightarrow & \hat{H}_k(K) & \longrightarrow & \hat{H}_k(\Delta)\oplus\hat{H}_k(K_1) & \longrightarrow \\
& \big\downarrow{\scriptstyle\text{изо}} & & \big\downarrow{\scriptstyle ?} & & \big\downarrow{\scriptstyle\text{изо}} & \\
& H_{k+1}(\partial\Delta) & & H_k(K) & & H_k(\Delta)\oplus H_k(K_1) & \\
& \big\downarrow{\scriptstyle\text{изо}} & & \big\downarrow{\scriptstyle\text{изо}} & & \big\downarrow{\scriptstyle\text{изо}} & \\
\longrightarrow & H_{k+1}(\Delta\setminus\{x_0\}) & \longrightarrow & H_k(K) & \longrightarrow & H_k(\Delta)\oplus H_k(K_1') & \longrightarrow
\end{array}$$

Здесь верхние вертикальные стрелки — отображение j_*, нижние вертикальные стрелки — изоморфизмы, индуцированные гомотопическими эквивалентностями (или тождественными отображениями). Из 5-леммы следует, что отображение $j_*:\hat{H}_k(K)\to H_k(K)$ — изоморфизм (чтобы применить 5-лемму, нужно к написанному выше участку диаграммы дописать по одному члену справа и слева).

Рассмотрим теперь случай, когда симплициальный комплекс K бесконечен. Для любого $\alpha\in H_k(K)$ в K можно выбрать конечный подкомплекс L так, что α лежит в образе $H_k(L)$ при гомоморфизме, индуцированном включением $L\to K$. Следовательно, $j_*:\hat{H}_k(K)\to H_k(K)$ — эпиморфизм. Предположим теперь, что $\hat{\alpha}\in\hat{H}_k(K)$ и $j_*\hat{\alpha}=0$. На уровне цепей это означает, что сингулярная цепь $c_k\in C_k(K)$, соответствующая представителю гомологического класса $\hat{\alpha}$, является границей некоторой сингулярной цепи $\alpha_{k+1}\in C_{k+1}(K)$. Выберем в K конечный подкомплекс L так, чтобы он был носителем цепи α_{k+1}. В $H_k(L)$ цепь c_k представляет нулевой класс гомологий, поэтому $\hat{\alpha}=0$, т.е. j_* — мономорфизм. □

Теорема 4.1.8. *Если U — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, то $H_k(U)=$ $=0$ при $k\geqslant n$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный сингулярный цикл $z\in C_k(U)$, $k\geqslant n$. Требуется доказать, что $z=\partial w$, где w — сингулярная цепь в U. Пусть X — объединение всех образов сингулярных симплексов, входящих в z. Множество $X\subset U$ компактно, поэтому расстояние ε между X и $\mathbb{R}^n\setminus U$ положительно. Пусть K — симплекс в $\mathbb{R}^n$, содержащий U и триангулированный столь мелко, что диаметр любого симплекса триангуляции меньше ε. Рассмотрим в K подкомплекс L, состоящий из всех симплексов, пересекающих X. Мелкость триангуляции гарантирует, что $|L|\subset U$.

Запишем для пары (K, L) точную последовательность симплициальных гомологий:

$$\ldots \to H_k(K, L) \to H_k(L) \to H_k(K) \to \ldots$$

Здесь $H_k(K) = 0$, поскольку $K \approx \Delta^n$, и $H_{k+1}(K, L) = 0$, поскольку по условию $k + 1 \geqslant n + 1 > \dim K$. Следовательно, $H_k(L) = 0$.

Перейдём теперь к сингулярным гомологиям. Для сингулярных гомологий тоже выполняется равенство $H_k(|L|) = 0$. По построению $X \subset |L|$, поэтому z — сингулярный цикл в $|L|$, а значит, $z = \partial w$, где w — сингулярная цепь в $|L| \subset U$. $\square$

Замечание. Для замкнутого множества аналог теоремы 4.1.8 неверен. В статье [Ba] построен пример замкнутого подмножества в $\mathbb{R}^3$ с нетривиальными гомологиями в произвольно высоких размерностях.

Если воспользоваться свойствами нерва покрытия, изложенными в части I, то из теоремы 4.1.8 можно легко вывести известную теорему Хелли.

Теорема 4.1.9 (Хелли [He1]). *Пусть $U_1, \ldots, U_{n+1}$ — открытые выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$, любые n из которых имеют общую точку. Тогда и все эти множества имеют общую точку.*

Доказательство. Положим $X = U_1 \cup \ldots \cup U_{n+1}$ и рассмотрим для X покрытие $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $i = 1, \ldots, n+1$. Пусть N — нерв покрытия $\mathcal{U}$. Согласно теореме 8.10 из части I пространство X гомотопически эквивалентно $|N|$. Предположим, что $U_1 \cap \ldots \cap U_{n+1} = \varnothing$. Тогда N состоит из n-мерных граней симплекса Δ^{n+1}. Поэтому $|N| \sim S^n$; в частности, $H_n(X) \cong H_n(|N|) \cong H_n(S^n) \neq 0$. Это противоречит теореме 4.1.8. $\square$

Теорему Хелли (и даже некоторое более общее утверждение, тоже доказанное Хелли) можно вывести из теоремы 4.1.8, не обращаясь к свойствам нерва покрытия. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 4.1.1. *Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — ацикличные открытые подмножества топологического пространства X, причём пересечение любых r из них, где $1 \leqslant r \leqslant m - 1$, ациклично (в частности, непусто). Тогда:*

а) если $X_1 \cap \ldots \cap X_m = \varnothing$, то группа $\tilde{H}_q(X_1 \cup \ldots \cup X_m)$ отлична от нуля в точности при $q = m - 2$;

б) если $X_1 \cap \ldots \cap X_m \neq \varnothing$, то $\tilde{H}_q(X_1 \cup \ldots \cup X_m) \cong \tilde{H}_{q-m+1}(X_1 \cap \ldots \cap X_m)$ для всех q.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $m = 2$. Если $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, то $X_1 \cup X_2$ представляет собой объединение двух непересекающихся ацикличных пространств. Поэтому $\tilde{H}_0(X_1 \cup X_2) \neq 0$ и $\tilde{H}_q(X_1 \cup X_2) = 0$ при $q \neq 0$. Если же $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, то приведённая последовательность Майера–Вьеториса

$$\tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \to \tilde{H}_q(X_1 \cup X_2) \to \\ \to \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) \to \tilde{H}_{q-1}(X_1) \oplus \tilde{H}_{q-1}(X_2)$$

показывает, что $\tilde{H}_q(X_1 \cup X_2) \cong \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2)$, поскольку $\tilde{H}_{q-1}(X_i) = 0$ для всех q.

Применим теперь индукцию по m. По предположению индукции пространство $U_1 = X_1 \cup \ldots \cup X_{m-1}$ ациклично, поскольку $X_1 \cap \ldots \cap X_{m-1} \neq \varnothing$. Приведённая последовательность Майера–Вьеториса показывает, что $\tilde{H}_q(U_1 \cup X_m) \cong \tilde{H}_{q-1}(U_1 \cap X_m)$. При этом $U_1 \cap X_m = (X_1 \cap X_m) \cup \ldots \cup (X_{m-1} \cap X_m)$. Применим предположение индукции к множествам $X_1 \cap X_m, \ldots, X_{m-1} \cap X_m$. Ясно, что пересечения r из этих множеств — это пересечение $r+1$ из множеств $X_1, \ldots, X_m$. Предположим, что $X_1 \cap \ldots \cap X_m = \varnothing$ (это эквивалентно тому, что пересечение рассматриваемых множеств $X_1 \cap X_m, \ldots, X_{m-1} \cap X_m$ пусто). По предположению индукции группа $\tilde{H}_{q-1}(U_1 \cap X_m)$ отлична от нуля тогда и только тогда, когда $q - 1 = (m-1) - 2$, т.е. $q = m - 2$. Предположим теперь, что $X_1 \cap \ldots \cap X_m \neq \varnothing$. Тогда $\tilde{H}_{q-1}(U_1 \cap X_m) \cong \tilde{H}_{(q-1)-(m-1)+1}(X_1 \cap \ldots \cap X_m)$. Но $(q-1) - (m-1) + 1 = q - m + 1$. □

Теперь мы можем доказать следующее утверждение, частным случаем которого является обычная теорема Хелли.

Теорема 4.1.10 (Хелли [He2]). *Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — конечный набор открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$, причём пересечение любых r из этих множеств непусто при $r \leqslant n+1$ и ациклично при $r \leqslant n$. Тогда пространство $X_1 \cap \ldots \cap X_m$ ациклично (в частности, непусто).*

Доказательство. [De] Предположим, что теорема Хелли неверна для набора множеств $X_1, \ldots, X_m$, причём число m здесь наименьшее. Из минимальности m следует, что пересечение любых $r \leqslant m-1$ множеств $X_1, \ldots, X_m$ ациклично.

Рассмотрим сначала случай, когда $X_1 \cap \ldots \cap X_m = \varnothing$. Это может быть лишь при $m > n+1$. Применив утверждение (а) леммы 4.1.1, получим $\tilde{H}_{m-2}(X_1 \cup \ldots \cup X_m) \neq 0$. С другой стороны, $m - 2 \geqslant n$, поэтому согласно теореме 4.1.8 $\tilde{H}_{m-2}(X_1 \cup \ldots \cup X_m) = 0$. Получено противоречие.

Рассмотрим теперь случай, когда $X_1 \cap \ldots \cap X_m \neq \varnothing$. По предположению пространство $X_1 \cap \ldots \cap X_m$ не ациклично. Это может быть лишь при $m > n$. Существует $p \geqslant 0$, для которого $\tilde{H}_p(X_1 \cup \ldots \cup X_m) \neq 0$. Запишем число p в виде $p = q - m + 1$. Согласно утверждению (б) леммы 4.1.1 $\tilde{H}_q(X_1 \cap \ldots \cap X_m) \neq 0$. Но $q = p + m - 1 \geqslant n$. Это противоречит теореме 4.1.8. $\square$

Клеточные гомологии

Для произвольного CW-комплекса X можно определить клеточные гомологии подобно тому, как это делалось в случае симплициальных комплексов. Только теперь вместо симплициальных гомологий нужно взять сингулярные гомологии. Воспользовавшись задачей 4.1.3, получаем $H_i(X^k, X^{k-1}) \cong H_i(X^k/X^{k-1}) \cong H_i(\vee_\alpha S^k_\alpha)$ при $i \geqslant 1$. Поэтому $H_i(X^k, X^{k-1}) = 0$ при $i \neq k$, а при $i = k$ эта группа — свободная[1] абелева группа, образующие которой находятся во взаимно однозначном соответствии с k-мерными клетками X.

Как и в симплициальном случае, положим $C_k = H_i(X^k, X^{k-1})$ и определим гомоморфизм $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$. Снова доказываем, что $H_{k-1} \cong \operatorname{Ker} \partial_{k-1} / \operatorname{Im} \partial_k$ и $H_{k-1}(X) \cong H_{k-1}(X^k)$. При доказательстве последнего изоморфизма нужно воспользоваться тем, что любая сингулярная цепь лежит в некотором конечномерном остове X^N.

Если воспользоваться клеточными гомологиями, то следующее утверждение становится очевидным. *Пусть X — CW-комплекс, содержащий m_k клеток размерности k. Тогда ранг группы $H_k(X)$ не превосходит m_k.* Это утверждение нам понадобится при доказательстве неравенств Морса.

4.1.4. Неравенства Морса

Пусть M^n — замкнутое многообразие, f — функция Морса на нём с попарно различными критическими значениями. Для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$ многообразию можно сопоставить число $r_k = \operatorname{rk} H_k(M^n)$, а функции — число m_k, равное количеству критических точек индекса k. Эти числа связаны определёнными соотношениями и неравенствами.

[1] В этой группе встречаются лишь конечные суммы клеток, поскольку образ симплекса при непрерывном отображении компактен, а любое компактное подмножество CW-комплекса пересекает лишь конечное число открытых клеток.

Прежде всего отметим, что $\sum(-1)^k r_k = \chi(M^n) = \sum(-1)^k m_k$. Несложно также доказать неравенство $r_k \leqslant m_k$. Действительно, в комплексе для вычисления клеточных гомологий M^n группа цепей C_k равна $\mathbb{Z}^{m_k}$. Ясно, что при факторизации $\mathbb{Z}^{m_k}$ получается группа, ранг которой не превосходит m_k. Более внимательное изучение этого цепного комплекса приводит к следующему более точному неравенству.

Теорема 4.1.11. *Пусть t_k — минимальное число образующих группы кручения T_k в $H_k(M^n)$. Тогда*

$$r_k + t_k + t_{k-1} \leqslant m_k.$$

Доказательство. Группы T_k и T_{k-1} получаются при факторизации свободных абелевых подгрупп F_k и F_{k-1} ранга t_k и t_{k-1}, содержащихся в C_k и C_{k-1}. При этом для группы F_{k-1} есть свободная абелева группа $F'_{k-1} \subset C_k$ ранга t_{k-1}, эпиморфно отображающаяся на F_{k-1} при отображении ∂_k, а для группы F_k — аналогичная группа $F'_k \subset C_{k+1}$.

Рассмотрим в C_k подгруппы F_k, F'_{k-1} и ещё свободную подгруппу S_k ранга r_k, которая лежит в $\operatorname{Ker}\partial_k$ и пересекается с $\operatorname{Im}\partial_{k+1}$ только по нулю; эта подгруппа соответствует свободному слагаемому группы $H_k(M^n)$. Группа F_k содержится в $\operatorname{Im}\partial_{k+1}$, поэтому сумма $F_k + S_k$ прямая. Далее, $\partial_k(F_k \oplus S_k) = 0$, а $\partial_k F'_{k-1} = F_{k-1}$, где F'_{k-1} и F_{k-1} — свободные абелевы группы одного ранга. Поэтому сумма $F'_{k-1} + F_k \oplus S_k$ тоже прямая. Таким образом, группа C_k, ранг которой равен m_k, содержит свободную абелеву подгруппу ранга $t_{k-1} + t_k + r_k$, поэтому $t_{k-1} + t_k + r_k \leqslant m_k$. □

Числа r_k и m_k связаны также следующей серией неравенств.

Теорема 4.1.12. *а) Для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$ имеет место неравенство*

$$r_k - r_{k-1} + r_{k-2} - \ldots \pm r_0 \leqslant m_k - m_{k-1} + m_{k-2} - \ldots \pm m_0$$

(при $k = n$ неравенство обращается в равенство).

б) Пусть $M(t) = \sum m_k t^k$ и $R(t) = \sum r_k t^k$. Тогда многочлен $M(t) - R(t)$ делится на $1 + t$, причём коэффициенты многочлена $\frac{M(t)-R(t)}{1+t}$ неотрицательны.

Доказательство. Легко проверить, что утверждение а) следует из утверждения б). Действительно, пусть $\sum(m_k - r_k)t^k = \sum(1+t)d_k t^k$, где $d_k \geqslant 0$. Тогда $m_0 - r_0 = d_0 \geqslant 0$, $m_1 - r_1 - (m_0 - r_0) = d_1 \geqslant 0$, $m_2 - r_2 - (m_1 - r_1) + (m_0 - r_0) = d_2 \geqslant 0$ и т.д. Ясно также, что $d_m = 0$. Таким образом, достаточно доказать утверждение б).

Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ — критические значения функции f. Выберем числа $b_1, \ldots, b_{m+1}$ так, что $-\infty < b_1 < a_1 < b_2 < \ldots < a_m < b_{m+1} < \infty$ и рассмотрим многообразия $M_p = \{x \in M^n | f(x) \leqslant b_p\}$, $p = 1, 2, \ldots, m+1$. Рассмотрим также многочлены $R_p(t) = \sum \operatorname{rk} H_k(M_p)t^k$ и $R_{pq}(t) = \sum \operatorname{rk} H_k(M_p, M_q)t^k$ для $p > q$. Запишем точную последовательность пары (M_p, M_q):

$$H_{k+1}(M_p, M_q) \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(M^n) \xrightarrow{i} H_k(M_p) \xrightarrow{\pi} H_k(M_p, M_q) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(M_q)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \operatorname{rk} H_k(M_p, M_q) &= \operatorname{rk} \operatorname{Im} \pi + \operatorname{rk} \operatorname{Im} \partial_k, \\ \operatorname{rk} \operatorname{Im} \pi &= \operatorname{rk} H_k(M_p) - \operatorname{rk} \operatorname{Im} i = \\ &= \operatorname{rk} H_k(M_p) - \big(\operatorname{rk} H_k(M_q) - \operatorname{rk} \operatorname{Im} \partial_k\big). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\operatorname{rk} H_k(M_p, M_q) - \big(\operatorname{rk} H_k(M_p) - \operatorname{rk} H_k(M_q)\big) = \operatorname{rk} \operatorname{Im} \partial_k + \operatorname{rk} \operatorname{Im} \partial_{k+1},$$

а значит,

$$R_{pq}(t) - \big(R_p(t) - R_q(t)\big) = (1+t)d_{pq}(t),$$

где d_{pq} — многочлен с неотрицательными коэффициентами. Ясно также, что

$$\sum_{p=1}^{m} \big(R_{p+1}(t) - R_p(t)\big) = R_{m+1}(t) = R(t),$$

поэтому остаётся доказать, что $\sum_{p=1}^{m} R_{p+1,p}(t) = M(f)$. Для этого достаточно проверить, что $R_{p+1,p}(t) = t^\mu$, где μ — индекс критической точки между уровнями $f(x) = b_{p+1}$ и $f(x) = b_p$. Но $M_{p+1} \approx M_p \cup (S^\mu \times D^{n-\mu})$, поэтому $H_k(M_{p+1}, M_p) \cong H_k\big(M_p \cup (S^\mu \times D^{n-\mu}), M_p\big) \cong \tilde{H}_k(S^\mu \times D^{n-\mu}) \cong \tilde{H}_k(S^\mu)$. □

4.1.5. Умножения

Теорема Эйленберга–Зильбера

Пусть $\mathcal{T}$ — категория топологических пространств и непрерывных отображений; $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ — категория, объектами которой служат упорядоченные пары топологических пространств (X, Y), а морфизмами — упорядоченные пары непрерывных отображений $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$. Определим два функтора T и T' из категории $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ в категорию неотрицательных цепных комплексов:

- функтор T сопоставляет паре (X, Y) сингулярный цепной комплекс $C_*(X \times Y)$;
- функтор T' сопоставляет паре (X, Y) тензорное произведение $C_*(X) \otimes C_*(Y)$.

Напомним, что тензорное произведение цепных комплексов определяется так:

$$\big(C_*(X) \otimes C_*(Y)\big)_k = \bigoplus_{p+q=k} C_p(X) \otimes C_q(Y),$$
$$\partial(c_p \otimes c_q) = \partial c_p \otimes c_q + (-1)^p c_p \otimes \partial c_q.$$

Функторы T и T' ацикличны относительно моделей $\mathcal{M} = \{(\Delta^p, \Delta^q)\}$, где p и q пробегают все целые неотрицательные числа. Действительно, ацикличность функтора T очевидна, поскольку пространство $\Delta^p \times \Delta^q$ стягиваемо. Чтобы доказать ацикличность функтора T', достаточно проверить, что если цепные комплексы C'_* и C''_* ацикличны, то цепной комплекс $C'_* \otimes C''_*$ тоже ацикличен. Это легко выводится из алгебраической теоремы Кюннета.

Функтор T' свободен относительно моделей $\mathcal{M}$. Действительно, базисом свободной группы $C_p(X) \otimes C_q(Y)$ служат сингулярные цепи вида $c_p \otimes c_q$, находящиеся во взаимно однозначном соответствии с парами отображений $f : \Delta^p \to X$, $g : \Delta^q \to Y$. Поэтому в качестве элемента $e_{p,q} \in C_*(\Delta^p) \otimes C_*(\Delta^q)$ можно взять сингулярную цепь $\Delta^p \times \Delta^q$.

Функтор T свободен относительно моделей $\{(\Delta^k, \Delta^k)\} \subset \mathcal{M}$. Действительно, базисом свободной группы $C_k(X \times Y)$ служат сингулярные цепи, находящиеся во взаимно однозначном соответствии с отображениями $F : \Delta^k \to X \times Y$. Любое такое отображение задаётся парой отображений $f : \Delta^k \to X$, $g : \Delta^k \to Y$. Пусть $d_k : \Delta^k \to \Delta^k \times \Delta^k$ — диагональное отображение. Тогда F можно представить в виде композиции отображений $\Delta^k \xrightarrow{d_k} \Delta^k \times \Delta^k \xrightarrow{(f,g)} X \times Y$. Поэтому в качестве элемента $e_k \in C_*(\Delta^k \times \Delta^k)$ можно взять сингулярную цепь, соответствующую отображению d_k.

Из алгебраической теоремы Кюннета следует, что имеется канонический изоморфизм $H_0\big(C_*(X) \otimes C_*(Y)\big) \cong H_0(X) \otimes H_0(Y)$. Ясно также, что компоненты линейной связности пространства $X \times Y$ являются произведениями компонент линейной связности пространств X и Y. Поэтому существует естественный изоморфизм $\varphi : H_0(X) \otimes H_0(Y) \to H_0\big(C_*(X) \otimes C_*(Y)\big)$. Теорему об ациклических моделях можно применить как к отображению φ, так и к отображению φ^{-1}. В результате получим цепные отображения

$\tau : C_*(X \times Y) \to C_*(X) \otimes C_*(Y)$ и $\bar{\tau} : C_*(X) \otimes C_*(Y) \to C_*(X \times Y)$, которые в гомологиях размерности 0 индуцируют, соответственно, отображения φ и φ^{-1}.

Цепное отображение $\bar{\tau} \circ \tau$ индуцирует тождественное отображение группы $H_0(X \times Y)$, поэтому согласно теореме об ациклических моделях отображение $\bar{\tau} \circ \tau$ цепно гомотопно тождественному отображению. Аналогично отображение $\tau \circ \bar{\tau}$ тоже цепно гомотопно тождественному отображению. Следовательно, отображение $\tau_* : H_*(X \times Y) \to H_*\big(C_*(X) \otimes C_*(Y)\big)$ — изоморфизм. В итоге получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1.13 (Эйленберг–Зильбер [Ei5]). *Для произвольных топологических пространств X и Y группы $H_k(X \times Y)$ и $H_k\big(C_*(X) \otimes C_*(Y)\big)$ изоморфны.*

Объединив теорему Эйленберга–Зильбера с алгебраической теоремой Кюннета, получим *теорему Кюннета* для сингулярных гомологий.

Теорема 4.1.14. *Для произвольных топологических пространств X и Y имеет место изоморфизм*

$$H_k(X \times Y) \cong \big(H_*(X) \otimes H_*(Y)\big)_k \oplus \Big(\operatorname{Tor}\big(H_*(X) H_*(Y)\big)\Big)_{k-1}.$$

Диагональная аппроксимация Александера–Уитни

Пусть X — топологическое пространство, $d : X \to X \times X$ — диагональное отображение, $d_* : C_*(X) \to C_*(X \times X)$ — индуцированное им цепное отображение, $\tau : C_*(X \times X) \to C_*(X) \otimes C_*(X)$ — функториальное цепное отображение, индуцирующее изоморфизм гомологий. Рассмотрим композицию отображений

$$C_*(X) \xrightarrow{d_*} C_*(X \times X) \xrightarrow{\tau} C_*(X) \otimes C_*(X).$$

Цепное отображение $\tau d_* : C_*(X) \to C_*(X) \otimes C_*(X)$ функториально и переводит любой 0-мерный симплекс v в $v \otimes v$. Будем называть любое функториальное цепное отображение $D_0 : C_*(X) \to C_*(X) \otimes C_*(X)$, переводящее v и $v \otimes v$, *диагональной аппроксимацией*. Из теоремы об ациклических моделях легко выводится, что любая диагональная аппроксимация цепно гомотопна τd_*. Действительно, функтор $C_*(X)$ свободен относительно моделей $\mathcal{M} = \{\Delta^k\}$, а функтор $C_*(X) \otimes C_*(X)$ ацикличен относительно этих моделей.

Для сингулярных когомологий cup-произведение определяется следующим образом. Пусть $c^p \in C^p(X; R)$ и $c^q \in C^q(X; R)$, где R — некоторое коммутативное кольцо с единицей. Тогда коцепь $c^p \smile c^q$ принимает

на цепи $c^{p+q} \in C^{p+q}(X; R)$ значение $\langle c^p \otimes c^q, D_0 c^{p+q}\rangle$. Здесь имеется в виду, что
$$\langle c^p \otimes c^q, c_i \otimes c_j\rangle = \delta_{pi}\delta_{qj}\langle c^p, c_i\rangle\langle c^q, c_j\rangle.$$

На уровне коцепей cup-произведение зависит от выбора диагональной аппроксимации D_0, но на уровне когомологий cup-произведение определено инвариантно.

Для вычислений удобно иметь диагональную аппроксимацию, которая задаётся простой формулой. Для этих целей лучше всего подходит *диагональная аппроксимация Александера–Уитни*
$$[0, 1, \ldots, n] \mapsto \sum_{i=0}^{n} [0, \ldots, i] \otimes [i, \ldots, n];$$
здесь имеется в виду, что $[0, 1, \ldots, n]$ — сингулярный симплекс $f\colon [0, 1, \ldots, n] \to X$, а $[0, \ldots, i]$ и $[i, \ldots, n]$ — ограничения f на соответствующие грани. Нужно лишь проверить, что это отображение цепное. Это делается точно так же, как и в симплициальном случае (см. с. 120).

Для диагональной аппроксимации Александера–Уитни на уровне коцепей cup-произведение устроено следующим образом:
$$\langle c^p \smile c^q, [0, 1, \ldots, p+q]\rangle = \langle c^p, [0, \ldots, p]\rangle\langle c^q, [p, \ldots, p+q]\rangle.$$

Определим теперь cap-произведение. Коцепь $c^p \in C^p(X; R)$ можно рассматривать как гомоморфизм $c^p\colon C_*(X) \to R$ (при $i \neq p$ на i-мерных цепях гомоморфизм нулевой). Рассмотрим композицию отображений
$$C_*(X) \xrightarrow{D_0} C_*(X) \otimes C_*(X) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes c^p} C_*(X) \otimes R.$$
Домножим это тензорно на R, а потом ещё применим умножение $\mu\colon R \otimes R \to R$ в кольце R:
$$C_*(X) \otimes R \xrightarrow{D_0\otimes \mathrm{id}} C_*(X) \otimes C_*(X) \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes c^p \otimes \mathrm{id}}$$
$$\to C_*(X) \otimes R \otimes R \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mu} C_*(X) \otimes R.$$
Образ цепи $c_{p+q} \in C_{p+q}(X; R) = C_{p+q}(X) \otimes R$ обозначим $c^p \frown c_{p+q}$. На уровне (ко)гомологий cap-произведение не зависит от выбора диагональной аппроксимации D_0. Для диагональной аппроксимации Александера–Уитни получаем обычное определение cap-произведения:
$$c^p \frown [0, 1, \ldots, p+q] = \langle c^p, [q, \ldots, p+q]\rangle[0, \ldots, q].$$

Относительный случай

В относительном случае функториальная цепная эквивалентность $C_*(X \times Y)$ и $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ заменяется на функториальную цепную эквивалентность $C_*\big(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)\big)$ и $C_*(X, A) \otimes C_*(Y, B)$. Но при этом пространства $\{X \times B, A \times Y\}$ должны удовлетворять аксиоме вырезания. Эта цепная эквивалентность строится следующим образом. Если пространства $\{X \times B, A \times Y\}$ удовлетворяют аксиоме вырезания, то естественное включение

$$C_*(X \times B) + C_*(A \times Y) \to C_*\big((X \times B) \cup (A \times Y)\big)$$

индуцирует изоморфизм гомологий. Значит, естественное отображение

$$\frac{C_*(X \times Y)}{C_*(X \times B) + C_*(A \times Y)} \to \frac{C_*(X \times Y)}{C_*\big((X \times B) \cup (A \times Y)\big)}$$

тоже индуцирует изоморфизм гомологий. Далее, функториальная цепная эквивалентность $C_*(X) \otimes C_*(Y) \to C_*(X \times Y)$ переводит $C_*(X) \otimes C_*(B)$ и $C_*(X \times B)$, а $C_*(A) \otimes C_*(Y)$ — в $C_*(A \times Y)$. Поэтому получаем цепную эквивалентность между $\frac{C_*(X \times Y)}{C_*(X \times B) + C_*(A \times Y)}$ и

$$\frac{C_*(X) \otimes C_*(Y)}{C_*(X) \otimes C_*(B) + C_*(A) \otimes C_*(Y)} \cong \frac{C_*(X)}{C_*(A)} \oplus \frac{C_*(Y)}{C_*(B)}.$$

Композиция этих двух цепных эквивалентностей и есть требуемая цепная эквивалентность.

Используя эту цепную эквивалентность, можно получить *теорему Кюннета* для относительных гомологий:

$$H_k\big(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)\big) \cong$$
$$\cong \big(H_*(X, A) \otimes H_*(Y, B)\big)_k \oplus \Big(\operatorname{Tor}\big(H_*(X, A), H_*(Y, B)\big)\Big)_{k-1}.$$

Кроме того, можно определить внешнее гомологическое умножение

$$H_p(X, A) \otimes H_q(Y, B) \to H_{p+q}\big(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)\big)$$

и внешнее когомологическое умножение

$$H^p(X, A) \otimes H^q(Y, B) \to H^{p+q}\big(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)\big).$$

При построении cup-произведения в относительном случае, т.е. для $H^p(X, A_1)$ и $H^q(X, A_2)$, возникают когомологии комплекса коцепей, обращающихся в нуль на $C_*(A_1) + C_*(A_2)$, а при построении cap-произведения возникают гомологии комплекса $\frac{C_*(X)}{C_*(A_1) + C_*(A_2)}$. Поэтому если множества $\{A_1, A_2\}$ в X удовлетворяют аксиоме вырезания, то определено cup-произведение

$$H^p(X, A_1) \otimes H^q(X, A_2) \to H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2)$$

и cap-произведение

$$H^p(X, A_1) \otimes H_{p+q}(X, A_1 \cup A_2) \to H_q(X, A_2).$$

Когомологии произведения: частный случай

Теорема Кюннета для когомологий доказывается более сложно, чем для гомологий (более того, она верна лишь при некоторых условиях конечности). Доказывать теорему Кюннета в общем виде мы не будем, но в дальнейшем для нас будет важен один частный случай теоремы Кюннета, а именно, выражение когомологий пары $\big(X \times \mathbb{R}^n, X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})\big)$ через когомологии пространства X и когомологии пары $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Для начала вычислим когомологии $H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Когомологическая последовательность пары $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ показывает, что $H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}^{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})\tilde{H}^{k-1}(S^{n-1})$. Поэтому группа $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ изоморфна аддитивной группе кольца коэффициентов, а все остальные группы $H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), k \neq n$, нулевые.

Для краткости введём обозначения $\mathbb{R}^n_0 = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$. Имеет место изоморфизм вырезания $H^0(\mathbb{R}_+) \cong H^0(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_-)$. Запишем точную последовательность тройки $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0, \mathbb{R}_-)$:

$$H^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-) \to H^0(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_-) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0) \to H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-).$$

Покажем, что $H^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-) = H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-) = 0$, а значит, δ — изоморфизм. Равенство $H^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-) = 0$ следует из связности $\mathbb{R}$, а равенство $H^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-) = 0$ при $k > 0$ следует из точности последовательности пары $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-)$:

$$H^k(\mathbb{R}) \to H^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}_-) \to H^{k+1}(\mathbb{R}_-).$$

Пусть e — образ элемента $1 \in H^0(\mathbb{R}_+)$, соответствующего единичному элементу кольца коэффициентов, при композиции изоморфизмов

$$H^0(\mathbb{R}_+) \cong H^0(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_-) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0).$$

Группа $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)$ изоморфна аддитивной группе кольца коэффициентов, и элемент e является единицей этого кольца.

Внешнее когомологическое произведение классов когомологий пар (X, A) и (Y, B) лежит в когомологиях пары $\big(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)\big)$. Будем для краткости обозначать эту пару $(X, A) \times (Y, B)$.

Легко проверить, что $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0) \times (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m_0) = (\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^{n+m}_0)$. Действительно, пусть $u \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^m$. Тогда $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_0$ состоит из таких пар (u, v), что $v \neq 0$, а $\mathbb{R}^n_0 \times \mathbb{R}^m$ состоит из таких пар (u, v), что $u \neq 0$. Ясно, что объединение этих множеств состоит из ненулевых векторов в $\mathbb{R}^{n+m}$.

Рассмотрим элемент $e^n = \underbrace{e \times \ldots \times e}_{n}$, который лежит в $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0)$.

Теорема 4.1.15. *Пусть $A \subset X$ — открытое подмножество. Тогда отображение*

$$H^k(X, A) \to H^{k+n}((X, A) \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0)),$$

заданное формулой $\alpha \mapsto \alpha \times e^n$, является изоморфизмом.

Доказательство. Предположим сначала, что $n = 1$ и $A = \varnothing$. Для фиксированного элемента $\alpha \in H^k(X)$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(\mathbb{R}_+) & \overset{\cong}{\longleftarrow} & H^0(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_-) & \overset{\delta}{\longrightarrow} & H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^0) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \alpha\times} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha\times} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha\times} \\
H^k(X) \cong H^k(X \times \mathbb{R}_+) & \overset{\cong}{\longleftarrow} & H^k(X \times \mathbb{R}_0, X \times \mathbb{R}_-) & \overset{\delta'}{\longrightarrow} & H^{k+1}(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}^0),
\end{array}$$

где горизонтальные стрелки в левом квадрате — изоморфизмы вырезания, а δ' — гомоморфизм из когомологической последовательности тройки $(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_0, X \times \mathbb{R}_-)$. Левый квадрат диаграммы коммутативен, а правый квадрат коммутативен с точностью до знака, поскольку $\delta'(\alpha \times x) = (-1)^k \alpha \times \delta x$. Гомоморфизм δ' является изоморфизмом, поскольку $H^i(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_-) = 0$ при $i > 0$ (оба пространства $X \times \mathbb{R}$ и $X \times \mathbb{R}_-$ являются деформационными ретрактами одного и того же пространства $X \times \{-1\}$). В итоге получаем, что элемент $\alpha \times e \in H^{k+1}(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_0)$ является образом элемента $\alpha \in H^k(X)$ при композиции изоморфизмов.

Предположим теперь, что $n = 1$, но $A \neq \varnothing$. Пусть $z \in Z^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)$ — коцикл, представляющий когомологический класс e. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & C^k(X, A) & \to & C^k(X) & \to & C^k(A) & \to & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \times z} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \times z} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \times z} & & \\
0 & \to & C^{k+1}\big((X, A) \times (\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)\big) & \to & C^{k+1}(X \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}_0) & \to & C^{k+1}(A \times \mathbb{R}, A \times \mathbb{R}_0) & \to & 0
\end{array}$$

с точными строками. Вертикальные отображения коцепные, поскольку $\delta(c \times z) = (\delta c) \times z$. Поэтому мы получаем коммутативную диаграмму для групп когомологий

$$\begin{CD}
\to @. H^k(X,A) @>>> H^k(X) @>>> H^k(A) @. \to\\
@. @VV{\times e}V @VV{\times e}V @VV{\times e}V\\
\to @. H^{k+1}\big((X,A)\times(\mathbb{R},\mathbb{R}_0)\big) @>>> H^{k+1}(X\times\mathbb{R},X\times\mathbb{R}_0) @>>> H^{k+1}(A\times\mathbb{R},A\times\mathbb{R}_0) @. \to
\end{CD}$$

Мы уже доказали, что для абсолютных когомологий вертикальные отображения — изоморфизмы. Поэтому из 5-леммы следует, что для относительных когомологий вертикальные отображения тоже изоморфизмы.

Требуемое утверждение для произвольного n следует из разобранного случая $n=1$, поскольку в силу ассоциативности внешнего умножения $a\times e^n=(a\times e^{n-1})\times e$. □

4.1.6. Симплициальный объём (норма Громова)

Пусть M^n — замкнутое ориентируемое многообразие. Каждой сингулярной цепи $\sum\alpha_i f_i\in C_k(M^n;\mathbb{R})$ можно сопоставить её норму $\|\sum\alpha_i f_i\|=\sum|\alpha_i|$. Эта норма переносится на гомологии $H_k(M^n;\mathbb{R})$ следующим образом: гомологическому классу $\zeta\in H_k(M^n;\mathbb{R})$ сопоставляется число

$$\|\zeta\|=\inf\{\|z\| :\ \text{цикл } z \text{ представляет класс } \zeta\ \}.$$

Симплициальный объём, или *норма Громова*, многообразия M^n — это $\|[M^n]\|$, где $[M^n]\in H_n(M^n;\mathbb{R})$ — фундаментальный класс многообразия M^n. Симплициальный объём обозначают $\|M^n\|$; его свойства подробно обсуждаются в [Gr4].

Пример 4.1.6. $\|S^1\|=0$.

Доказательство. Пусть $f_n:[0,\,1]\to S^1$ — отображение, заданное формулой $f_n(t)=e^{2\pi int}$. Тогда f_n — цикл, представляющий гомологический класс $n[S^1]$. Поэтому класс $[S^1]$ представлен циклом $\frac{1}{n}f_n$, норма которого равна $\frac{1}{n}$. □

Конструкцию из примера 4.1.6 можно применить для любого замкнутого ориентируемого многообразия M^n, для которого существует отображение $M^n\to M^n$ сколь угодно большой степени. Такие отображение легко строятся, например, для сферы S^n и для тора T^n (достаточно построить отображение, степень которого больше 1). Поэтому $\|S^n\|=0$ и $\|T^n\|=0$.

Пример 4.1.7. *Если M_g^2 — сфера с g ручками, где $g \geqslant 2$, то $\|M_g^2\| = 2|\chi(M_g^2)| = 2(2g-2)$.*

Доказательство. Многообразие M_g^2 можно склеить из $4g$-угольника. Этот $4g$-угольник можно разрезать на $4g-2$ треугольника. Поэтому

$$\|M_g^2\| \leqslant 2|\chi(M_g^2)| + 2. \tag{1}$$

Применим неравенство (1) к многообразию N^2, которое n-листно накрывает M_g^2. В результате получим $n\|M_g^2\| \leqslant \|N^2\| \leqslant 2|\chi(N^2)| + 2 = 2|\chi(N^2)| + 2 = 2|n\chi(M_g^2)| + 2$. При $n \to \infty$ получаем $\|M_g^2\| \leqslant 2|\chi(M_g^2)|$.

Докажем теперь неравенство $\|M_g^2\| \geqslant 2|\chi(M_g^2)|$. Пусть $f : \Delta^2 \to M_g^2$ — сингулярный 2-мерный симплекс. Рассмотрим универсальное накрытие $p : H^2 \to M_g^2$, где H^2 — плоскость Лобачевского; будем считать, что M_g^2 — риманово многообразие, на котором метрика согласована с метрикой плоскости Лобачевского. Для отображения f существует поднятие $\tilde{f} : \Delta^2 \to H^2$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\Delta^2 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, equal] & H^2 \arrow[d, "p"] \\
\Delta^2 \arrow[r, "f"] & M_g^2
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Заменим сингулярный симплекс $\tilde{f}$ на сингулярный симплекс $\tilde{f}'$, образом которого служит треугольник в плоскости Лобачевского с теми же вершинами. Если цикл $\sum \alpha_i f_i$ представляет фундаментальный класс $[M_g^2]$, то цикл $\sum \alpha_i p(\tilde{f}_i')$ тоже представляет фундаментальный класс. При этом $2\pi|\chi(M_g^2)| = \operatorname{vol}(M_g^2) \leqslant \sum |\alpha_i| \operatorname{vol}\bigl(p(\tilde{f}_i'(\Delta^2)\bigr)$. Неравенство здесь связано с тем, что некоторые перекрывающиеся части симплексов могут взаимно сокращаться; если бы таких взаимных сокращений не было, то мы получили бы равенство. Наконец, площадь любого треугольника на плоскости Лобачевского не превосходит π, поэтому $\operatorname{vol}\bigl(p(\tilde{f}_i'(\Delta^2)\bigr) \leqslant \pi$. Следовательно, $2|\chi(M_g^2)| \leqslant \sum |\alpha_i| \leqslant \|M_g^2\|$. □

Пример 4.1.7 допускает следующее обобщение. Пусть M^n — замкнутое ориентируемое *гиперболическое* многообразие, т.е. универсальным накрытием для (риманова) многообразия M^n служит пространство Лобачевского H^n. Тогда $\|M^n\| = \operatorname{vol}(M^n)/\operatorname{vol}(\Delta^n)$, где Δ^n — симплекс максимального объёма в H^n. Это утверждение доказано Тёрстоном [Th3]; см. также [Mu1].

4.1.7. Когомологии с некоммутативными коэффициентами и теорема ван Кампена

Для неабелевой группы коэффициентов G в [Ol] определены когомологии H^0 и H^1. Делается это следующим образом. Коцепь $c^n \in C^n(X;G)$ (произвольной размерности) определяется как функция, которая каждому сингулярному симплексу $\Delta^n \to X$ сопоставляет элемент группы G (относительная коцепь $c^n \in C^n(X,Y;G)$ должна обращаться в нуль на симплексах $\Delta^n \to Y$). Групповую операцию по-прежнему будем записывать аддитивно, несмотря на то, что она теперь некоммутативна. Назовём 1-мерную коцепь $z^1 \in C^n(X,Y;G)$ ***коциклом***, если для любого сингулярного симплекса $f : \Delta^2 \to X$ выполняется равенство

$$z^1(f\varepsilon_0^2) - z^1(f\varepsilon_1^2) + z^1(f\varepsilon_2^2) = 0,$$

где $\varepsilon_j^k : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ — отображение, определённое на с. 221. Коцепь $z^0 \in C^0(X,Y;G)$ назовём ***коциклом***, если $z^0(f\varepsilon_0^1) = z^0(f\varepsilon_1^1)$ для любого сингулярного симплекса $f : \Delta^1 \to X$.

Два 1-мерных коцикла z^1 и $\bar{z}^1$ назовём ***когомологичными***, если существует 0-мерная коцепь c^0, для которой выполняется равенство

$$\bar{z}^1(f) = -c^0(f\varepsilon_1^1) + z^1(f) + c^0(f\varepsilon_0^1)$$

для всех 1-мерных сингулярных симплексов $f : \Delta^1 \to X$. Легко проверить, что когомологичность — отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности — это и есть $H^1(X,Y;G)$. Множество $H^1(X,Y;G)$ не является группой, но содержит отмеченный (нулевой) элемент — класс эквивалентности тривиального коцикла, который на каждом 1-мерном сингулярном симплексе принимает значение 0. Положим $H^0(X,Y;G) = Z^0(X,Y;G)$; это множество является группой.

Пусть X_1 и X_2 — подмножества в $X = X_1 \cup X_2$. Для $q = 0$ или 1 определим $H^q\big(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X,Y);G\big)$, рассматривая только те сингулярные симплексы, которые целиком лежат в X_1 или в X_2. Каждой коцепи, принимающей значения на всех сингулярных симплексах, можно сопоставить коцепь, принимающую значения на части симплексов. Покажем, что если $X = \operatorname{int} X_1 \cup \operatorname{int} X_2$, то такое сопоставление индуцирует взаимно однозначное отображение

$$i^* : H^q(X,Y;G) \to H^q\big(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X,Y);G\big),$$

переводящее нулевой элемент в нулевой элемент.

При $q = 0$ это утверждение очевидно. Действительно, в одном случае коциклы принимают равные значения в концах любой кривой, а в другом — в концах любой кривой, целиком лежащей в X_1 или в X_2.

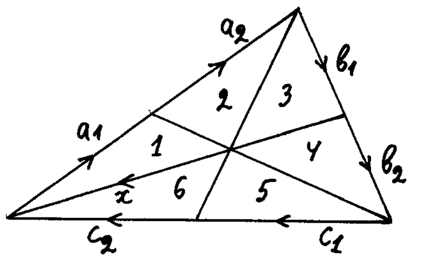

Рис. 4.3. Сложение условий коцикличности

Но любую кривую можно разбить на части, которые целиком лежат в $\operatorname{int} X_1$ или в $\operatorname{int} X_2$.

Чтобы доказать требуемое утверждение при $q = 1$, построим отображение

$$k : Z^1\big(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X, Y); G\big) \to Z^1(X, Y; G).$$

Пусть z^1 — произвольный коцикл, значения которого определены только на симплексах в X_1 и в X_2, $f : \Delta^1 \to X$ — произвольный сингулярный симплекс. Чтобы определить значение $k(z^1)$ на f, разделим отрезок Δ^1 на $M = 2^m$ равных отрезков $I_1, \ldots, I_M$ (отрезки занумерованы по порядку). Если m достаточно велико, то любой отрезок I_α целиком лежит в X_1 или в X_2. В таком случае положим $\big(k(z_1)\big) = z^1(f|_{I_1}) + \ldots + z^1(f|_{I_M})$. Корректность этого определения следует из того, что z^1 — коцикл. Действительно, если отрезок I, целиком лежащий в X_1 или в X_2, разбит на отрезки I' и I'', то $z^1(f|_{I'}) - z^1(f|_I) + z^1(f|_{I''}) = 0$.

Проверим, что $k(z^1)$ — коцикл. Рассмотрим произвольный сингулярный симплекс $f : \Delta^2 \to X$. Выберем m так, что образ ограничения f на любой симплекс m-го барицентрического подразделения целиком лежит в X_1 или в X_2. Тогда для каждого симплекса m-го барицентрического подразделения выполнено условие коцикличности. Покажем, что из этого следует, что условие коцикличности выполняется и для симплексов $(m-1)$-го барицентрического подразделения. Сложим условия коцикличности для симплексов 1, 2, ..., 6 (рис. 4.3). В результате получим $x + a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 - x = 0$, т.е. $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 0$ (здесь a_i — значение коцикла на симплексе a_i и т.п.). Кроме того, по построению значение коцикла $k(z^1)$ на отрезке I, разбитом на два равных отрезка I' и I'', равно сумме значений $k(z^1)$ на I' и на I''.

Ясно, что когомологичные коциклы k переводит в когомологичные коциклы. Поэтому получаем отображение

$$k^*: H^1\bigl(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X,Y);G\bigr) \to H^1(X,Y;G).$$

Непосредственно из определений видно, что $k^*i^* = \mathrm{id}$ и $i^*k^* = \mathrm{id}$.

Мы получили аналог аксиомы вырезания для когомологий с некоммутативными коэффициентами. Получим теперь аналог последовательности Майера–Вьеториса. Пусть X_1 и X_2 — подмножества в $X = X_1 \cup X_2$, $x_0 \in X_1 \cap X_2$ — некоторая точка. Мы будем предполагать, что естественное отображение

$$i^*: H^q(X,Y;G) \to H^q\bigl(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X,Y);G\bigr)$$

взаимно однозначно. Это свойство выполняется, например, если $X = \operatorname{int} X_1 \cup \operatorname{int} X_2$.

Непрерывное отображение $f:(X,Y) \to (X',Y')$, как и для обычных когомологий, индуцирует отображение $f^*: H^q(X',Y';G) \to H^q(X,Y;G)$, где $q = 0$ или 1, переводящее отмеченный элемент в отмеченный элемент. Аналогично возникают отображения

$$\begin{array}{ccc} H^1\bigl(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X,X_2);G\bigr) & \xrightarrow{l_1^*} & H_1(X_1,X_1\cap X_2;G) \\ {\scriptstyle l_2^*}\big\downarrow & & \\ H^1\bigl(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X,x_0);G\bigr) & & \end{array}$$

При этом отображение l_1^* взаимно однозначно, поскольку коцепи, принимающие значения на симплексах в X_1 и в X_2 и обращающиеся в нуль на всех симплексах в X_2, — это то же самое, что коцепи, принимающие значения на симплексах в X_1 и обращающиеся в нуль на всех симплексах в $X_1 \cap X_2$.

Для тройки пространств $Z \subset Y \subset X$ можно определить отображение $\delta: H^0(Y,Z;G) \to H^1(X,Y;G)$ следующим образом. Для данного когомологического класса $\alpha^0 \in H^0(Y,Z;G)$ определим коцепь $c^0 \in C^0(X,Y;G)$, полагая $c^0(x) = \alpha^0(x)$ для $x \in Y$ и $c^0(x) = 0$ для $x \notin Y$. Затем определим коцикл $z^1 \in Z^1(X,Y;G)$, полагая $z^1(f) = -c^0(f\varepsilon_1^1) + c^0(f\varepsilon_0^1)$ для любого сингулярного симплекса $f: \Delta^1 \to X$.

Рассмотрим диаграмму отображений

$$\begin{tikzcd} H^0(X_1\cap X_2,x_0;G) \arrow[r, "\Delta"] & H^1(X_1\cup X_2,x_0;G) \arrow[r, "i_1^*"] \arrow[d, "i_2^*"'] & H^1(X_1,x_0;G) \arrow[d, "j_1^*"] \\ & H^1(X_2,x_0;G) \arrow[r, "j_2^*"] & H^1(X_1\cap X_2,x_0;G), \end{tikzcd} \tag{1}$$

где отображения i_α^* и j_α^* индуцированы вложениями, а отображение Δ определяется как следующая композиция отображений:

$$\begin{tikzcd} H^0(X_1\cap X_2,x_0;G) \arrow[d, "\delta"] & H^1\bigl(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X,x_0;G)\bigr) \arrow[r, "\cong"] & H^1(X,x_0;G) \\ H^1(X_1,X_1\cap X_2;G) \arrow[r, "(l_1^*)^{-1}", "\cong"'] & H^1\bigl(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X,X_2;G)\bigr). \arrow[u, "l_2^*"'] & \end{tikzcd}$$

Для отображения в множество с отмеченным элементом можно определить ядро как прообраз отмеченного элемента.

Теорема 4.1.16. *а)* $\operatorname{Ker} i_1^* \cap \operatorname{Ker} i_2^* = \operatorname{Im}\Delta$.

б) Пусть $a\in H^1(X_1,x_0;G)$ и $b\in H^1(X_2,x_0;G)$. Тогда равенство $j_1^*(a)=j_2^*(b)$ эквивалентно тому, что существует элемент $c\in H^1(X_1\cup X_2,x_0;G)$, для которого $i_1^*(c)=a$ и $i_2^*(c)=b$. Более того, если $H^0(X_1\cap X_2,x_0;G)=0$, то такой элемент c определён однозначно.

Доказательство. Рассмотрим вместо Δ отображение $\Delta'=l_2^*(l_1^*)^{-1}\delta$ (из композиции отображений, составляющих Δ, мы убираем последний изоморфизм). Требуемое утверждение достаточно доказать для диаграммы

$$\begin{tikzcd} H^0(X_1\cap X_2,x_0) \arrow[r, "\Delta'"] & H^1\bigl(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X,x_0)\bigr) \arrow[r, "(i_1')^*"] \arrow[d, "(i_2')^*"'] & H^1(X_1,x_0) \arrow[d, "j_1^*"] \\ & H^1(X_2,x_0) \arrow[r, "j_2^*"] & H^1(X_1\cap X_2,x_0) \end{tikzcd} \tag{2}$$

(для краткости в обозначениях мы убрали группу коэффициентов G).

Оба множества $\operatorname{Im}\Delta'$ и $\operatorname{Ker}(i_1')^*\cap\operatorname{Ker}(i_2')^*$ состоят из классов эквивалентности коциклов, обращающихся в нуль на 1-мерных симплексах, целиком лежащих в $X_1\cap X_2$. То, что равенство $j_1^*(a)=j_2^*(b)$ эквивалентно существованию элемента $c'\in H^1\bigl(C_*^{\{X_1,X_2\}}(X,x_0)\bigr)$, для которого $(i_1')^*(c')=a$ и $(i_2')^*(c')=b$, проверяется непосредственно. Равенство

$H^0(X_1 \cap X_2, x_0) = 0$ означает, что пространство $X_1 \cap X_2$ линейно связно (если $G \neq 0$). Единственность элемента c' следует из линейной связности пространства $X_1 \cap X_2$. □

Теорема 4.1.16 позволяет получить наиболее общую версию теоремы ван Кампена о фундаментальной группе объединения двух множеств. Для этого нам понадобится определение амальгамы групп, сформулированное двойственным образом. А именно, группа G является амальгамой двух групп G_1 и G_2 по отношению к группе G_0 и гомоморфизмам $\varphi_1 : G_0 \to G_1$ и $\varphi_2 : G_0 \to G_2$, если коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(G, G') \arrow[r, "\psi_1^*"] \arrow[d, "\psi_2^*"'] & \mathrm{Hom}(G_1, G') \arrow[d, "\varphi_1^*"] \\ & \mathrm{Hom}(G_2, G') \arrow[r, "\varphi_2^*"] & \mathrm{Hom}(G_0, G) \end{tikzcd}$$

точна для любой группы G'. Это определение эквивалентно определению амальгамы, приведённому в части I.

Теорема 4.1.17 (Олум [Ol]). *Пусть пространства U_1, U_2 и $U_1 \cap U_2$ линейно связны и $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Группа $\pi_1(U_1 \cup U_2, x_0)$ является амальгамой групп $\pi_1(U_1, x_0)$ и $\pi_1(U_2, x_0)$ по отношению к группе $\pi_1(U_1 \cup U_2, x_0)$ и гомоморфизмам, индуцированным вложениями $U_1 \cap U_2 \to U_1$ и $U_1 \cap U_2 \to U_2$ тогда и только тогда, когда естественное отображение*

$$i^* : H^1(U_1 \cup U_2, x_0; G') \to H^1\bigl(C_*^{\{U_1, U_2\}}(U_1 \cup U_2, x_0); G'\bigr)$$

взаимно однозначно для любой группы G'.

Доказательство. Предположим сначала, что отображение i^* взаимно однозначно для любой группы G'. Тогда имеет место коммутативная диаграмма (1) (с заменой G на G'). Кроме того, из условия линейной связности пространства $U_1 \cap U_2$ получаем, что $H^0(U_1 \cup U_2, x_0; G') = 0$.

Пусть X — линейно связное пространство и $x_0 \in X$. Возьмём элемент $\omega \in \pi_1(X, x_0)$ и рассмотрим последовательность 1-мерных симплексов $\Delta_1^1, \ldots, \Delta_k^1$, которые составляют петлю, лежащую в гомотопическом классе ω. Для $z^1 \in Z^1(X, x_0; G')$ положим $z^1(\omega) = z^1(\Delta_1^1) + \ldots + z^1(\Delta_k^1)$. Легко проверить, что $z^1(\omega)$ действительно зависит только от гомотопического класса петли и, более того, $z^1(\omega)$ зависит только от когомологического класса цикла z^1, т.е. мы получаем отображение $H^1(X, x_0; G') \to \mathrm{Hom}\bigl(\pi_1(X, x_0), G'\bigr)$. Это отображение взаимно однозначно. Применив теорему 4.1.16 и заменив H^1 на Hom, получаем, что $\pi_1(U_1 \cup U_2, x_0)$ — амальгама.

Предположим теперь, что $\pi_1(U_1 \cup U_2, x_0)$ — амальгама. Заменив Hom на H^1, получим точную коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(U_1 \cup U_2, x_0; G') & \xrightarrow{i_1^*} & H^1(U_1, x_0; G') \\ & & {\scriptstyle i_2^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle j_1^*} \\ & & H^1(U_2, x_0; G) & \xrightarrow{j_2^*} & H^1(U_1 \cap U_2, x_0) \end{array}$$

для любой группы G'. Сравнивая её с (2), где X_i заменено на U_i, получаем, что отображение i^* взаимно однозначно. □

4.2. Двойственности для топологических многообразий

Для топологических многообразий теорема двойственности Пуанкаре тоже справедлива, но её доказательство требует привлечения совсем других методов, потому что для топологических многообразий нет теоремы о триангулируемости. Приводимые ниже доказательства теорем двойственности Пуанкаре и Лефшеца следуют в основном [Sa1] и [Vi1].

4.2.1. Фундаментальный класс

Прежде чем заняться построением фундаментального класса для топологических многообразий мы докажем теорему об обращении в нуль k-мерных гомологий топологического многообразия M^n при $k > n$ и теорему об обращении в нуль n-мерных гомологий некомпактного топологического многообразия M^n без края. Последняя теорема нужна для построения фундаментального класса.

Теорема 4.2.1. *Если M^n — топологическое многообразие, то $H_k(M^n) = 0$ при $k > n$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный сингулярный цикл $z_k \in Z_k(M^n)$. Объединение образов сингулярных симплексов, входящих в z_k, — компактное множество, поэтому оно содержится в объединении конечного набора открытых множеств $U_1, \ldots, U_m$, каждое из которых гомеоморфно открытому множеству в $\mathbb{R}^n$. Пусть $V_j = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_j$. Покажем, что $H_k(V_j) = 0$. При $j = 1$ это следует из теоремы 4.1.8. При $j > 1$ рассмотрим точную последовательность

Майера–Вьеториса для $V_{j-1} \cup U_j = V_j$:

$$\ldots \to H_k(V_{j-1}) \oplus H_k(U_j) \to H_k(V_j) \to H_{k-1}(V_{j-1} \cap U_j) \to \ldots$$

Множества U_j и $V_{j-1} \cap U_j$ гомеоморфны открытым множествам в $\mathbb{R}^n$, поэтому $H_k(U_j) = 0$ и $H_{k-1}(V_{j-1} \cap U_j) = 0$. Кроме того, $H_k(V_{j-1}) = 0$ по предположению индукции. Поэтому $H_k(V_j) = 0$. Это означает, что z^k — граница сингулярной цепи в $V_j \subset M^n$. □

Для связных некомпактных многообразий теорему 4.2.1 можно усилить: $H_k(M^n) = 0$ при $k \geqslant n$. Чтобы доказать это, нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.2.1. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ *— открытое множество,* $\alpha \in H_n(\mathbb{R}^n, U)$. *Предположим, что для всех точек* $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$ *выполняется равенство* $(i_x)_*(\alpha) = 0$, *где* $i_x : (\mathbb{R}^n, U) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ *— естественное включение. Тогда* $\alpha = 0$.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность пары $(\mathbb{R}^n, U)$:

$$\ldots \to H_n(\mathbb{R}^n) \to H_n(\mathbb{R}^n, U) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(U) \to H_n(\mathbb{R}^n) \to \ldots$$

Здесь ∂_* — изоморфизм, поэтому достаточно доказать, что $\partial_* \alpha = 0$. Пусть $z \in Z_{n-1}(U)$ — цикл, представляющий гомологический класс $\partial_* \alpha$. Носитель цепи z компактен, поэтому можно выбрать открытое множество V так, что $\bar{V} \subset U$, множество $\bar{V}$ компактно и носитель цепи z содержится в V. Следовательно, в $H_{n-1}(V)$ есть элемент β, для которого $i_* \beta = \partial_* \alpha$, где $i : V \to U$ — естественное включение.

Пользуясь компактностью $\bar{V}$, выберем в $\mathbb{R}^n$ открытый куб Q так, чтобы он содержал V, и положим $K = Q \setminus (Q \cap V)$. Тогда $\bar{K} \cap \bar{V} = \varnothing$, поэтому для каждой точки $x \in K$ можно выбрать замкнутый куб P так, что $x \in P$ и $P \cap V = \varnothing$. Компактное множество $\bar{K}$ можно покрыть конечным числом таких кубов $P_1, \ldots, P_m$.

По условию $(i_x)_* \alpha = 0$, поэтому коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}(V) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & H_{n-1}(U) \arrow[d] & H_n(\mathbb{R}^n, U) \arrow[l, "\partial_*"'] \arrow[d, "(i_x)_*"] \\
H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \arrow[r, "\cong"'] & H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \arrow[l, "\partial_*", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

показывает, что образ элемента β при гомоморфизме включения $H_{n-1}(V) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ — нулевой элемент.

Покажем, что образ элемента β при гомоморфизме включения $H_{n-1}(V) \to H_{n-1}(Q \setminus \bigcup_{i=1}^{m} P_i)$ — тоже нулевой элемент. Рассмотрим множества $Q_k = Q \setminus \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ и применим индукцию по k. При $k=0$ утверждение очевидно, поскольку $Q_0 = Q$ и $H_{n-1}(Q)=0$. Чтобы сделать шаг индукции, рассмотрим точную последовательность Майера–Вьеториса для Q и $\mathbb{R}^n \setminus P_{k+1}$ (это можно сделать, поскольку оба множества открыты):

$$H_n\big(Q \cup (\mathbb{R}^n \setminus P_{k+1})\big) \to H_{n-1}(Q_{k+1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(Q) \oplus H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus P_{k+1})$$

Множество $Q \cup (\mathbb{R}^n \setminus P_{k+1})$ открытое, поэтому его n-мерная группа гомологий нулевая. Значит, j_* — мономорфизм. Остаётся заметить, что образы элемента β при гомоморфизмах, индуцированных включениями $V \to Q_k$ и $V \to \mathbb{R}^n \setminus P_{k+1}$, — нулевые элементы. Для первого гомоморфизма это верно согласно предположению индукции, а для второго — потому что $H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus P_{k+1}) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})$.

Множество Q_m содержится в U, поэтому гомоморфизм $H_{n-1}(V) \to H_{n-1}(U)$ представляется в виде композиции гомоморфизмов $H_{n-1}(V) \to H_{n-1}(Q_m) \to H_{n-1}(U)$. Образ элемента β при первом гомоморфизме — нулевой элемент. Поэтому $i_*\beta = 0$, т.е. $\partial_*\alpha = 0$. □

Точная последовательность пары $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ показывает, что $H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H_k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H_{k-1}(S^{n-1})$ при $k > 1$. Поэтому $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ и $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ при $n \geqslant 2$.

Если U — открытая карта, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$ и содержащая точку $x \in M^n$, то $H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) \cong H_n(U, U \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ (или $\mathbb{Z}_2$ в случае коэффициентов $\mathbb{Z}_2$). Чтобы доказать это, достаточно применить теорему о вырезании к множествам $M^n \setminus U \subset M^n \setminus \{x\} \subset M^n$. (Условие $\overline{M^n \setminus U} \subset M^n \setminus \{x\}$ выполняется, поскольку $\overline{M^n \setminus U} = M^n \setminus U$ и $x \in U$.)

Группы $H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$ играют важную роль в построении фундаментального класса.

Теорема 4.2.2. *Если M^n — связное некомпактное многообразие без края, то $H_n(M^n) = 0$.*

Доказательство. Покажем, что для любой точки $x \in M^n$ гомоморфизм $p_* : H_n(M^n) \to H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$ нулевой. Пусть $[z_n]$ — класс гомологий, представленный циклом $z_n \in Z_n(M^n)$, C — компактный носитель цикла z_n. Предположим сначала, что $x \in M^n \setminus C$. Тогда цикл z_n является образом некоторого цикла $\tilde{z}_n$ при гомоморфизме $i_\# : Z_n(M^n \setminus \{x\}) \to Z_n(M^n)$. Поэтому $p_*[z_n] = p_* i_*[\tilde{z}_n] = 0$, поскольку

$p_*i_* = 0$. Предположим теперь, что $x \in C$. По условию многообразие M^n некомпактно. В частности, $M^n \neq C$. Поэтому можно выбрать точку $y \in M^n \setminus C$. Рассмотрим гомеоморфизм $h : M^n \to M^n$, который изотопен тождественному и переводит x в y (такой гомеоморфизм существует для любого связного топологического многообразия без края; это доказывается точно так же, как и для гладких многообразий: часть I, лемма об однородности многообразий). Гомеоморфизм h индуцирует изоморфизм $M^n \setminus \{x\} \to M^n \setminus \{y\}$, поэтому имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_n(M^n) & \xrightarrow{(p_x)_*} & H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_*=\mathrm{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_*} \\ H_n(M^n) & \xrightarrow{(p_y)_*} & H_n(M^n, M^n \setminus \{y\}) \end{array}$$

Равенство $(p_x)_* = 0$ следует из равенства $(p_y)_* = 0$.

Как и при доказательстве теоремы 4.2.1, мы будем рассматривать каждый сингулярный цикл $z_n \in Z_n(M^n)$ отдельно, а в таком случае вместо M^n можно рассматривать конечное объединение открытых координатных окрестностей $U_1, \ldots, U_m$, гомеоморфных $\mathbb{R}^n$. Положим $V_k = \bigcup_{i=1}^k U_i$ и покажем, что цикл z_n является границей некоторого цикла в V_m, т.е. $H_n(V_m) = 0$.

Применим индукцию по k. При $k = 1$ утверждение очевидно, поскольку U_1 стягиваемо. Чтобы сделать шаг индукции, рассмотрим последовательность Майера–Вьеториса для пары открытых множеств V_k и U_{k+1}:

$$H_n(V_k) \oplus H_n(U_{k+1}) \to H_n(V_{k+1}) \to H_{n-1}(V_k \cap U_{k+1}) \to \\ \to H_{n-1}(V_k) \oplus H_{n-1}(U_{k+1}).$$

По предположению индукции $H_n(V_k) = 0$. Кроме того, из стягиваемости U_{k+1} следует, что $H_n(U_{k+1}) = 0$ и $H_{n-1}(U_{k+1}) = 0$. Поэтому равенство $H_n(V_{k+1}) = 0$ эквивалентно мономорфности гомоморфизма $i_* : H_{n-1}(V_k \cap U_{k+1}) \to H_{n-1}(V_k)$.

Предположим, что $\beta \in H_{n-1}(V_k \cap U_{k+1})$ и $i_*\beta = 0$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_n(V_{k+1}, V_k \cap U_{k+1}) & H_n(U_{k+1}, V_k \cap U_{k+1}) \arrow[l, "i'_*"'] \arrow[d, "\partial'_*"] & \\
H_n(V_k, V_k \cap U_{k+1}) \arrow[u, "i''_*"] \arrow[r, "\partial''_*"] & H_{n-1}(V_k \cap U_{k+1}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & H_{n-1}(V_k) \\
& H_{n-1}(U_{k+1}) = 0 &
\end{tikzcd}$$

В этой диаграмме вторая строка и второй столбец — участки точных последовательностей пар. Из равенства $i_*\beta = 0$ следует, что $\beta = \partial''_*\beta''$ для некоторого $\beta'' \in H_n(V_k, V_k \cap U_{k+1})$. Кроме того, $\beta = \partial'_*\beta'$ для некоторого $\beta' \in H_n(U_{k+1}, V_k \cap U_{k+1})$, поскольку ∂'_* — эпиморфизм. Рассмотрим элемент $\bar{\beta} = i'_*\beta' - i''_*\beta''$. Запишем участок точной последовательности пары:

$$H_n(V_{k+1}) \xrightarrow{p_*} H_n(V_{k+1}, V_k \cap U_{k+1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(V_k \cap U_{k+1}).$$

Ясно, что $\partial_* i'_* = \partial'_*$ и $\partial_* i''_* = \partial''_*$. Поэтому $\partial_*\bar{\beta} = \partial_* i'_*\beta' - \partial_* i''_*\beta'' = \partial'_*\beta' - \partial''_*\beta'' = \beta - \beta = 0$, а значит, $\partial_*\bar{\beta} = p_*\alpha$ для некоторого $\alpha \in H_n(V_{k+1})$.

Точно так же, как это мы делали в начале доказательства, используя некомпактность M^n, можно показать, что для любой точки $x \in M^n$ гомоморфизм $(p_x)_* : H_n(V_{k+1}) \to H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$ нулевой. В частности, $p_*\alpha = 0$.

Пусть $x \in U_{k+1} \setminus (V_k \cap U_{k+1})$. Тогда $V_k \cap U_{k+1} \subset M^n \setminus \{x\}$, поэтому гомоморфизм $(p_x)_*$ можно представить в виде композиции гомоморфизмов

$$H_n(V_{k+1}) \xrightarrow{p_*} H_n(V_{k+1}, V_k \cap U_{k+1}) \xrightarrow{l_*} H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}).$$

Следовательно, $0 = (p_x)_*\alpha = l_* p_*\alpha = l_*\bar{\beta} = l_* i'_*\beta' - l_* i''_*\beta''$. Точка x не лежит в V_k, поэтому $l_* i''_*$ можно заменить на композицию гомоморфизмов

$$H_n(V_k, V_k \cap U_{k+1}) \to H_n(V_k \setminus \{x\}, V_k \cap U_{k+1}) \to H_n(M^n \setminus \{x\}, M^n \setminus \{x\}) = 0.$$

Значит, $l_* i''_* = 0$. Из этого следует, что $l_* i'_*\beta' = 0$. После отождествления $H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$ с $H_n(U_{k+1}, U_{k+1} \setminus \{x\})$ гомоморфизм $l_* i'_*$ превращается в гомоморфизм

$$(i_x)_* : H_n(U_{k+1}, V_k \cap U_{k+1}) \to H_n(U_{k+1}, U_{k+1} \setminus \{x\}).$$

Поэтому, воспользовавшись леммой 4.2.1, получим $\beta' = 0$, а значит, $\beta = 0$. $\square$

Следствие 1. *Пусть M^n — связное топологическое многообразие. Тогда $p_*: H_n(M^n) \to H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$ — мономорфизм.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in H_n(M^n)$ и $p_*\alpha = 0$. Тогда в $H_n(M^n \setminus \{x\})$ есть элемент β, для которого $i_*\beta = \alpha$. Но многообразие $M^n \setminus \{x\}$ некомпактно, поэтому $H_n(M^n \setminus \{x\}) = 0$. □

Следствие 2. *Пусть M^n — связное топологическое многообразие. Тогда либо $H_n(M^n) = 0$, либо $H_n(M^n) \cong \mathbb{Z}$ и для любой точки $x \in M^n$ гомоморфизм $p_*: H_n(M^n) \to H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$ является мономорфизмом.*

Доказательство. Согласно следствию 1 гомоморфизм $p_* : H_n(M^n) \to H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ является мономорфизмом. Поэтому либо $H_n(M^n) = 0$, либо $H_n(M^n) \cong \mathbb{Z}$ и образом p_* служит группа $m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Нужно лишь проверить, что $m = \pm 1$.

Предположим, что $m > 1$. Доказательство теоремы 4.2.2 (и следствия 1) проходят не только для коэффициентов $\mathbb{Z}$, но и для любой абелевой группы коэффициентов G. Положим $G = \mathbb{Z}_m$ и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
H_n(M^n) \otimes \mathbb{Z}_m & \xrightarrow{p_* \otimes \mathrm{id}} & H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) \otimes \mathbb{Z}_m \\
{\scriptstyle \varphi_1}\big\downarrow{\scriptstyle \text{моно}} & & {\scriptstyle \varphi_2}\big\downarrow{\scriptstyle \text{моно}} \\
H_n(M^n; \mathbb{Z}_m) & \xrightarrow[\text{моно}]{p_*} & H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}_m)
\end{array}$$

Здесь φ_1 и φ_2 — мономорфизмы из формулы универсальных коэффициентов. Гомоморфизм $p_* \otimes \mathrm{id}$ тоже должен быть мономорфизмом. С другой стороны, если α — образующая группы $H_n(M^n)$, то $(p_* \otimes \mathrm{id})(\alpha \otimes 1) = p_*\alpha \otimes 1 = m \otimes 1 = 0$. □

Для каждой точки $x \in M^n$ рассмотрим группы $T_x = H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ и $T_x(\mathbb{Z}_2) = H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Сейчас мы введём топологию на множествах $\mathcal{T} = \bigcup_{x \in M^n} T_x$ и $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_2) = \bigcup_{x \in M^n} T_x(\mathbb{Z}_2)$ так, что естественные проекции $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_2)$ на M^n являются накрытиями. Отметим, что это эквивалентно заданию на M^n локальных систем коэффициентов с группами $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$. Для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ локальная система тривиальна, потому что есть ровно один изоморфизм $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$. Пространство $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_2)$ представляет собой два экземпляра многообразия M^n; один из них соответствует нулевому элементу группы $\mathbb{Z}_2$, а другой — ненулевому. Для коэффициентов $\mathbb{Z}$ мы хотим построить локальную систему коэффициентов, которая обобщает систему $\mathrm{Or}\, M^n$ для гладких многообразий.

Будем называть множество V *допустимым*, если V — внутренность замкнутого шара, лежащего в некоторой карте на M^n. При построении топологии на множестве $\mathcal{T}$ мы воспользуемся тем, что если множество V допустимое и $x \in V$, то вложение $M^n \setminus V \to M^n \setminus \{x\}$ является гомотопической эквивалентностью. Из этого следует, что индуцированный этим вложением гомоморфизм

$$i_{V,x} : H_n(M^n, M^n \setminus V) \to H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) = T_x$$

является изоморфизмом (для сингулярных гомологий это доказывается точно так же, как и для симплициальных: см. теорему 1.3.3 на с. 27). Для каждого элемента $\alpha \in H_n(M^n, M^n \setminus V)$ множества $\{i_{V,x}\alpha \mid x \in V\}$ будем считать открытыми. Эти открытые множества образуют базу топологии пространства $\mathcal{T}$. Отметим, что допустимые множества V образуют базу топологии пространства M^n.

Ориентацией топологического многообразия M^n называют непрерывное сечение s накрытия $\mathcal{T} \to M^n$, для которого каждый элемент $s(x) \in T_x$ является образующей группы $T_x \cong \mathbb{Z}$. Ясно, что у связного топологического многообразия без края есть либо ровно две ориентации, либо ни одной. Топологическое многообразие, у которого есть ориентация, называют *ориентируемым*, а топологическое многообразие с заданной ориентацией называют *ориентированным*.

Гомологический класс $\alpha \in H_n(M^n)$ называют *фундаментальным*, если для всех $x \in M^n$ отображение $p_* : H_n(M^n) \to H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) = T_x$ переводит α в образующую группы T_x. Как мы сейчас убедимся, фундаментальный класс тесно связан с ориентацией: каждой ориентации замкнутого топологического многообразия соответствует фундаментальный класс. В частности, для замкнутого связного ориентируемого многообразия $H_n(M^n) \cong \mathbb{Z}$. Прежде чем переходить к ориентируемым многообразиям, разберёмся с неориентируемыми.

Теорема 4.2.3. *Если M^n — неориентируемое связное топологическое многообразие без края, то $H_n(M^n) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in H_n(M^n)$. Для каждой точки $x \in M^n$ рассмотрим элемент $\alpha_x \in T_x$, который является образом элемента α при гомоморфизме $p_* : H_n(M^n) \to H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) = T_x$. Из неориентируемости M^n следует, что существует путь γ, при обходе вдоль которого α_x заменяется на $-\alpha_x$. Поэтому $\alpha_x = 0$. Следствие 1 теоремы 4.2.2 показывает, что $\alpha = 0$. □

Воспользуемся введённым обозначением α_x при формулировке и доказательстве следующего утверждения.

Теорема 4.2.4. *Пусть M^n — связное замкнутое ориентируемое многообразие с ориентацией $s: M^n \to \mathcal{T}$. Тогда существует единственный фундаментальный класс α, для которого $\alpha_x = s(x)$ для всех $x \in M^n$.*

Доказательство. Наиболее важная и трудная часть теоремы — существование фундаментального класса. С этого мы и начнём, а единственность докажем в конце.

Напомним, что если V — допустимое множество, то $i_{V,x}: H_n(M^n, M^n \setminus V) \to T_x$ — изоморфизм. Это позволяет построить требуемый класс гомологий α_V в $H_n(M^n, M^n \setminus V)$. Мы хотим склеить такие классы с помощью относительной последовательности Майера–Вьеториса и получить гомологический класс в $H_n(M^n, \varnothing) = H_n(M^n)$. При работе с последовательностями Майера–Вьеториса удобнее иметь дело с открытыми множествами, для которых аксиома вырезания выполняется автоматически. Поэтому вместо допустимого множества V возьмём его замыкание $\bar{V}$; отображение $i_{\bar{V},x}$ тоже изоморфизм, поэтому мы можем построить класс $\alpha_{\bar{V}} \in H_n(M^n, M^n \setminus \bar{V})$.

Многообразие M^n компактно, поэтому его можно покрыть конечным набором замыканий допустимых множеств $\bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_m$. Предположим, что мы уже построили элемент

$$\alpha_{1,\ldots,k} \in H_n\bigl(M^n, M^n \setminus (\bar{V}_1 \cup \ldots \cup \bar{V}_k)\bigr),$$

для которого $i_x \alpha_{1,\ldots,k} = s(x)$ при всех $x \in \bar{V}_1 \cup \ldots \cup \bar{V}_k$; здесь i_x — гомоморфизм гомологий, индуцированный отображением пар

$$\bigl(M^n, M^n \setminus (\bar{V}_1 \cup \ldots \cup \bar{V}_k)\bigr) \to (M^n, M^n \setminus \{x\}).$$

Рассмотрим относительную последовательность Майера–Вьеториса

$$\begin{aligned} H_n\bigl(M^n, M^n \setminus (\bar{V}_1 \cup \ldots \cup \bar{V}_{k+1})\bigr) \to H_n\bigl(M^n, M^n \setminus (\bar{V}_1 \cup \ldots \cup \bar{V}_k)\bigr) \oplus \\ \oplus H_n(M^n, M^n \setminus \bar{V}_{k+1}) \to \\ \to H_n\Bigl(M^n, M^n \setminus \bigl((\bar{V}_1 \cup \ldots \cup \bar{V}_k) \cap \bar{V}_{k+1}\bigr)\Bigr) \end{aligned}$$

Возьмём в прямой сумме элемент $(\alpha_{1,\ldots,k}, -\alpha_{k+1})$. Мы хотим доказать, что он является образом некоторого элемента

$$\alpha_{1,\ldots,k+1} \in H_n\bigl(M^n, M^n \setminus (\bar{V}_1 \cup \ldots \cup \bar{V}_{k+1})\bigr).$$

Это эквивалентно тому, что образ элемента $(\alpha_{1,\ldots,k}, -\alpha_{k+1})$ в

$$H_n\Bigl(M^n, M^n \setminus \bigl((\bar{V}_1 \cup \ldots \cup \bar{V}_k) \cap \bar{V}_{k+1}\bigr)\Bigr)$$

равен нулю. Обозначим этот образ β. По условию для всех $x \in C = (\bar{V}_1 \cup \ldots \cup \bar{V}_k) \cap \bar{V}_{k+1}$ гомоморфизм $H_n(M^n, M^n \setminus C) \to T_x$ переводит β в нуль.

Лемма. *Пусть $U \subset M^n$ — открытое множество, а элемент $\beta \in H_n(M^n, U)$ таков, что для всех $x \in U$ гомоморфизм $H_n(M^n, U) \to T_x$ переводит β в нуль. Тогда $\beta = 0$.*

Доказательство. Мы применим ту же самую технику, которую уже многократно использовали: утверждение сначала доказывается для простых областей, а затем распространяется с помощью последовательности Майера–Вьеториса.

Предположим сначала, что множество $M^n \setminus U$ сдержится в координатной окрестности $W \approx \mathbb{R}^n$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_n(W, W \cap U) & \xrightarrow{i_*} & H_n(W, W \setminus \{x\}) \\ \big\downarrow \cong & & \big\downarrow \cong \\ H_n(M^n, U) & \xrightarrow{i_*} & H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) \end{array}$$

Здесь вертикальные стрелки — изоморфизмы вырезания. Равенство $p_*\beta = 0$ эквивалентно равенству $i_*\tilde{\beta} = 0$, где $\tilde{\beta}$ — прообраз β при изоморфизме вырезания. Применив лемму 4.2.1, получим $\tilde{\beta} = 0$, а значит, $\beta = 0$.

Перейдём теперь к общему случаю. Пусть V_i — открытая координатная окрестность M^n, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$. Компактное множество $M^n \setminus U$ можно покрыть конечным числом открытых множеств V_i. Положим $U_i = (M^n \setminus U) \cap V_i$. Тогда $M^n \setminus U = \cup(M^n \setminus U_i)$, т.е. $U = \cap U_i$. Поэтому достаточно проверить, что если утверждение леммы верно для открытых множеств U' и U'', то оно верно и для множества $U' \cap U''$. Рассмотрим относительную последовательность Майера–Вьеториса

$$H_{n+1}(M^n, U' \cup U'') \to H_n(M^n, U' \cap U'') \to H_n(M^n, U') \oplus H_n(M^n, U'')$$

Легко проверить, что $H_{n+1}(M^n, U' \cup U'') = 0$. Действительно, рассмотрим точную последовательность пары

$$H_{n+1}(M^n) \to H_{n+1}(M^n, U' \cup U'') \to H_n(U' \cup U'')$$

Здесь $H_{n+1}(M^n) = 0$ и $H_n(U' \cup U'') = 0$, если $U' \cup U'' \neq M^n$ (если же $U' \cup U'' = M^n$, то равенство $H_{n+1}(M^n, U' \cup U'') = 0$ очевидно). Таким образом, получаем мономорфизм

$$H_n(M^n, U' \cap U'') \to H_n(M^n, U') \oplus H_n(M^n, U'').$$

Пусть при этом мономорфизме элемент β переходит в (β', β''). Пусть, далее, β_x, β'_x и β''_x — образы элементов β, β' и β'' при отображении в T_x. Тогда $\beta'_x = \beta_x$ и $\beta''_x = -\beta_x$. Поэтому если $\beta_x = 0$, то $\beta'_x = 0$ и $\beta''_x = 0$. По предположению равенство $\beta_x = 0$ выполняется для всех $x \in M^n \setminus (U' \cap U'')$. Значит, равенство $\beta'_x = 0$ выполняется для всех $x \in M^n \setminus U'$, а равенство $\beta''_x = 0$ выполняется для всех $x \in M^n \setminus U''$. Из этого следует, что $\beta' = 0$ и $\beta'' = 0$. Условие мономорфности означает, что тогда и $\beta = 0$. □

Элемент $\alpha_{1,\ldots,k+1}$, образом которого является элемент $(\alpha_{1,\ldots,k}, -\alpha_{k+1})$, обладает требуемым свойством, т.е. $i_x\alpha_{1,\ldots,k+1} = s(x)$ для всех $x \in \bar{V}_1 \cup \ldots \cup \bar{V}_{k+1}$.

Единственность фундаментального класса доказывается весьма просто. Если α и α' — два фундаментальных класса, соответствующих ориентации s, то для всех $x \in M^n$ гомоморфизм $H_n(M^n) \to H_n(M^n, M^n \setminus \{x\})$ переводит класс $\alpha - \alpha'$ в $s(x) - s(x) = 0$. Но этот гомоморфизм является мономорфизмом (следствие 1 теоремы 4.2.2). □

Относительно коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ многообразие всегда ориентируемо, причём ориентация единственна. Для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ можно повторить те же самые рассуждения, что и при доказательстве теоремы 4.2.4, и для каждого замкнутого связного топологического многообразия построить фундаментальный класс в гомологиях с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$.

4.2.2. Изоморфизм Тома

Изоморфизм Тома связывает k-мерные когомологии замкнутого многообразия M^n и $(n+k)$-мерные когомологии пары $\big(M^n \times M^n, M^n \times M^n \setminus d(M^n)\big)$, где $d : M^n \to M^n \times M^n$ — диагональное отображение. Построение этого изоморфизма основано на приводимых ниже леммах 4.2.2 и 4.2.3. Начнём с того, что введём некоторые обозначения.

Пусть M^n — замкнутое ориентированное топологическое многообразие с ориентацией $s : M^n \to \mathcal{T}$, $p_1, p_2 : M^n \times M^n \to M^n$ — проекции на первый и второй множитель. Для каждой точки $x \in M^n$ рассмотрим отображение $l_x : M^n \to M^n \times M^n$, заданной формулой $l_x(y) = (x, y)$. Это отображение индуцирует отображение пар

$$(M^n, M^n \setminus \{x\}) \to \big(M^n \times M^n, M^n \times M^n \setminus d(M^n)\big),$$

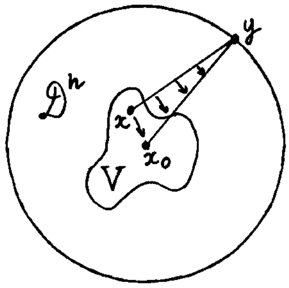

Рис. 4.4. Построение гомеоморфизма

которое мы тоже будем обозначать l_x.

Лемма 4.2.2. *Пусть $V \subset M^n$ — открытая окрестность, которая в локальных координатах содержится в шаре, а он, в свою очередь, содержится в шаре D^n большего радиуса с тем же центром $x_0 \in V$. Тогда существует гомеоморфизм $\theta : p_1^{-1}(V) = V \times M^n \to p_1^{-1}(V)$, обладающий следующими свойствами:*

1) *$\theta(x, y) = (x, y')$ для всех $x \in V$, $y \in M^n$ (здесь y' — некоторая точка M^n);*
2) *$\theta(x, x) = (x, x_0)$ для всех $x \in V$;*
3) *$(p_2 \theta l_x)_* \big(s(x)\big) = s(x_0)$ для всех $x \in V$ (здесь имеются в виду отображения пар, поскольку $s(x)$ — класс гомологий пары).*

При формулировке свойства (3) использовано свойство (2): $(p_2 \theta l_x)(x) = p_2 \theta(x, x) = p_2(x, x_0) = x_0$.

Доказательство. Построим гомеоморфизм $V \times D^n$ на себя следующим образом: каждый отрезок с концами (x, x) и (x, y), где $x \in V$ и $y \in \partial D^n$, линейно отобразим на отрезок с концами (x, x_0) и (x, y). На рис. 4.4 показано, как устроено ограничение этого отображения на $\{x\} \times D^n$ при $n = 2$. На $V \times \partial D^n$ гомеоморфизм тождествен, поэтому его можно продолжить на $V \times M^n$ как тождественное отображение вне $V \times D^n$.

Отображение $p_2 \theta l_x$ — это как раз то отображение, которое изображено на рис. 4.4. Ясно, что это отображение сохраняет ориентацию. □

Для каждого открытого множества $V \subset M^n$ можно рассмотреть пару

$$\big(p^{-1}(U), p^{-1}(U) \setminus d(M^n)\big) = \big(U \times M^n, U \times M^n \setminus d(M^n)\big),$$

которую мы будем обозначать $U^\times$. Для дальнейшего важное значение имеет пара $M^{n\times} = \big(M^n \times M^n, M^n \times M^n \setminus d(M^n)\big)$. Отметим, что отображение l_x можно рассматривать как отображение пар $(M^n, M^n \setminus \{x\}) \to M^{n\times}$.

Лемма 4.2.3. *а)* $H_i(M^{n\times}) = 0$ *при* $i < n$.

б) $H_0(M^n) \cong H_n(M^{n\times})$; *этот изоморфизм индуцирован отображением, которое переводит 0-мерную цепь, соответствующую точке* $x \in M^n$, *в относительный* n*-мерный цикл, представляющий класс* $(l_x)_*\big(s(x)\big)$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 4.2.2. Пусть множество V удовлетворяет условию этой леммы, и θ — соответствующий V гомеоморфизм. Тогда θ отображает $d(V)$ в $V \times \{x_0\}$, поэтому θ индуцирует гомеоморфизм пар

$$V^\times = \big(V \times M^n, V \times M^n \setminus d(M^n)\big) \to V \times (M^n, M^n \setminus \{x_0\}).$$

Значит, $H_*(V^\times) \cong H_*\big(V \times M^n, V \times (M^n \setminus \{x_0\})\big)$. Применив теорему Кюннета для относительных гомологий, получим, что группа $H_k(V^\times)$ изоморфна прямой сумме групп $\bigoplus_{p+q=k} H_p(V) \otimes H_q(M^n, M^n \setminus \{x_0\}) = H_0(V) \otimes H_k(M^n, M^n \setminus \{x_0\})$ и $\bigoplus_{p+q=k-1} \operatorname{Tor}\big(H_p(V), H_q(M^n, M^n \setminus \{x_0\})\big) = \operatorname{Tor}\big(H_0(V), H_{k-1}(M^n, M^n \setminus \{x_0\})\big)$. Но $H_i\big(M^n, M^n \setminus \{x_0\}\big) = 0$ при $i < n$. Поэтому $H_k(V^\times) = 0$ при $i < n$ и $H_k(V^\times) \cong H_0(V) \otimes H_k(M^n, M^n \setminus \{x_0\})$.

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & H_0(V) \otimes H_n(M^n, M^n \setminus \{x_0\}) \\ & & & & \uparrow \cong \\ H_n(V, V \setminus \{x\}) & \xrightarrow{(l_x)_*} & H_n(V^\times) & \xrightarrow{\theta_*} & H_n\big(V \times M^n, V \times (M^n \setminus \{x_0\})\big) \\ & & & & \downarrow (p_2)_* \\ & & & & H_n(M^n, M^n \setminus \{x_0\}) \end{array}$$

Мы знаем, что $(p_2\theta l_x)_*\big(s(x)\big) = s(x_0)$. Поэтому отображение $H_0(V) \to H_0(V) \otimes H_n(M^n, M^n \setminus \{x_0\})$, индуцированное отображением $[x] \to [x] \otimes s(x_0)$, является изоморфизмом. Если мы вернёмся в $H_n(V^\times)$, то вместо этого отображения получим отображение $[x] \to (l_x)_*\big(s(x)\big)$.

Таким образом, для множества V утверждение леммы верно. Обратите внимание, что мы не пользуемся связностью V; изоморфизм

$H_n(V^\times) \cong H_0(V)$ имеет место и для несвязного открытого множества V. Поэтому остаётся проверить, что если утверждение леммы верно для открытых множеств U_1, U_2 и $U_1 \cap U_2$, то оно верно и для множества $U_1 \cup U_2$. Рассмотрим два участка последовательностей Майера–Вьеториса и отобразим один из них в другой посредством гомоморфизма, описанного в условии леммы:

$$\begin{array}{ccccc}
H_0(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & H_0(U_1) \oplus H_0(U_2) & \longrightarrow & H_0(U_1 \cup U_2) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_n\big((U_1 \cap U_2)^\times\big) & \longrightarrow & H_{n-1}(U_1^\times) \oplus H_{n-1}(U_2^\times) & \longrightarrow & H_{n-1}\big((U_1 \cup U_2)^\times\big)
\end{array}$$

Сохраняя коммутативность, к этой диаграмме можно дописать справа диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
\longrightarrow & H_n\big((U_1 \cap U_2)^\times\big) & \longrightarrow & H_n(U_1^\times) \oplus H_n(U_2^\times),
\end{array}$$

в которой группы гомологий, стоящие внизу, нулевые. Применив 5-лемму, получим требуемое. □

Воспользовавшись леммой 4.2.3 и формулой универсальных коэффициентов, получаем $H^i(M^{n\times}) = 0$ при $i < n$ и $H^n(M^{n\times}) \cong \operatorname{Hom}\big(H_n(M^{n\times}), \mathbb{Z}\big) \cong \operatorname{Hom}\big(H_0(M^n), \mathbb{Z}\big)$; оба изоморфизма канонические. Класс $U \in H^n(M^{n\times})$, соответствующий гомоморфизму $H_0(M^n) \to \mathbb{Z}$, индуцированному аугментацией, называют *классом Тома* топологического многообразия M^n. Класс Тома однозначно характеризуется тем, что $\langle U, (l_x)_*\big(s(x)\big)\rangle = 1$ для всех $x \in M^n$, т.е. $\langle l_x^* U, s(x)\rangle = 1$. Это, в частности, означает, что $l_x^* U$ — образующая группы $H^n(M^n, M^n \setminus \{x\})$.

Пусть $X = M^n \times M^n$ и $A = M^n \times M^n \setminus d(M^n)$. Тогда $U \in H^n(X, A)$. Для когомологического класса $\alpha^k \in H^k(M^n)$ класс $p_1^*(\alpha^k)$ лежит в $H^k(X)$, поэтому можно рассмотреть относительное cup-произведение $H^k(X) \otimes H^n(X, A) \to H^{n+k}(X, A)$. Положим $\Phi^*(\alpha^k) = p_1^*(\alpha^k) \smile U \in H^{n+k}(M^{n\times})$.

Теорема 4.2.5 (изоморфизм Тома). $\Phi^* : H^k(M^n) \to H^{n+k}(M^{n\times})$ — *изоморфизм для всех k.*

Доказательство. Для каждого открытого множества $V \subset M^n$ пусть $U_V \in H^n(V^\times)$ — ограничение когомологического класса U на V. Рассмотрим относительное cap-произведение

$H^n(V^\times) \otimes H_k(V^\times) \to H_{k-n}(V \times M^n)$. Для $\beta_k \in H_k(V^\times)$ положим $\varphi_*(\beta_k) = (p_1)_*(U_V \frown \beta_k) \in H_{k-n}(V)$.

Пусть V — открытое множество, удовлетворяющее условию леммы 4.2.2. Тогда гомеоморфизм θ из этой леммы индуцирует изоморфизм $\theta^* : H^n\big(V \times M^n, V \times (M^n \setminus \{x\})\big) \to H^n(V^\times)$. Теорема 4.1.15 на с. 244 позволяет отождествить элемент $\theta^{*-1}(U_V)$ с элементом $1 \otimes \gamma^n \in H^0(V) \otimes H^n(M^n, M^n \setminus \{x\})$, где γ^n — образующая группы $H^n(M^n, M^n \setminus \{x\})$, для которой $\langle \gamma^n, s(x)\rangle = 1$ (в обозначениях теоремы 4.1.15 $\gamma^n = e^n$: мы отождествляем группы $H^n(M^n, M^n \setminus \{x\})$ и $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ посредством изоморфизма вырезания).

Гомоморфизм θ обладает тем свойством, что $p_1 = p_1\theta$ (на множестве V). Поэтому из естественности cap-произведения следует, что

$$(p_1)_*(U_V \frown \beta_k) = (p_1)_*\theta_*\Big(\theta^*\big(\theta^{*-1}(U_V)\big) \frown \beta_k\Big) = \\ = (p_1)_*\big(\theta^{*-1}(U_V) \frown \theta_*(\beta_k)\big).$$

Элемент $\theta_*(\beta_k)$ лежит в $H_k\big(V \times M^n, V \times (M^n \setminus \{x\})\big)$. Теорема Кюннета позволяет отождествить его с элементом $b_{k-n} \otimes s(x)$, где $b_{k-n} \in H_{k-n}(V)$.

Гомоморфизм $(p_1)_*$ переводит cup-произведение элементов $1 \otimes \gamma^n \in H^0(V) \otimes H^n(M^n, M^n \setminus \{x\})$ и $b_{k-n} \otimes s(x) \in H_{k-n}(V) \otimes H^n(M^n, M^n \setminus \{x\})$ в b_{k-n}. Это означает, что $\varphi_*(\beta_k) = b_{k-n}$. Отображение $\beta_k \mapsto b_{k-n}$ задаётся композицией изоморфизмов

$$H_k(V^\times) \xrightarrow{\theta} H_k\big(V \times M^n, V \times (M^n \setminus \{x\})\big) \cong \\ \cong H_{k-n}(V) \otimes H^n(M^n, M^n \setminus \{x\}) \cong H_{k-n}(V).$$

Таким образом, $\varphi_* : H_k(V^\times) \to H_{k-n}(V)$ — изоморфизм.

Используя стандартные рассуждения с последовательностью Майера–Вьеториса, получаем изоморфизм $\varphi_* : H_k(M^{n\times}) \to H_{k-n}(M^n)$ для всех $k \geqslant n$.

Перейдём на уровень цепей и построим для φ_* двойственное отображение коцепей. Затем от отображения коцепей перейдём к отображению когомологий $\varphi^* : H^k(M^n) \to H_{n+k}(M^{n\times})$. Покажем, что $\varphi^* = \Phi^*$, т.е. $\varphi^*(\alpha^k) = p_1^*(\alpha^k) \smile U$. Действительно,

$$\langle \varphi^*(\alpha^k), \beta_{k+n}\rangle = \langle \alpha^k, \varphi_*(\beta_{k+n})\rangle = \langle \alpha^k, (p_1)_*(U \frown \beta_{k+n})\rangle = \\ = \langle p_1^*(\alpha^k), (U \frown \beta_{k+n})\rangle = \langle p_1^*(\alpha^k) \smile U, \beta_{k+n}\rangle;$$

мы воспользовались тем, что $\langle \alpha^q, \beta^p \frown \gamma_{p+q}\rangle = \langle \alpha^q \smile \beta^p, \gamma_{p+q}\rangle$ (теорема 2.2.2 на с. 88).

Остаётся проверить, что φ^* — изоморфизм. Изоморфизм φ_* индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \operatorname{Ext}\bigl(H_{k-1}(M^n), \mathbb{Z}\bigr) & \to & H^k(M^n) & \to & \operatorname{Hom}\bigl(H_k(M^n), \mathbb{Z}\bigr) & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{*1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{*2}} & & \\
0 & \to & \operatorname{Ext}\bigl(H_{k+n-1}(M^{n\times}), \mathbb{Z}\bigr) & \to & H^{k+n}(M^{n\times}) & \to & \operatorname{Hom}\bigl(H_{k+n}(M^{n\times}), \mathbb{Z}\bigr) & \to & 0
\end{array}$$

Здесь φ_{*1} и φ_{*2} — изоморфизмы, поскольку φ_* — изоморфизм. Согласно 5-лемме φ^* тоже изоморфизм. $\square$

4.2.3. Двойственность Пуанкаре

При доказательстве теоремы двойственности Пуанкаре для топологических многообразий нам понадобятся следующие два свойства замкнутых топологических многообразий.

Теорема 4.2.6. *а) Любое замкнутое топологическое многообразие M^n можно вложить в $\mathbb{R}^k$ для некоторого k.*

б) Пусть $f : M^n \to \mathbb{R}^k$ — вложение замкнутого топологического многообразия M^n. Тогда существует открытое множество $U \supset f(M^n)$, ретрактом которого является $f(M^n)$.

Доказательство. а) Пусть $U_1, \dots, U_m$ — открытые множества, гомеоморфные $\mathbb{R}^n$ и покрывающие M^n. Фиксируем гомеоморфизмы $h_i : U_i \to \mathbb{R}^n \approx S^n \setminus \{y_0\}$ и рассмотрим отображение $f_i : M^n \to S^n$, заданное формулой

$$f_i(x) = \begin{cases} h_i(x) & \text{для } x \in U_i; \\ y_0 & \text{для } x \notin U_i. \end{cases}$$

Отображение f_i непрерывно, поскольку $\lim\limits_{x \to \partial U_i} f(x) = y_0$. Отображения $f_1, \dots, f_m$ можно рассматривать как одно отображение $f : M^n \to \prod_{i=1}^m S_i^n \subset \mathbb{R}^{m(n+1)}$. Ясно, что если $x \neq x'$, то $f(x) \neq f(x')$. Поэтому из компактности M^n и хаусдорфовости $\mathbb{R}^{m(n+1)}$ следует, что f — гомеоморфизм M^n на $f(M^n) \subset \mathbb{R}^{m(n+1)}$.

б) Для краткости будем обозначать образ M^n в $\mathbb{R}^k$ тоже M^n. Выберем в $\mathbb{R}^k$ достаточно большой симплекс Δ^k так, чтобы многообразие M^n лежало строго внутри Δ^k. Построим (бесконечную) триангуляцию пространства $\Delta^k \setminus M^n$ следующим образом. Сначала возьмём барицентрическое подразделение Δ^k. Среди полученных симплексов выберем те, которые пересекают M^n. Для этих симплексов тоже возьмём их барицентрические подразделения, а остальные симплексы оставляем без изменений. Следующий шаг делается точно так же и т.д.

Из компактности M^n следует, что расстояние от любой точки $x \in \Delta^k \setminus M^n$ до M^n положительно, поэтому у точки x есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом симплексов, построенных таким образом. Это означает, что наша конструкция действительно определяет некую триангуляцию K пространства $\Delta^k \setminus M^n$.

Построим теперь в Δ^k семейство подмножеств $N_0 \subset N_1 \subset \ldots$ и непрерывных отображений $r_i : N_i \to M^n$ так, что $M^n \subset N_i$ и ограничение r_i на M^n — тождественное отображение. В качестве N_0 возьмём объединение M^n и всех вершин симплициального комплекса K. Каждую точку $x \in N_0$ отображение r_0 переводит в ближайшую[1] к x точку M^n. В частности, $r_0(x) = x$ для всех точек $x \in M^n$.

Множества N_i и отображения r_i будем строить индукцией по i. При этом при переходе от N_i к N_{i+1} будут добавляться некоторые из $(i+1)$-мерных симплексов комплекса K. А именно, те симплексы $\Delta_\alpha^{i+1} \subset K$, границы которых содержатся в N_i, причём отображение $\partial\Delta_\alpha^{i+1} \xrightarrow{r_i} M^n$ можно продолжить до непрерывного отображения $\Delta_\alpha^{i+1} \to M^n$. Отображение r_{i+1} на Δ_α^{i+1} мы зададим следующим образом. Рассмотрим все непрерывные отображения $\varphi : \Delta_\alpha^{i+1} \to M^n$, продолжающие отображение r_i. Пусть $\delta(\varphi)$ — диаметр множества $\varphi(\Delta_\alpha^{i+1})$. Ясно, что $\delta(\varphi)$ не меньше диаметра множества $r_i(\partial\Delta_\alpha^{i+1})$. Пусть a — точная нижняя грань множества всех чисел $\delta(\varphi)$. Если $a = 0$, то r_i отображает $\partial\Delta_\alpha^{i+1}$ в одну точку $x_\alpha \in M^n$. В таком случае положим $r_{i+1}(\Delta_\alpha^{i+1}) = x_\alpha$. Если $a > 0$, то в качестве отображения r_{i+1} на Δ_α^{i+1} выберем то из отображений φ, для которого $a \leqslant \delta(\varphi) < 2a$.

Пусть $N = \bigcup_{i=0}^{\infty} N_i$, $r : N \to M^n$ — отображение, которое совпадает с r_i на N_i. Непосредственно из конструкции r видно, то это отображение непрерывно во всех точках множества $N \setminus M^n$. Поэтому остаётся проверить, что для каждой точки $x \in M^n$ отображение r непрерывно в точке x и, кроме того, N содержит открытую окрестность точки x.

Лемма 4.2.4. *Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta > 0$ так, что если $x \in \Delta^k \setminus M^n$ и $d(x, M^n) < \delta$, то любой k-мерный симплекс из K, содержащий x, имеет диаметр меньше ε.*

Доказательство. Выберем натуральное число m так, что диаметр лю-

[1] Множество $M^n \subset \mathbb{R}^k$ компактно, поэтому для любой точки $x \in \mathbb{R}^k$ есть хотя бы одна точка $y \in M^n$, для которой $\|x - y\| = d(x, M^n)$. Ближайшая к x точка M^n — это любая из таких точек y.

бого симплекса m-го барицентрического подразделения симплекса Δ^k меньше ε. Пусть K_m — подкомплекс в K, состоящий из тех симплексов m-го барицентрического подразделения Δ^k, которые не пересекают M^n. Если $K_m = \varnothing$, то в качестве δ можно взять любое положительное число, например, ε. Если $K_m \neq \varnothing$, то положим $\delta = d(|K_m|, M^n)$. Это число положительно, поскольку множества $|K_m|$ и M^n компактные, причём они не пересекаются.

Предположим, что $d(x, M^n) < \delta$. Тогда $x \notin |K_m|$, поэтому k-мерный симплекс m-го барицентрического подразделения Δ^k, содержащий x, должен пересекать M^n. Согласно нашей конструкции такой симплекс барицентрически подразделяется. Поэтому k-мерный симплекс из K, содержащий x, получается не ранее чем на $(m+1)$-м шаге. Диаметр такого симплекса меньше ε. □

Для каждой точки $x \in M^n \subset \mathbb{R}^k$ и для каждого $\varepsilon > 0$ построим систему открытых окрестностей $V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_{k+1}$ в $\mathbb{R}^k$ так, что $V_{k+1} \subset N$ и $r(V_{k+1}) \subset D^k_{x,\varepsilon}$, где $D^k_{x,\varepsilon} = \{y \in \mathbb{R}^k \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$. В качестве V_0 выберем открытое подмножество в $D^k_{x,\varepsilon}$, которое содержит точку x и, кроме того, множество $V_0 \cap M^n$ является допустимым подмножеством, гомеоморфным $\mathbb{R}^n$. Будем также считать, что $V_0 \subset \Delta^k$. При $i \geqslant 1$ окрестность V_i строится по окрестности V_{i-1} следующим образом. Сначала выберем число $\varepsilon(i) > 0$ так, что $D^k_{x,5\varepsilon(i)} \subset V_{i-1}$. Затем, пользуясь леммой 4.2.4, выберем число $\delta(i)$ так, что если $y \in \Delta^k \setminus M^n$ и $\|x - y\| < \delta(i)$, то любой k-мерный симплекс из K, содержащий y, имеет диаметр меньше $\varepsilon(i)$. Можно считать, что $\delta(i) < \varepsilon(i)$. Открытое в $\mathbb{R}^k$ множество V_i выберем так, чтобы оно содержалось в $D^k_{x,\delta(i)}$ (и содержало точку x); кроме того, множество $V_i \cap M^n$ должно быть допустимым множеством, гомеоморфным $\mathbb{R}^n$. Будем также считать, что $V_i \subset \Delta^k$.

Пусть $y \in V_{k+1} \setminus M^n$, $\Delta^k(y)$ — k-мерный симплекс из K, содержащий y. По построению все вершины симплекса $\Delta^k(y)$ лежат в $D^k_{x,2\delta(k+1)} \subset V_k$. Если v — вершина симплекса $\Delta^k(y)$, то $\|v - r(v)\| \leqslant \|v - x\|$, поэтому образы всех вершин симплекса $\Delta^k(y)$ при отображении r лежат в $D^k_{x,4\delta(k+1)} \subset V_k$.

Множество $V_k \cap M^n$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, поэтому отображение r, заданное на вершинах симплекса $\Delta^k(y)$, можно продолжить на его рёбра Δ^1_α. Значит, $\Delta^1_\alpha \subset N$. У отображения r, заданного на вершинах симплекса $\Delta^k(y)$, есть продолжение на ребро Δ^1_α, для которого диаметр образа этого ребра меньше $2\delta(k+1)$, поэтому диаметр множества $r(\Delta^1_\alpha)$ меньше $4\delta(k+1) < \delta(k)$. Концы ребра Δ^1_α лежат в V_k, поэтому $r(\Delta^1_\alpha) \subset V_{k-1} \cap M^n$.

Такие же рассуждения можно применить для 2-мерного остова и т.д. В итоге получим, что $\Delta^k(y) \subset N$ и $r\big(\Delta^k(y)\big) \subset V_0 = D^k_{x,\varepsilon}$. В частности, $r(y) \in D^k_{x,\varepsilon}$, поэтому отображение r непрерывно в точке y. Кроме того, $V_{k+1} \subset N$. □

Лемма 4.2.5. *Для любого замкнутого топологического многообразия M^n существует открытая в $M^n \times M^n$ окрестность W множества $d(M^n)$, для которой отображения $p_1|_W$ и $p_2|_W$ гомотопны.*

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 4.2.6, вложим M^n в $\mathbb{R}^k$ и выберем окрестность U, которая ретрагируется на M^n. Из компактности M^n следует, что можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, что если расстояние в $\mathbb{R}^k$ между точками $x, y \in M^n$ меньше ε, то отрезок с концами x и y лежит в U.

Отображения p_1 и p_2 на множестве $d(M^n)$ совпадают. Поэтому компактность M^n позволяет выбрать в $M^n \times M^n$ окрестность W множества $d(M^n)$ так, что для любой точки $w \in W$ расстояние между точками $p_1(w)$ и $p_2(w)$ меньше ε. Отрезок с концами $p_1(w)$ и $p_2(w)$ лежит в U, поэтому отображения $p_1|_W$ и $p_2|_W$ гомотопны в U. Ретракция $r : U \to M^n$ позволяет по этой гомотопии построить гомотопию в M^n. □

Рассмотрим отображение $T : M^n \times M^n \to M^n \times M^n$, заданное формулой $T(x, y) = (y, x)$. Это отображение индуцирует отображение пар $T : M^{n\times} \to M^{n\times}$.

Лемма 4.2.6. *Если $\alpha \in H^*(M^{n\times})$, то $T^*\alpha = (-1)^n\alpha$.*

Доказательство. Пусть V — допустимое открытое подмножество M^n, гомеоморфное $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
H^*(M^{n\times}) & \xrightarrow{T^*} & H^*(M^{n\times}) \\
\big\downarrow{\scriptstyle i^*} & & \big\downarrow{\scriptstyle i^*} \\
H^n\big(V \times V, V \times V \setminus d(V)\big) & \xrightarrow{T^*} & H^n\big(V \times V, V \times V \setminus d(V)\big)
\end{array}$$

Здесь i^* — гомоморфизм, индуцированный вложением пар $\big(V \times V, V \times V \setminus d(V)\big) \to M^{n\times}$. Легко проверить, что $H^n\big(V \times V, V \times V \setminus d(V)\big) \cong \mathbb{Z}$. Действительно, точная последовательность пары показывает, что $H^n\big(V \times V, V \times V \setminus d(V)\big) \cong H^{n-1}\big(V \times V \setminus d(V)\big)$. Кроме того, $V \times V \setminus d(V) \approx \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \sim \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$. Значит, $H^n\big(V \times V, V \times V \setminus d(V)\big) \cong H^{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. Образующей этой группы служит элемент $\beta = i^*(U)$, где гомоморфизм i^* индуцирован вложением $V \subset M^n$.

Покажем, что $T^*\beta = (-1)^n\beta$. Пара $\big(V \times V, V \times V \setminus d(V)\big)$ гомотопически эквивалентна паре $\big(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})\big) \sim (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Эта гомотопия строится следующим образом. Отождествим V с $\mathbb{R}^n$ и в каждом слое $\{y_0\} \times \mathbb{R}^n$ точку (y_0, y_0), принадлежащую $d(V)$, сдвинем в точку $(y_0, 0)$ так, чтобы слой перешёл в себя. Эту гомотопию можно построить так, чтобы точка $(y_0, 0)$ перешла в $(y_0, -y_0)$. Достаточно проследить, как T действует на один слой, например, на слой $y_0 = 0$. Под действием T точка $(0, x_0)$ переходит в точку $(x_0, 0)$. После гомотопии получаем точку $(x_0, -x_0)$. Спроецировав эту точку на исходный слой, получим точку $(0, -x_0)$. Значит, гомоморфизм $T^* : H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ индуцирован отображением $x_0 \mapsto -x_0$. Степень этого отображения равна $(-1)^n$.

Пусть W — открытая окрестность множества $d(M^n)$, удовлетворяющая условию леммы 4.2.5. Заменив при необходимости W на $TW \cap W$, можно считать, что окрестность W инвариантна относительно T. Положим $U = M^n \times M^n \setminus W$. Тогда $\bar{U} \subset M^n \times M^n \setminus d(M^n)$, поэтому можно применить теорему о вырезании и получить гомоморфизм $H^*\big(W, W \setminus d(M^n)\big) \cong H^*(M^{n\times})$. Это позволяет представить изоморфизм Тома Φ^* в виде композиции отображений

$$H^*(M^n) \xrightarrow{(p_1|_W)^*} H^*(W) \xrightarrow{\smile U'} H^*\big(W, W \setminus d(M^n)\big) \cong H^*(M^{n\times}),$$

где U' — ограничение класса Тома на W. Пусть $\alpha \in H^*(M^{n\times})$. Воспользовавшись тем, что $p_1 T = p_2$, получим

$$\begin{aligned} T^*\big((p_1|_W)\big)(\alpha) \smile U'\big) &= (p_2|_W)(\alpha) \smile T^*(U') = \\ &= (-1)^n (p_2|_W)(\alpha) \smile U'. \end{aligned}$$

Но $(p_1|_W) \sim (p_2|_W)$, поэтому $T^*\Phi^*(\alpha) = (-1)^n\Phi^*(\alpha)$, а значит, $T^*\alpha = (-1)^n\alpha$, поскольку Φ^* — изоморфизм. □

Теперь у нас почти всё готово для доказательства теоремы двойственности Пуанкаре. Убедимся лишь в том, что группы гомологий замкнутого топологического многообразия конечно порождённые.

Теорема 4.2.7. *Если M^n — замкнутое топологическое многообразие, то группа $H_*(M^n)$ конечно порождённая.*

Доказательство. Будем считать, что M^n вложено в $\mathbb{R}^k$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^k$ открытое множество $U \supset M^n$, ретрактом которого является M^n. Пусть Δ^k — симплекс в $\mathbb{R}^k$, содержащий U. Расстояние d между компактными множествами M^n и $\Delta^k \setminus U$ положительно, поэтому можно выбрать m так , что диаметр любого симплекса m-го барицентрического подразделения симплекса Δ^k меньше d.

Рассмотрим симплициальный комплекс K, состоящий из тех симплексов m-го барицентрического подразделения Δ^k, которые пересекают M^n. Ясно, что $M^n \subset |K| \subset U$. Пусть $r : |K| \to M^n$ — ограничение ретракции $U \to M^n$. Композиция отображений $M^n \xrightarrow{i} |K| \xrightarrow{r} M^n$ является тождественным отображением, поэтому $r_* : H_*(|K|) \to H_*(M^n)$ — эпиморфизм. Но группа $H_*(|K|)$ конечно порождённая, поэтому группа $H_*(M^n)$ тоже конечно порождённая. $\square$

Теорема 4.2.8 (двойственность Пуанкаре). *Пусть M^n — замкнутое ориентируемое топологическое многообразие с ориентацией s, $[M^n] \in H_n(M^n)$ — фундаментальный класс, соответствующий ориентации s. Тогда отображение $D : H^k(M^n) \to H_{n-k}(M^n)$, заданное формулой $D(a^k) = a^k \frown [M^n]$, является изоморфизмом при всех k.*

Доказательство. Пусть $\alpha' \in C_n(M^n)$ — цикл, представляющий фундаментальный класс $[M^n]$. Рассмотрим отображение $D_\# : C^k(M^n) \to C_{n-k}(M^n)$, заданное формулой $D_\# a' = a' \frown \alpha'$. Из равенства $\partial\alpha' = 0$ следует, что $\partial D_\# = (-1)^{n-k} D_\# \delta$, поскольку $\partial(D_\# \alpha') = \partial(a' \frown \alpha') = (-1)^{n-k} \delta a' \frown \alpha' + a' \frown \partial\alpha' = (-1)^{n-k} \delta a' \frown \alpha' = (-1)^{n-k} D_\#(\delta a')$. Значит, отображение $D_\#$ переводит коцикл в цикл, поэтому оно индуцирует гомоморфизм (ко)гомологий, который совпадает с гомоморфизмом D.

Теорему двойственности Пуанкаре мы сначала докажем для коэффициентов $\mathbb{Z}_p$, а уже из этого выведем её для коэффициентов $\mathbb{Z}$. Поэтому будем рассматривать (ко)гомологии с коэффициентами R, где R — коммутативное кольцо с единицей.

Для гомологических классов $\alpha, \beta \in H_*(M^n; R)$ обозначим через $\alpha \times \beta$ образ элемента $\alpha \otimes \beta$ в $H_*(M^n \times M^n; R)$ при мономорфизме из теоремы Кюннета. Для когомологических классов $a, b \in H^*(M^n; R)$ обозначим через $a \times b$ элемент $p_1^*(a) \smile p_2^*(b) \in H^*(M^n \times M^n; R)$. Как и ранее, $U \in H^n(M^{n\times})$ — класс Тома. Далее, $\tilde{U} = i^*(U)$ — элемент $H^n(M^n \times M^n)$, соответствующий U при гомоморфизме $i^* : H^n(M^{n\times}) \to H^n(M^n \times M^n)$. При гомоморфизме колец $\mathbb{Z} \to R$, переводящем 1 в единицу кольца R, элемент $\tilde{U}$ переходит в элемент кольца $H^n(M^n \times M^n; R)$, который мы тоже будем обозначать $\tilde{U}$. Наконец, $[x]$ — образующая группы $H_0(M^n)$, заданная произвольной точкой $x \in M^n$.

Элемент $[x] \times [M^n]$ представлен в $H_n(M^n \times M^n)$ циклом $(l_x)_*([M^n])$, поэтому гомоморфизм $i_* : H_n(M^n \times M^n) \to H_n(M^{n\times})$ переводит элемент $[x] \times [M^n]$ в $(l_x)_*\bigl(s(x)\bigr)$. Значит,

$$\langle \tilde{U}, [x] \times [M^n] \rangle = \langle i_*(U), [x] \times [M^n] \rangle = \langle U, (l_x)_*\bigl(s(x)\bigr) \rangle = 1.$$

Классы $[x] \times [M^n]$ и $[M^n] \times [x]$ получаются друг из друга посредством преобразования T_*, поэтому $[M^n] \times [x] = (-1)^n [x] \times [M^n]$. Таким образом,

$$\langle \tilde{U}, [M^n] \times [x] \rangle = (-1)^n \langle \tilde{U}, [x] \times [M^n] \rangle = 1. \tag{4.1}$$

Докажем ещё одну формулу: если $a^p \in H^p(M^n; R)$ и $b^q \in H^q(M^n; R)$, то

$$\tilde{U} \smile (a^p \times b^q) = (-1)^{pq} \tilde{U} \smile (b^q \times a^p); \tag{4.2}$$

здесь подразумевается, что $\tilde{U} \in H^n(M^n \times M^n; R)$. Действительно, согласно лемме 4.2.6

$$\begin{aligned}(-1)^n U \smile (a^p \times b^q) &= T^*\bigl(U \smile (a^p \times b^q)\bigr) = \\ &= T^*(U) \smile T^*(a^p \times b^q) = \\ &= (-1)^{n+pq} U \smile (b^q \times a^p).\end{aligned}$$

Из этого равенства для U следует равенство (4.2) для $\tilde{U}$.

Основная цель наших вычислений состоит в том, чтобы выразить

$$\langle \tilde{U}, D(a^k) \times \beta_k \rangle = \langle \tilde{U}, (a^k \frown [M^n]) \times \beta_k \rangle$$

через $\langle a^k, \beta_k \rangle$. Для этого помимо формул (4.1) и (4.2) нужны выражения для $(a^k \times 1) \frown ([M^n] \times \beta_k)$ и $(1 \times a^k) \frown ([M^n] \times \beta_k)$. По определению $a^k \times 1 = p_1^*(a^k) \smile p_2^*(1) = p_1^*(a^k) \smile 1$ и $1 \times a^k = 1 \smile p_2^*(a^k)$. Поэтому

$$\begin{aligned}&(a^k \times 1) \frown ([M^n] \times \beta_k) = p_1^*(a_k) \frown ([M^n] \times \beta_k) \text{ и} \\ &(1 \times a^k) \frown ([M^n] \times \beta_k) = p_2^*(a_k) \frown ([M^n] \times \beta_k).\end{aligned}$$

Пусть $[m_0, \ldots, m_n]$ и $[b_0, \ldots, b_k]$ — симплексы, входящие в представителей гомологических классов $[M^n]$ и β_k. Тогда $[m_0, \ldots, m_n] \times [b_0, \ldots, b_k]$ представляет собой сумму симплексов $[v_0, \ldots, v_{n+k}]$, где $v_i = (m_{M(i)}, b_{B(i)})$ и при этом $v_{i+1} = (m_{M(i)+1}, b_{B(i)})$ или $v_{i+1} = (m_{M(i)}, b_{B(i)+1})$. По определению

$$\begin{aligned}p_1^*(a^k) \frown [v_0, \ldots, v_{n+k}] &= \langle p_1^*(a^k), [v_n, \ldots, v_{n+k}] \rangle [v_0, \ldots, v_n] = \\ &= \langle a^k, p_1[v_n, \ldots, v_{n+k}] \rangle [v_0, \ldots, v_n] = \\ &= \langle a^k, [m_{M(n)}, \ldots, m_{M(n+k)}] \rangle [v_0, \ldots, v_n], \\ p_2^*(a^k) \frown [v_0, \ldots, v_{n+k}] &= \langle a^k, [b_{B(n)}, \ldots, b_{B(n+k)}] \rangle [v_0, \ldots, v_n].\end{aligned}$$

Чтобы получились ненулевые выражения, симплексы $[m_{M(n)}, \ldots, m_{M(n+k)}]$ и $[b_{B(n)}, \ldots, b_{B(n+k)}]$ должны быть невырожденными. Во втором случае симплекс $[v_0, \ldots, v_{n+k}]$ этим условием определяется однозначно, поэтому $p_2^*(a_k) \frown ([M^n] \times \beta_k) = \langle a^k, \beta_k \rangle [M^n] \times [b_0]$; вместо $[b_0]$ можно взять $[x]$, потому что все точки связного многообразия M^n задают один и тот же 0-мерный класс гомологий. В первом случае однозначно определён только симплекс $[v_n, \ldots, v_{n+k}]$. Для симплекса $[v_0, \ldots, v_{n+k}]$ должно выполняться только условие $v_0 = (m_0, b_0)$ и $v_n = (m_{n-k}, b_k)$. Сумма всех таких симплексов равна $[m_0, \ldots, m_{n-k}] \times [b_0, \ldots, b_k]$. Поэтому $p_1^*(a_k) \frown ([M^n] \times \beta_k) = (a_k \frown ([M^n]) \times \beta_k$.

Теперь мы получаем, что

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{U}, (a^k \frown [M^n]) \times \beta_k \rangle &= \langle \tilde{U}, (a^k \times 1) \frown ([M^n] \times \beta_k) \rangle = \\
&= \langle \tilde{U} \smile (a^k \times 1), [M^n] \times \beta_k \rangle \overset{(4.2)}{=} \\
&\overset{(4.2)}{=} \langle \tilde{U} \smile (1 \times a^k), [M^n] \times \beta_k \rangle = \\
&= \langle \tilde{U}, (1 \times a^k) \frown ([M^n] \times \beta_k) \rangle = \\
&= \langle \tilde{U}, \langle a^k, \beta_k \rangle [M^n] \times [x] \rangle \overset{(4.1)}{=} \\
&\overset{(4.1)}{=} (-1)^n \langle a^k, \beta_k \rangle,
\end{aligned}$$

т.е.

$$\langle \tilde{U}, D(a^k) \times \beta_k \rangle = (-1)^n \langle a^k, \beta_k \rangle. \tag{4.3}$$

Соотношение (4.3) позволяет сделать вывод, что если $a^k \neq 0$, то $D(a^k) \neq 0$. Значит, отображения $H^k(M^n; R) \xrightarrow{D} H_{n-k}(M^n; R)$ и $H^{n-k}(M^n; R) \xrightarrow{D} H_k(M^n; R)$ — мономорфизмы. Если кольцо R является полем, то $H^k(M^n; R)$ — линейное пространство над полем R, двойственное пространству $H_k(M^n; R)$. Согласно теореме 4.2.7 эти пространства конечномерные, поэтому они изоморфны одному и тому же линейному пространству V_k. Мы получили два мономорфизма $V_k \to V_{n-k}$ и $V_{n-k} \to V_k$ конечномерных линейных пространств. Следовательно, эти мономорфизмы являются изоморфизмами. Таким образом, теорема двойственности Пуанкаре доказана для коэффициентов $\mathbb{Z}_p$, p — простое число.

Чтобы доказать теорему двойственности Пуанкаре для коэффициентов $\mathbb{Z}$, построим цепной комплекс с группами цепей $C_{n-k} = C^{k+1}(M^n) \oplus C_{n-k}(M^n)$, т.е. $C_k = C^{n-k+1}(M^n) \oplus C_k(M^n)$. Граничный гомоморфизм $\bar\partial : C_k \to C_{k-1}$ зададим формулой

$$\bar\partial(a^{n-k+1}, \beta_k) = \big((-1)^k \delta a^{n-k+1}, \partial\beta_k + D_\#(a^{n-k+1})\big).$$

Легко проверить, что $\bar\partial\bar\partial = 0$. Действительно,

$$\bar\partial\bar\partial(a^{n-k+1}, \beta_k) = \\ = \big(-\delta\delta a^{n-k+1}, \partial(\partial\beta_k + D_\#(a^{n-k+1}) + (-1)^k D_\#(\delta a^{n-k+1})\big) = 0,$$

поскольку $\partial D_\#(a^{n-k+1}) = (-1)^{k+1} D_\#\delta(a^{n-k+1})$.

Имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to C_k(M^n) \to C^{n-k+1}(M^n) \oplus C_k(M^n) \to C^{n-k+1}(M^n) \to 0.$$

Из таких коротких точных последовательностей групп складывается точная последовательность цепных комплексов. Здесь, правда, отображение $C_* \to C^*(M^n)$ является цепным только с точностью до знака, но и этого достаточно для построения точной последовательности гомологий цепных комплексов. Покажем, что в этой точной последовательности связывающий гомоморфизм $H^{n-k+1}(M^n) \to H_{k-1}(M^n)$ совпадает с гомоморфизмом D. Действительно, пусть $a \in C^{n-k+1}(M^n)$ и $\delta a = 0$. Выберем в C_k элемент $(a, 0)$, который отображается в a. Затем рассмотрим $\bar\partial(a, 0) = \big(0, D_\#(a)\big)$ и возьмём в $C_k(M^n)$ прообраз этого элемента. Он равен $D_\#(a)$. Отображение $a \mapsto D_\#(a)$ и есть связывающий гомоморфизм (на уровне цепей).

Ту же самую конструкцию можно применить для коэффициентов $\mathbb{Z}_p$ и получить точную последовательность

$$\ldots \to H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{D} H_k(M^n; \mathbb{Z}_p) \to \\ \to H_k(C_*; \mathbb{Z}_p) \to H^{n-k+1}(M^n; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{D} \ldots,$$

в которой гомоморфизмы D — изоморфизмы. Из этого следует, что $H_*(C_*; \mathbb{Z}_p) = 0$. Но все группы $H_*(C_*)$ конечно порождённые, поэтому из формулы универсальных коэффициентов следует, что $H_*(C_*) = 0$. Значит, D — изоморфизм и для коэффициентов $\mathbb{Z}$. $\square$

Любое связное замкнутое топологическое многообразие ориентируемо относительно коэффициентов $\mathbb{Z}_2$, поэтому те же самые рассуждения (только в упрощённом виде) показывают, что отображение $D : H^k(M^n; \mathbb{Z}_2) \to H_{n-k}(M^n; \mathbb{Z}_2)$, заданное формулой $D(a^k) = a^k \frown [M^n]_2$, является изоморфизмом.

4.2.4. Двойственность Лефшеца

Для топологических многообразий теорема двойственности Лефшеца выводится из теоремы двойственности Пуанкаре по той же самой схеме, что и для гладких многообразий. Но теперь нам нужна теорема о воротнике для топологических многообразий, которая доказывается более сложно, чем в гладком случае. Кроме того, нужно построить фундаментальный класс ориентированного топологического многообразия с краем и доказать его свойства.

Теорему о воротнике для топологических многообразий доказал Браун [Br]; наше изложение следует [Co1].

Теорема 4.2.9 (о воротнике). *Пусть M^n — компактное топологическое многообразие с краем $B = \partial M^n$. Тогда в M^n существует открытое множество U, которое содержит B и гомеоморфно $B \times [0, 1)$. Более того, гомеоморфизм $h : U \to B \times [0, 1)$ можно выбрать так, что $h(x) = (x, 0)$ для всех точек $x \in B$.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in B$ можно выбрать в B открытое множество U_x так, что существует вложение $h_x : \bar{U}_x \times [0, 1] \to M^n$, для которого $h_x(y, 0) = y$ для всех $y \in \bar{U}_x$. Множество B компактно, поэтому из покрытия $\{\bar{U}_x\}$ можно выбрать конечное подпокрытие $\{\bar{U}_{x_1}, \ldots, \bar{U}_{x_m}\}$. Для краткости эти множества будем обозначать $U_1, \ldots, U_m$, а соответствующие вложения — $h_1, \ldots, h_m$.

Топологическое пространство B хаусдорфово и компактно, поэтому оно нормально. Значит, в покрытие $\{U_i\}$ можно вписать открытое покрытие $\{V_i\}$ так, что $\bar{V}_i \subset U_i$.

Основная идея доказательства теоремы о воротнике состоит в том, чтобы рассмотреть топологическое пространство M^+, которое получается приклеиванием $B \times [-1, 0]$ к M^n по отображению $\varphi : B \times \{0\} \to M^n$, переводящему точку $(x, 0)$ в точку $x \in B \subset M^n$. Затем с помощью «локальных воротников» $h_i : \bar{U}_i \times [0, 1] \to M^n$ индукцией по m нужно построить гомеоморфизм M^n на M^+.

Зададим вложения $H_i : \bar{U}_i \times [-1, 1] \to M^+$ формулой

$$H_i(x) = \begin{cases} h_i(x) & \text{для } x \in \bar{U}_i \times [0, 1]; \\ x & \text{для } x \in \bar{U}_i \times [-1, 0]. \end{cases}$$

На $\bar{U}_i \times \{0\}$ оба отображения согласованы, поэтому получаем корректно определённые вложения. Мы воспользуемся ими для индуктивного построения функций $f_i : B \to [-1, 0]$ и вложений $g_i : M^n \to M^+$ для $i = 0, 1, \ldots, m$, которые обладают следующими свойствами:

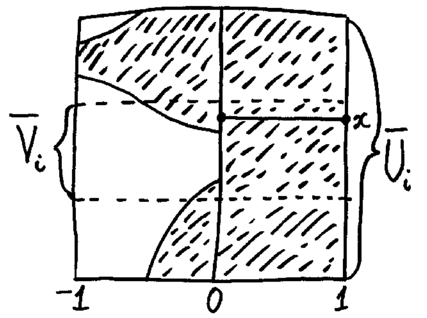

Рис. 4.5. Множество $H_i^{-1}\big(g_{i-1}(M^n)\big)$

(а) $f_i(x) = -1$ для $x \in \bigcup_{j=1}^{i} \bar V_j$ (в частности, $f_m(x) = -1$ для всех $x \in B$);

(б) $g_i(x) = \big(x, f_i(x)\big)$ для $x \in B$;

(в) $g_i(M^n) = M^n \cup \{(x,t) \mid t \geqslant f_i(x)\}$.

Если удастся построить такие отображения, то g_m — гомеоморфизм M^n на M^+, поэтому мы получаем требуемый воротник.

Положим $g_0 = \mathrm{id}_{M^n}$ и $f_0 \equiv 0$. Будем считать, что f_{i-1} и g_{i-1} уже построены, и займёмся построением f_i и g_i. Рассмотрим множество $H_i^{-1}\big(g_{i-1}(M^n)\big) \subset \bar U_i \times [-1, 1]$. Множество $g_{i-1}(M^n)$ содержит M^n, поэтому $H_i^{-1}\big(g_{i-1}(M^n)\big) \supset \bar U_i \times [0, 1]$; схематично это изображено на рис. 4.5. Мы хотим построить вложение $\varphi_i : H_i^{-1}\big(g_{i-1}(M^n)\big) \to \bar U_i \times [-1, 1]$, раздувая слои над точками $x \in B$ до тех пор, пока слой над каждой точкой $x \in \bar V_i$ не совпадёт со всем отрезком $[-1, 1]$; по-другому это можно записать так: $\varphi_i\Big(H_i^{-1}\big(g_{i-1}(\bar V_i)\big)\Big) = \bar U_i \times [-1, 0]$. При этом мы хотим, чтобы отображение φ_i было тождественно на $(\bar U_i \setminus U_i) \times [-1, 1]$ и на $\bar U_i \times \{0\}$. Чтобы построить такое вложение, мы воспользуемся леммой Урысона (часть I, теорема 7.6). Замкнутые множества $\bar U_i \setminus U_i$ и $\bar V_i$, лежащие в нормальном пространстве B, не пересекаются. Поэтому существует функция $\lambda_i : \bar U_i \to [0, 1]$, которая принимает значение 0 на $\bar U_i \setminus U_i$ и значение 1 на $\bar V_i$. Пусть L_x — аффинное отображение отрезка $[f_{i-1}(x), 1]$ на отрезок $\big[\big(1 - \lambda_i(x)\big) f_{i-1}(x) + \lambda_i(x)(-1), 1\big]$; при $x \in \bar V_i$ получаем отрезок $[-1, 1]$, а при $x \in \bar U_i \setminus U_i$ получаем отрезок $[f_{i-1}(x), 1]$, т.е. в этом случае отображение тождественное. Для $(x,t) \in H_i^{-1}\big(g_{i-1}(M^n)\big)$ положим

$\varphi_i(x,t) = \bigl(x, L_x(t)\bigr)$; отображение φ_i непрерывное. Зададим, далее, отображение $\Phi_i : g_i(M^n) \to M^+$ формулой

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} H_i\varphi_i H_i^{-1}(x) & \text{для } x \in g_{i-1}(M^n) \cap H_i(\bar{U}_i \times [-1,\, 1]); \\ x & \text{для всех других } x \in g_i(M^n). \end{cases}$$

Наконец, положим $g_i = \Phi_i g_{i-1}$. Корректность определения Φ_i (а тем самым и g_i) следует из того, что отображение φ_i тождественно на $(\bar{U}_i \setminus U_i) \times [-1,\, 1]$ и на $\bar{U}_i \times \{0\}$. Отображение Φ_i (а тем самым и g_i) является вложением, потому что φ_i — вложение, поскольку каждое отображение L_x взаимно однозначно. Кроме того,

$$g_{i-1}(M^n) \cap H_i(\bar{U}_i \times [-1,\, 1]) = H_i(\bar{U}_i \times [0,\, 1]) \cup \{(x,t) \mid t \geqslant f_{i-1}(x),\ x \in \bar{U}_i\}$$

в силу свойства (в) для g_{i-1}. Функция $f_i(x)$ определяется теперь свойством (б). Свойства (а) и (в) выполняются по построению. □

Пусть M^n — компактное топологическое многообразие с краем ∂M^n. Рассмотрим замкнутое топологическое многообразие $\tilde{M}^n$, которое получается из двух экземпляров многообразия M^n отождествлением соответствующих точек их краёв.

Для всех точек $x \in M^n \setminus \partial M^n$ можно определить группы T_x и построить накрытие $\mathcal{T} \to M^n \setminus \partial M^n$. Многообразие M^n называют *ориентируемым*, если у этого накрытия существует такое сечение s, что $s(x)$ — образующая группы T_x для всех $x \in M^n \setminus \partial M^n$. Сечение s называют при этом *ориентацией*. Легко проверить, что многообразие M^n ориентируемо тогда и только тогда, когда многообразие $\tilde{M}^n$ ориентируемо. Кроме того, если многообразие M^n ориентируемо, то многообразие ∂M^n тоже ориентируемо, т.е. каждая компонента связности ∂M^n ориентируема.

Гомологический класс $\alpha \in H_n(M^n, \partial M^n)$ называют *фундаментальным*, если для всех $x \in M^n \setminus \partial M^n$ отображение $p_* : H_n(M^n, \partial M^n) \to H_n(M^n, M^n \setminus \{x\}) = T_x$ переводит α в образующую α_x группы T_x.

Теорема 4.2.10. *Пусть M^n — компактное связное ориентируемое топологическое многообразие с краем ∂M^n, s — ориентация M^n. Тогда существует единственный фундаментальный класс $\alpha \in H_n(M^n, \partial M^n)$, для которого $\alpha_x = s(x)$ при всех $x \in M^n \setminus \partial M^n$. При этом связывающий гомоморфизм $\partial_* : H_n(M^n, \partial M^n) \to H_{n-1}(\partial M^n)$ переводит α в фундаментальный класс замкнутого многообразия ∂M^n, т.е. $\partial_*(\alpha)$ задаёт на каждой компоненте связности многообразия ∂M^n фундаментальный класс.*

Доказательство. Ориентация s задаёт ориентацию $\tilde{s}$ многообразия $\tilde{M}^n$. Многообразие $\tilde{M}^n$ замкнутое и ориентируемое, поэтому существует фундаментальный класс $\tilde{\alpha} \in H_n(\tilde{M}^n)$, для которого $(p_x)_*(\tilde{\alpha}) = \tilde{s}(x)$ для всех $x \in \tilde{M}^n$. Класс α мы будем строить по классу $\tilde{\alpha}$. Для этого нам потребуется изоморфизм

$$H_n\big((\tilde{M}^n, \tilde{M}^n \setminus (M^n \setminus \partial M^n)\big) \cong H_n(M^n, \partial M^n).$$

Этот изоморфизм можно было бы получить, вырезав $(M^n)' \setminus \partial M^n$, где $(M^n)'$ — второй экземпляр многообразия M^n. Но так поступать нельзя, потому что условие $\overline{(M^n)' \setminus \partial M^n} \subset \operatorname{int}(M^n)'$ не выполняется. Для построения требуемого изоморфизма нужно воспользоваться теоремой о воротнике: мы будем вырезать $(M^n)' \setminus \partial M^n$ не из $(M^n)'$, а из объединения $(M^n)'$ и воротника M^n. При этом нужно ещё воспользоваться очевидными гомотопическими эквивалентностями.

Класс α мы определим как образ класса $\tilde{\alpha}$ при композиции гомоморфизмов

$$H_n(\tilde{M}^n) \to H_n\big((\tilde{M}^n, \tilde{M}^n \setminus (M^n \setminus \partial M^n)\big) \xrightarrow{\cong} H_n(M^n, \partial M^n).$$

Выполнение равенства $\alpha_x = s(x)$ при этом очевидно.

Пусть $x \in \partial M^n$. Возьмём в некоторой карте многообразия ∂M^n замкнутый шар D^{n-1} с центром x и рассмотрим в открытом множестве $U = \partial M^n \times [0,\, 1)$ из теоремы о воротнике подмножество $E = \{(x,t) \mid x \in D^{n-1},\, t \in [0, 1/2]\}$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(M^n, \partial M^n) & \xrightarrow{i_*} & H_n(M^n, M^n \setminus \operatorname{int} E) & \underset{\cong}{\xleftarrow{k_*}} & H_n(E, \partial E) \\
\downarrow \partial_* & & \downarrow \partial_* & & \cong \downarrow \partial_* \\
H_{n-1}(\partial M^n) & \xrightarrow{i'_*} & H_{n-1}(M^n \setminus \operatorname{int} E) & \xleftarrow{k'_*} & H_{n-1}(\partial E) \\
\downarrow (p_x)_* & & \downarrow & & \cong \downarrow \\
H_{n-1}(\partial M^n, \partial M^n \setminus \{x\}) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}\big(M^n \setminus \operatorname{int} E, (M^n \setminus \operatorname{int} E) \setminus \{x\}\big) & \xleftarrow{\cong} & H_{n-1}(\partial E, \partial E \setminus \{x\})
\end{array}$$

Горизонтальные изоморфизмы в этой диаграмме возникают из теоремы о вырезании (иногда вырезание нужно производить не непосредственно, а чуть более аккуратно, используя очевидные гомотопические эквивалентности).

Пусть $y \in \operatorname{int} E$. Представим гомоморфизм $(p_y)_* \colon H_n(M^n, \partial M^n) \to H_n(M^n, M^n \setminus \{y\})$ в виде композиции

$$H_n(M^n, \partial M^n) \xrightarrow{i_*} H_n(M^n, M^n \setminus \operatorname{int} E) \to H_n(M^n, M^n \setminus \{y\}).$$

Элемент $(p_y)_*(\alpha) = s(y)$ является образующей группы $H_n(M^n, M^n \setminus \{y\}) \cong \mathbb{Z}$, поэтому элемент $i_*(\alpha)$ тоже является образующей группы $H_n(M^n, M^n \setminus \operatorname{int} E) \cong \mathbb{Z}$. Значит, в группе $H_n(E, \partial E) \cong \mathbb{Z}$ можно выбрать образующую α' так, что $k_*(\alpha') = i_*(\alpha)$.

Коммутативность диаграммы показывает, что $k'_*\partial_*(\alpha') = i'_*\partial_*(\alpha)$. Поэтому образы элементов $\partial_*(\alpha)$ и $\partial_*(\alpha')$ в группе $H_{n-1}\big(M^n \setminus \operatorname{int} E, (M^n \setminus \operatorname{int} E) \setminus \{x\}\big) \cong \mathbb{Z}$ совпадают. При этом образ элемента $\partial_*(\alpha')$ является образующей, поэтому образ элемента $\partial_*(\alpha)$ тоже является образующей. Следовательно, элемент $(p_x)_*\partial_*(\alpha)$ является образующей группы $H_{n-1}(\partial M^n, \partial M^n \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$. Это означает, что $\partial_*(\alpha)$ — фундаментальный класс многообразия ∂M^n.

Теперь уже легко доказать оставшуюся часть теоремы — единственность фундаментального класса α. Предположим, что α_1 и α_2 — два фундаментальных класса в $H_n(M^n, \partial M^n)$, соответствующих одной и той же ориентации. Тогда $\partial_*(\alpha_1)$ и $\partial_*(\alpha_2)$ — два фундаментальных класса в $H_{n-1}(\partial M^n)$, соответствующих одной и той же ориентации. Поэтому $\alpha_1 - \alpha_2 \in \operatorname{Ker} \partial_*$.

Из теоремы о воротнике следует, что пространства M^n и $M^n \setminus \partial M^n$ гомотопически эквивалентны одному и тому же пространству $M^n \setminus U$, где $U = \partial M^n \times [0, 1)$. Поэтому $H_n(M^n) \cong H_n(M^n \setminus \partial M^n) = 0$. Следовательно, в точной последовательности

$$H_n(M^n) \to H_n(M^n, \partial M^n) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\partial M^n)$$

слева стоит нуль, а значит, $\operatorname{Ker} \partial_* = 0$. □

Теперь можно воспользоваться такими же рассуждениями, как для гладких многообразий (в триангулируемом случае), и доказать следующее утверждение.

Теорема 4.2.11 (двойственность Лефшеца). *Пусть M^n — компактное ориентируемое топологическое многообразие с краем ∂M^n, $[M^n] \in H_n(M^n, \partial M^n)$ — фундаментальный класс. Тогда гомоморфизмы $D : H_k(M^n, \partial M^n) \to H_{n-k}(M^n)$ и $D : H_k(M^n) \to H_{n-k}(M^n, \partial M^n)$, заданные cap-умножением на $[M^n]$, являются изоморфизмами.*

Для гомологий и когомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ теорема двойственности Лефшеца верна и в случае неориентируемых многообразий.

Задача 4.2.1. *[Sa1] Пусть M^n — компактное ориентируемое топологическое многообразие с краем ∂M^n. Предположим, что край ∂M^n разбит на непересекающиеся множества V_1 и V_2, каждое из которых состоит из нескольких связных компонент многообразия ∂M^n.*

Докажите, что гомоморфизм $H^k(M^n, V_1) \to H_{n-k}(M^n, V_2)$, заданный cap-умножением на $[M^n]$, является изоморфизмом.

4.2.5. Обобщение теоремы Хелли

Используя некоторые результаты § 4.2.1, а именно теоремы 4.2.1 и 4.2.2, можно перенести обобщённую теорему Хелли (теорема 4.1.10 на с. 235) на произвольные многообразия.

Теорема 4.2.12 (Дебруннер [De]). *Пусть M^n — n−мерное топологическое многообразие, $X_1, \ldots, X_m$ — набор открытых подмножеств M^n, причём пересечение любых $r \leqslant n+1$ множеств непусто и имеет нулевые приведённые гомологии для всех размерностей $\leqslant n - r$.*

а) Если M^n не является гомологической n−мерной сферой, то пространство $X_1 \cap \ldots \cap X_m$ ациклично (в частности, непусто).

б) Если M^n — гомологическая n−мерная сфера, то нужно дополнительно предположить, что никакие $n+2$ из множеств $X_1, \ldots, X_m$ не покрывают M^n; Тогда пространство $X_1 \cap \ldots \cap X_m$ тоже ациклично.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна для набора множеств $X_1, \ldots, X_m$, причём число m здесь минимально. Из минимальности m следует, что пересечение любых $r \leqslant m - 1$ из множеств $X_1, \ldots, X_m$ ациклично. Значит, к набору $X_1, \ldots, X_m$ можно применить лемму 4.1.1.

Предположим сначала, что $X_1 \cap \ldots \cap X_m = 0$. По условию теоремы это возможно лишь при $m \geqslant n+2$. Пусть $Y = X_1 \cup \ldots \cup X_m$. Согласно утверждению (а) леммы 4.1.1 группа $\tilde{H}_q(Y) = 0$ отлична от нуля в точности при $q = m - 2$. С другой стороны, согласно теореме 4.2.1 $\tilde{H}_q(Y) = 0$ при $q > n$, поэтому $m - 2 \leqslant n$. Сопоставляя это с неравенством $m \geqslant n + 2$, получаем $n = m - 2$. При этом $\tilde{H}_n(Y) \neq 0$, а это возможно лишь в том случае, когда $Y = M^n$. Действительно, если $Y \neq M^n$, то Y — некомпактное n−мерное многообразие без края, поэтому согласно теореме 4.1.10 $H_n(Y) = 0$. Итак, группа $\tilde{H}_q(M^n)$ отлична от нуля в точности при $q = n$. Это означает, что M^n — гомологическая сфера. Но по условию, если M^n — гомологическая сфера, то $Y \neq M^n$. Получено противоречие.

Предположим теперь, что $X_1 \cap \ldots \cap X_m \neq 0$. Мы также предположим, что пространство $X_1 \cap \ldots \cap X_m$ не ациклично. Поэтому можно выбрать наименьшее число $p \geqslant 0$, для которого $\tilde{H}_p(X_1 \cap \ldots \cap X_m) \neq 0$. Запишем число p в виде $p = q - m + 1$. Согласно утверждению (б) леммы 4.1.1 $\tilde{H}_q(X_1 \cup \ldots \cup X_m) \neq 0$. Применив к n−мерному многообразию

$X_1 \cup \ldots \cup X_m$ теорему 4.1.10, получим $q \leqslant n$. Кроме того, $q - m + 1 = p \geqslant 0$, поэтому $m \leqslant q + 1 \leqslant n + 1$. В таком случае по условию теоремы пространство $X_1 \cup \ldots \cup X_m$ имеет нулевые приведённые гомологии для всех размерностей $\leqslant n - m$. Поэтому $p > n - m$, т.е. $q - m + 1 > n - m$. Сопоставляя это с неравенством $q + 1 \leqslant n + 1$, получаем $q = n$. Из минимальности p (и, соответственно, q) следует, что $X_1 \cup \ldots \cup X_m$ — n—мерная гомологическая сфера. Но тогда $M^n = X_1 \cup \ldots \cup X_m$, а это противоречит условию. Снова получено противоречие. $\square$

Задача 4.2.2. *Приведите пример $n + 2$ открытых подмножеств S^n, пересечение любых $r \leqslant n + 1$ из которых является (непустым) стягиваемым множеством, а объединение всех этих множеств совпадает с S^n (в частности, оно не ациклично).*

4.3. Характеристические классы: продолжение

Многие свойства характеристических классов удобно доказывать, используя сингулярные гомологии и когомологии. Основная часть этих свойств связана с изоморфизмом Тома. Но начнём мы с доказательства теоремы 3.2.30, сформулированной на с. 191. При доказательстве мы будем использовать обозначения, введённые при формулировке этой теоремы и чуть раньше.

Доказательство теоремы 3.2.30. Достаточно проверить для $x_i(\xi)$ все свойства, которым должны удовлетворять характеристические классы. То, что $x_0(\xi) = 1$ и $x_i(\xi) = 0$ при $i > \dim \xi$, непосредственно включено в определение. Проверим, что если $g : B_1 \to B$ — произвольное отображение, то $x_i\big(g^*(\xi)\big) = g^*\big(x_i(\xi)\big)$.

Слои расслоений $g^*(\xi)$ и ξ над точками b_1 и $g(b_1)$ канонически отождествляются, поэтому слои расслоений $Pg^*(\xi)$ и $P\xi$ над этими точками тоже канонически отождествляются. Значит, определено отображение расслоений $\tilde{g} : E(Pg^*\xi) \to E(P\xi)$. Для этого отображения диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E(Pg^*\xi) & \xrightarrow{\tilde{g}} & E(P\xi) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

коммутативна. Значит, расслоение $\tilde{g}(\lambda_\xi)$ изоморфно расслоению $\lambda_{g^*\xi}$. Поэтому в кольце $H^*\big(E(Pg^*\xi)\big)$ имеет место равенство $\tilde{g}(a_\xi) =$

$= a_{g^*\xi}$. По определению $a^n_{g^*\xi} = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}x_i(g^*\xi)a^{n-i}_{g^*\xi}$ и $\tilde{g}^*(a^n_\xi) = \tilde{g}^*\left(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}x_i(\xi)a^{n-i}_\xi\right) = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}g^*\big(x_i(\xi)\big)\tilde{g}^*(a^{n-i}_\xi)$; при записи последнего равенства мы воспользовались тем, что $\tilde{g}^*(\beta a^i_\xi) = g^*(\beta)\tilde{g}^*(a^i_\xi)$ для любого элемента $\beta \in H^*(B)$. Учитывая однозначность разложений, получаем $x_i(g^*\xi) = g^*\big(x_i(\xi)\big)$, что и требовалось.

Перейдём к доказательству последнего (наиболее сложного) утверждения о том, что имеет место формула Уитни $x_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=k} x_i(\xi)x_j(\eta)$. (Формулу Уитни можно записать и другим эквивалентным способом, но сейчас нам удобнее доказывать её для расслоений над одной базой.) В линейном пространстве $V_1 \oplus V_2$ есть подпространства $V_1 \oplus \{0\}$ и $\{0\} \oplus V_2$, изоморфные V_1 и V_2. Поэтому в топологическом пространстве $E\big(P(\xi \oplus \eta)\big)$ канонически определены подпространства $E(P\xi)$ и $E(P\eta)$. При этом подпространства $E(P\eta)$ и $E(P\xi)$ являются деформационными ретрактами пространств $U = E\big(P(\xi \oplus \eta)\big) \setminus E(P\xi)$ и $V = E\big(P(\xi \oplus \eta)\big) \setminus E(P\eta)$, соответственно. Рассмотрим в кольце когомологий пространства $E\big(P(\xi \oplus \eta)\big)$ элементы $\alpha_1 = \sum_{i=0}^m(-1)^i x_i(\xi)y^{m-i}$ и $\alpha_2 = \sum_{j=0}^n(-1)^j x_j(\eta)y^{n-j}$, где $y = x_1(\lambda_{\xi\oplus\eta})$, $m = \dim\xi$ и $n = \dim\eta$. Введём для краткости обозначение $E = E\big(P(\xi \oplus \eta)\big)$. Рассмотрим когомологическую последовательность пары (E, V):

$$\ldots \to H^m(E,V) \xrightarrow{p^*} H^m(E) \xrightarrow{i^*} H^m(V) \to \ldots$$

Отображение i^* соответствует ограничению класса когомологий на V. Но $E(P\xi)$ является деформационным ретрактом пространства V, поэтому вместо ограничения на V можно рассматривать ограничение на $E(P\xi)$. Покажем, что при ограничении класса α_1 на $E(P\xi)$ получается класс $\sum_{i=0}^m(-1)^i x_i(\xi)a^{m-i}_\xi = 0$. Действительно, пусть $\lambda_\xi = f^*(\gamma^1)$. При ограничении класса $y = x_1(\lambda_{\xi\oplus\eta})$ на $E(P\xi)$ получаем класс $x_i(\lambda_\xi) = x_1(f^*\gamma^1) = f^*x_1(\gamma^1) = f^*(\alpha) = a_\xi$ (мы пользуемся доказанными ранее свойствами: естественностью и тем, что $x_1(\gamma^1) = \alpha$). Последовательность пары точна, поэтому существует элемент $\alpha_1' \in H^m(E,V)$, для которого $p^*\alpha_1' = \alpha_1$. Аналогично существует элемент $\alpha_2' \in H^m(E,U)$, для которого $p^*\alpha_2' = \alpha_2$. Элемент $\alpha_1' \smile \alpha_2'$ лежит в $H^*(E, U \cup V) = 0$, поэтому $\alpha_1' \smile \alpha_2' = 0$. Следовательно, $\alpha_1 \smile \alpha_2 = (p^*\alpha_1') \smile (p^*\alpha_2') = 0$. В итоге получаем

$$\left(\sum_{i=0}^m(-1)^i x_i(\xi)y^{m-i}\right)\left(\sum_{j=0}^n(-1)^j x_j(\eta)y^{n-j}\right) = 0.$$

В случае классов Штифеля–Уитни рассматриваются когомологии с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$, для которых умножение коммутативно. В случае классов Чженя x_i и y имеют чётную размерность, поэтому для них умножение тоже коммутативно. Поэтому полученное равенство можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{m+n}(-1)^k\left(\sum_{i+j=k} x_i(\xi)\smile x_j(\eta)\right)y^{m+n-k}=0.$$

С другой стороны, существуют единственные элементы $x_k(\xi\oplus\eta)$, для которых

$$\sum_{k=0}^{m+n}(-1)^k x_k(\xi\oplus\eta)y^{m+n-k}=0.$$

Значит, $x_k(\xi\oplus\eta)=\sum_{i+j=k} x_i(\xi)\smile x_j(\eta)$, что и требовалось.

4.3.1. Изоморфизм Тома для расслоений

У каждого гладкого многообразия есть касательное расслоение. У топологического же многообразия касательного расслоения нет. В связи с этим Милнор [Mi4] ввёл понятие микрорасслоения, которое обобщает понятие векторного расслоения. При этом у каждого топологического многообразия есть касательное микрорасслоение, с которым во многих отношениях можно работать так же, как с касательным расслоением гладкого многообразия. Например, приведённое выше доказательство теоремы двойственности Пуанкаре для топологических многообразий фактически основано на использовании микрорасслоений.

Микрорасслоение размерности n — это отображение $p\colon E\to B$, которое обладает следующими свойствами:

1) существует отображение $i\colon B\to E$, для которого $pi=\mathrm{id}_B$;

2) отображение p локально тривиально в том смысле, что для любой точки $b\in B$ найдутся открытые окрестности $U\ni b$, $V\ni i(b)$ и гомеоморфизм $h_b\colon U\times\mathbb{R}^n\to V\cap p^{-1}(U)$, для которых $ph_b(u,v)=u$ для всех $(u,v)\in U\times\mathbb{R}^n$ и $h_b(u,v)=i(u)$ для всех $u\in U$.

Пример 4.3.1. *Векторное расслоение $p\colon E\to B$ является микрорасслоением. В качестве i можно взять нулевое сечение $i(b)=(b,0)$.*

Пример 4.3.2. *Пусть M — топологическое многообразие без края. Тогда проекция $p\colon M\times M\to M$ на первый множитель является микрорасслоением. В качестве i можно взять диагональное отображение $d\colon M\to M\times M$.*

Доказательство того, что в примере 4.3.2 действительно получается микрорасслоение, фактически содержится в доказательстве леммы 4.2.2 на с. 262. Это микрорасслоение называют *касательным микрорасслоением* топологического многообразия M.

Для топологического многообразия M с краем ∂M касательное микрорасслоение можно определить следующим образом. Приклеим к краю многообразия M прямое произведение $\partial M \times [0,\, 1)$. Из теоремы о воротнике следует, что в результате получится топологическое многообразие M'. У M' края нет. Касательное микрорасслоение многообразия M' — это ограничение на $M \times M$ касательного микрорасслоения многообразия M'.

Обычно микрорасслоение $p : E \to B$ рассматривается вместе с фиксированным отображением $i : B \to E$.

Два микрорасслоения $p : E \to B$ и $p' : E' \to B$ (над одной и той же базой B) с фиксированными отображениями $i : B \to E$ и $i' : B \to E'$ называют *эквивалентными*, если в E и в E' есть открытые окрестности U и U' множеств $i(B)$ и $i'(B)$ и существует гомеоморфизм $h : U \to U'$, для которого $hi = i'$ и $p'|_{U'} h = p_U$.

Теорема 4.3.1. *Для замкнутого гладкого многообразия M касательное расслоение эквивалентно касательному микрорасслоению.*

Доказательство. Введём на касательном расслоении риманову метрику. Для каждого касательного вектора $v \in T_x M$ существует единственная геодезическая $\gamma_v(t)$, для которой $\gamma_v(0) = x$ и $\frac{d}{dt}\gamma_v(0) = v$. Рассмотрим отображение $\exp_x : T_x M \to M$, которое сопоставляет касательному вектору v точку $\gamma_v(1)$. Компактность M позволяет выбрать число $\varepsilon > 0$ так, что для всех $x \in M$ ограничение отображения $\exp_x$ на открытый шар в $T_x M$, состоящий из векторов длины меньше ε, диффеоморфно отображает этот шар на некоторую открытую окрестность точки x в M.

Пусть U — открытая окрестность нулевого сечения в TM, состоящая из векторов длины меньше ε. Отображение $h : U \to M \times M$, заданное формулой $h(x, v) = \bigl(x, \exp_x(v)\bigr)$, является диффеоморфизмом окрестности U на окрестность U' диагонали $d(M)$ в $M \times M$. Отображение h обладает всеми требуемыми свойствами. $\square$

Класс Тома $U \in H^n\bigl(M \times M, M \times M \setminus d(M)\bigr)$ характеризуется тем, что для любой точки $x \in M$ отображение пар

$$l_x : (M, M \setminus \{x\}) \to \bigl(M \times M, M \times M \setminus d(M)\bigr),$$

заданное формулой $l_x(y) = (x, y)$, переводит U в образующую группы $H^n(M, M \setminus \{x\})$, т.е. $l_x^* U$ — образующая группы $H^n(M, M \setminus \{x\})$. По аналогии с этим *класс Тома* n-мерного микрорасслоения $p : E \to B$ — это когомологический класс $U \in H^n\bigl(E, E \setminus i(B)\bigr)$, который обладает следующим свойством: для любой точки $b \in B$ естественное включение

$$i_b : \bigl(p^{-1}(b), p^{-1}(b) \setminus i(b)\bigr) \to \bigl(E, E \setminus i(B)\bigr)$$

переводит U в образующую группы $H^n\bigl(p^{-1}(b), p^{-1}(b) \setminus i(b)\bigr)$.

Сейчас нас будут интересовать классы Тома в случае вещественных векторных расслоений. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.3.2. *Пусть ξ — ориентированное вещественное n-мерное расслоение над компактным CW-комплексом B. Пусть, далее, $E = E(\xi)$ — пространство расслоения и E_0 — открытое подмножество в E, состоящее из всех ненулевых векторов. Тогда:*

а) существует единственный класс когомологий $U_\xi \in H^n(E, E_0)$ с коэффициентами $\mathbb{Z}$, обладающий тем свойством, что для любой точки $b \in B$ класс когомологий $i_b^* U_\xi$ является образующей группы $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, задающей выбранную ориентацию слоя $\mathbb{R}^n$;

б) $H^i(E, E_0) = 0$ при $i < n$;

в) отображение $H^i(B) \to H^{i+n}(E, E_0)$, заданное формулой[1] *$\alpha \mapsto p^*(\alpha) \smile U_\xi$, является изоморфизмом для всех i.*

Доказательство. В случае, когда расслоение тривиально, т.е. $E = B \times \mathbb{R}^n$, $E_0 = B \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ и $p : E \to B$ — проекция на первый множитель, все требуемые утверждения фактически содержатся в теореме 4.1.15 на с. 244 (в обозначениях этой теоремы $X = B$, $A = \varnothing$ и $e^n = U_\xi$). Поэтому нужно лишь проверить, что если требуемые утверждения верны над открытыми множествами U, V и $U \cap V$, то они верны и над $U \cup V$.

Пусть $E^1 = p^{-1}(U)$, $E^2 = p^{-1}(V)$, $E^3 = p^{-1}(U \cap V)$ и $E^4 = p^{-1}(U \cup V)$. Запишем последовательность Майера–Вьеториса

$$H^{i-1}(E^3, E_0^3) \to H^i(E^4, E_0^4) \to H^i(E^1, E_0^1) \oplus H^i(E^2, E_0^2) \to H^i(E^3, E_0^3)$$

При $i < n$ слева и справа от $H^i(E^4, E_0^4)$ стоят нули, поэтому $H^i(E^4, E_0^4) = 0$. Это доказывает (б). Свойство единственности показывает, что классы $U_1 \in H^n(E^1, E_0^1)$ и $U_2 \in H^n(E^2, E_0^2)$ определяют один и тот же элемент группы $H^n(E^3, E_0^3)$. Поэтому существует класс $U_4 \in H^n(E^4, E_0^4)$, проектирующийся в U_1 и в U_2. Равенство

[1] Относительное cup-произведение классов $p^*(\alpha) \in H^i(E)$ и $U_\xi \in H^n(E, E_0)$ лежит в $H^{i+n}(E, E_0)$.

$H^{n-1}(E^3, E_0^3) = 0$ показывает, что этот класс единствен. Это доказывает (а).

Чтобы доказать (в), нужно рассмотреть аналогичную последовательность Майера–Виеториса для баз расслоений и отобразить её в написанную выше последовательность Майера–Виеториса, сопоставив элементу α элемент $p^*(\alpha) \smile U$. Применив 5-лемму, получаем требуемое. $\square$

Если расслоение ξ не обязательно ориентируемое, то для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ верна теорема, аналогичная теореме 4.3.2.

Последовательность Гизина

Пусть $p: E \to B$ — ориентированное векторное расслоение ξ размерности n. Рассмотрим точную когомологическую последовательность пары (E, E_0):

$$\to H^{i+n}(E, E_0) \xrightarrow{j^*} H^{i+n}(E) \xrightarrow{i^*} H^{i+n}(E_0) \xrightarrow{\delta^*} H^{i+n+1}(E, E_0) \to$$

Отображение p является гомотопической эквивалентностью, поэтому $p^*: H^{i+n}(B) \to H^{i+n}(E)$ — изоморфизм. Кроме того, имеет место изоморфизм Тома $\varphi^*: H^i(B) \to H^{i+n}(E, E_0)$. Воспользовавшись этими изоморфизмами, получим точную последовательность

$$\to H^i(B) \xrightarrow{p^{*-1}j^*\varphi} H^{i+n}(B) \xrightarrow{i^*p^*} H^{i+n}(E_0) \xrightarrow{\varphi^{-1}\delta^*} H^{i+1}(B) \to$$

Эту точную последовательность называют *последовательностью Гизина* [Gy].

В последовательности Гизина отображение i^*p^* индуцировано ограничением отображения p на E_0. Кроме того, отображение $p^{*-1}j^*\varphi$ выражается через класс Эйлера $e(\xi)$. А именно, $p^{*-1}j^*\varphi(\alpha) = \alpha \smile e(\xi)$. Действительно, $p^{*-1}j^*\varphi(\alpha) = p^{*-1}j^*\big(p^*(\alpha) \smile U_\xi\big) = p^{*-1}\big(p^*(\alpha) \smile j^*(U_\xi)\big) = \alpha \smile \big(p^{*-1}j^*(U_\xi)\big)$. Остаётся проверить, что $p^{*-1}j^*(U_\xi) = e(\xi)$, т.е. $j^*(U_\xi) = p^*e(\xi)$. Пусть $\mathbb{R}^n$ — слой над некоторой точкой базы. Рассмотрим коцепь в E, которая принимает значение 0 на симплексе $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и значение ± 1 на симплексе $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$, внутри которого лежит точка 0 (знак зависит от того, согласованы ли ориентации симплекса и слоя). Когомологический класс такой цепи определён однозначно, причём он совпадает как с $j^*(U_\xi)$, так и с $p^*e(\xi)$; это видно непосредственно из определений.

Для неориентируемых векторных расслоений имеет место точная последовательность Гизина для когомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$; эйлеров класс $e(\xi)$ при этом приводится по модулю 2, т.е. он заменяется на $w_n(\xi)$.

Точная последовательность Гизина имеет место и для ориентированного[1] локально тривиального расслоения $p: E \to B$ со слоем S^{n-1}, поскольку такому расслоению можно сопоставить ориентированное n-мерное векторное расслоение.

Задача 4.3.1. *Вычислите группы когомологий многообразия $G_+(2n+2,2)$, используя расслоение $V(2n+2,2) \xrightarrow{S^1} G_+(2n+2,2)$.*

4.3.2. Формулы Тома и Ву

В этом параграфе мы будем рассматривать когомологии с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$. Пусть ξ — вещественное расслоение над компактным симплициальным комплексом B, U_ξ — его класс Тома, а $\varphi: H^i(B) \to H^{i+n}(E, E_0)$ — изоморфизм Тома, заданный формулой $\varphi(\alpha) = p^*(\alpha) \smile U_\xi$.

Теорема 4.3.3 (Том [Th1]). *Класс Штифеля–Уитни $w_i(\xi)$ равен $\varphi^{-1}(\mathrm{Sq}^i\, U_\xi)$, где Sq^i — квадрат Стинрода.*

Доказательство. Проверим, что $\varphi^{-1}(\mathrm{Sq}^i\, U_\xi)$ обладает всеми свойствами i-го класса Штифеля–Уитни. Ясно, что $\varphi^{-1}(\mathrm{Sq}^0\, U_\xi) = \varphi^{-1}(U_\xi) = 1$. Кроме того, если $i > n = \dim \xi$, то $\mathrm{Sq}^i\, U_\xi = 0$.

Проверим естественность. Пусть $f: B' \to B$ — произвольное отображение, ξ — расслоение над B, $f^*(\xi)$ — индуцированное расслоение над B', $g: E \to E'$ — послойное отображение расслоений, индуцированное отображением f. Тогда $g^*(U_\xi) = U_{f^*(\xi)}$ и для изоморфизмов Тома имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^i(B) & \xrightarrow{\ \varphi\ } & H^{i+n}(E, E_0) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle g^*} \\ H^i(B') & \xrightarrow{\ \varphi'\ } & H^{i+n}(E', E_0'). \end{array}$$

Поэтому $\varphi' f^* = g^* \varphi$, т.е. $f^* \varphi^{-1} = (\varphi')^{-1} g^*$. Следовательно, $f^*\bigl(w_i(\xi)\bigr) = f^*\varphi^{-1}(\mathrm{Sq}^i\, U_\xi) = (\varphi')^{-1} g^*(\mathrm{Sq}^i\, U_\xi) = (\varphi')^{-1}\, \mathrm{Sq}^i\bigl(g^*(U_\xi)\bigr) = (\varphi')^{-1}\, \mathrm{Sq}^i\, U_{f^*(\xi)} = w_i\bigl(f^*(\xi)\bigr)$.

Проверим формулу Уитни. На этот раз её удобнее доказывать в виде $w(\xi \times \eta) = w(\xi) \times w(\eta)$. Рассмотрим внешнее произведение классов Тома $U_\xi \in H^m(E, E_0)$ и $U_\eta \in H^n(E', E_0')$. Класс $U_\xi \times U_\eta$ лежит в

[1] Это означает, что все слои S^{n-1} ориентированы согласованным образом.

$H^{n+m}\big(E\times E', (E\times E'_0)\cup(E_0\times E')\big)$. Множество $(E\times E'_0)\cup(E_0\times E')$ — это в точности множество ненулевых векторов в $E\times E'$. Поэтому класс $U_\xi\times U_\eta$ лежит там же, где и класс Тома $U_{\xi\times\eta}$. Покажем, что эти два когомологических класса в действительности совпадают. Для этого достаточно проверить, что ограничение класса $U_\xi\times U_\eta$ на $(\mathbb{R}^{n+m},\mathbb{R}^{n+m}_0)$, где $\mathbb{R}^{n+m}$ — слой расслоения $\xi\times\eta$, является ненулевым классом когомологий для слоя расслоения $\xi\times\eta$ над каждой точкой. Но рассматриваемый класс равен внешнему произведению ограничений классов U_ξ и U_η на $(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m_0)$ и $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n_0)$, а согласно теореме 4.1.15 на с. 244 это произведение ненулевое.

Для доказательства формулы Уитни нужно ещё проверить, что изоморфизмы Тома расслоений ξ, η и $\xi\times\eta$ связаны соотношением $\varphi_\xi(\alpha)\times\varphi_\eta(\beta)=\varphi_{\xi\times\eta}(\alpha\times\beta)$, т.е.

$$(p_\xi^*\alpha\smile U_\xi)\times(p_\eta^*\beta\smile U_\xi)=\big(p_{\xi\times\eta}^*(\alpha\times\beta)\big)\smile U_{\xi\times\eta}.$$

В случае коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ не нужно учитывать знаки, поэтому

$$(p_\xi^*\alpha\smile U_\xi)\times(p_\eta^*\beta\smile U_\xi)=(p_\xi^*\alpha\times p_\eta^*\beta)\smile(U_\xi\times U_\xi).$$

Равенство $U_\xi\times U_\eta=U_{\xi\times\eta}$ мы уже доказали. Пусть p_B и $p_{B'}$ — проекции $B\times B'$ на первый и второй множители, p_E и $p_{E'}$ — аналогичные отображения для $E\times E'$. Тогда $p_{\xi\times\eta}^*(\alpha\times\beta)=p_{\xi\times\eta}^*(p_B^*\alpha\smile p_{B'}^*\beta)=$ $=(p_Bp_{\xi\times\eta})^*\alpha\smile(p_{B'}p_{\xi\times\eta})^*\beta$ и $p_\xi^*\alpha\times p_\eta^*\beta=(p_E^*p_\xi^*\alpha)\smile(p_{E'}^*p_\eta^*\beta)=$ $=(p_\xi p_E)^*\alpha\smile(p_\eta p_{E'})^*\beta$. Но $p_Bp_{\xi\times\eta}=p_\xi p_E$ (оба отображения — естественные проекции $E\times E'$ на B) и $p_{B'}p_{\xi\times\eta}=p_\xi p_{E'}$.

В итоге получаем, что если $\tilde w(\xi)=\varphi^{-1}(\operatorname{Sq}U_\xi)$, то $\varphi_{\xi\times\eta}\big(\tilde w(\eta)\times\tilde w(\xi)\big)=\varphi_{\xi\times\eta}\big((\varphi_\xi^{-1}\operatorname{Sq}U_\xi)\times(\varphi_\eta^{-1}\operatorname{Sq}U_\eta)\big)=\operatorname{Sq}U_\xi\times\operatorname{Sq}U_\eta=$ $=\operatorname{Sq}(U_\xi\times U_\eta)=\operatorname{Sq}U_{\xi\times\eta}=\varphi_{\xi\times\eta}\big(\tilde w(\eta\times\xi)\big)$, а значит, $\tilde w(\eta)\times\tilde w(\xi)=$ $=\tilde w(\eta\times\xi)$.

Остаётся провести вычисления для расслоения γ_1^1 над $\mathbb{R}P^1\approx S^1$. Для этого расслоения пара (E,E_0) представляет собой лист Мёбиуса M и лист Мёбиуса с вырезанной центральной окружностью. Деформационным ретрактом такой пары является пара $(M,\partial_\varepsilon M)$, где $\partial_\varepsilon M$ — кривая, параллельная краю листа Мёбиуса и отстоящая от него на расстояние ε. Изоморфизм вырезания показывает, что $H^*(M,\partial_\varepsilon M)\cong H^*(\mathbb{R}P^2,D^2)$, а когомологическая последовательность пары $(\mathbb{R}P^2,D^2)$ показывает, что $H^i(\mathbb{R}P^2,D^2)\cong H^i(\mathbb{R}P^2)$ при $i\geqslant 1$. Таким образом, класс Тома U расслоения γ_1^1 отождествляется с единственным ненулевым элементом $\alpha\in H^1(\mathbb{R}P^2)$. Но $\operatorname{Sq}^1\alpha=\alpha\smile\alpha\neq 0$, поэтому $\operatorname{Sq}^1U\neq 0$, а значит, $\varphi^{-1}(\operatorname{Sq}^1U)\neq 0$. □

Формула Тома верна для любых векторных расслоений, но её применение сильно затруднено тем, что нужно вычислять класс Тома. Для классов Штифеля–Уитни касательных расслоений многообразий можно получить более явную формулу, в которой не участвует класс Тома.

Пусть $\operatorname{Sq}^T : H_*(X) \to H_*(X)$ — операция, сопряжённая операции $\operatorname{Sq} = \sum_{i \geqslant 0} \operatorname{Sq}^i$, т.е. $\langle \alpha, \operatorname{Sq}^T \beta\rangle = \langle \operatorname{Sq} \alpha, \beta\rangle$. Для любого замкнутого многообразия M^n можно определить класс когомологий $v = D^{-1} \operatorname{Sq}^T [M^n] \in H^*(M^n)$, где $[M^n]$ — фундаментальный класс (с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$), $D : H^k(M^n) \to H_{n-k}(M^n)$ — изоморфизм двойственности Пуанкаре. Класс v называют *классом Ву* многообразия M^n.

Теорема 4.3.4 (Ву [Wu]). *Класс Ву замкнутого многообразия M^n обладает следующими свойствами:*

1) $\langle \alpha \smile v, [M^n]\rangle = \langle \operatorname{Sq} \alpha, [M^n]\rangle$ *для любого элемента* $\alpha \in H^*(M^n)$;

2) $w(M^n) = \operatorname{Sq} v$.

Доказательство. По определению $Dv = \operatorname{Sq}^T [M^n]$. Поэтому

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{Sq} \alpha, [M^n]\rangle = \langle \alpha, \operatorname{Sq}^T [M^n]\rangle = \langle \alpha, Dv\rangle = \\ = \langle \alpha, v \frown [M^n]\rangle = \langle \alpha \smile v, [M^n]\rangle.\end{aligned}$$

Чтобы проверить равенство $w(M^n) = \operatorname{Sq} v$, достаточно проверить, что $\langle w(M^n), \beta\rangle = \langle \operatorname{Sq} v, \beta\rangle$ для любого элемента $\beta \in H_*(M^n)$. Согласно формуле Тома $\operatorname{Sq} U = \varphi\bigl(w(M^n)\bigr)$. Вместо класса Тома касательного расслоения можно взять класс Тома касательного микрорасслоения, лежащий в $H^n\bigl(M^n \times M^n, M^n \times M^n \setminus d(M^n)\bigr)$. При этом изоморфизм Тома имеет вид $\varphi(\alpha) = p_1^*\alpha \smile U$, где $p_1 : M^n \times M^n \to M^n$ — проекция на первый множитель. В таком случае $p_1^*\alpha = \alpha \times 1$, где $1 \in H^0(M^n)$ — единичный элемент. Значит, $\operatorname{Sq} U = p_1^*\bigl(w(M^n)\bigr) \smile U = \bigl(w(M^n) \times 1\bigr) \smile U$.

Воспользуемся классом $\tilde U \in H^n(M^n \times M^n)$, введённым на с. 271, и доказанными там для него свойствами (2) и (3). Для этого класса, как и для класса U, выполняется соотношение $\operatorname{Sq} \tilde U = \bigl(w(M^n) \times 1\bigr) \smile \tilde U$. Ясно, что

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{Sq} v, \beta\rangle &= \langle v, \operatorname{Sq}^T \beta\rangle \overset{(3)}{=} \langle \tilde U, \operatorname{Sq}^T \beta \times Dv\rangle = \\ &= \langle \tilde U, \operatorname{Sq}^T \beta \times \operatorname{Sq}^T [M^n]\rangle = \langle \tilde U, \operatorname{Sq}^T (\beta \times [M^n])\rangle = \\ &= \langle \operatorname{Sq} \tilde U, \beta \times [M^n]\rangle = \langle \bigl(w(M^n) \times 1\bigr) \smile \tilde U, \beta \times [M^n]\rangle \overset{(2)}{=} \\ &\overset{(2)}{=} \langle \bigl(1 \times w(M^n)\bigr)\bigr) \smile \tilde U, \beta \times [M^n]\rangle = \langle \tilde U, \bigl(1 \times w(M^n)\bigr) \frown (\beta \times [M^n])\rangle = \\ &= \langle \tilde U, \beta \times \bigl(w(M^n) \frown [M^n]\bigr)\rangle = \langle \tilde U, \beta \times Dw(M^n)\rangle \overset{(3)}{=} \langle w(M^n), \beta\rangle.\end{aligned}$$

□

Непосредственно из определения класса Ву легко выводится, что если $v = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$, где $v_i \in H^i(M^n)$, то $v_i = 0$ при $i > [n/2]$. Действительно, пусть $\mathrm{Sq}^T[M^n] = m_0 + m_1 + \ldots + m_n$, где $m_i \in H_i(M^n)$. Если $\alpha \in H^k(M^n)$, то $\langle \alpha, m_k \rangle = \langle \mathrm{Sq}\,\alpha, [M^n] \rangle = \langle \mathrm{Sq}^{n-k}\,\alpha, [M^n] \rangle$. При этом $\mathrm{Sq}^{n-k}\,\alpha = 0$, если $n - k > k$, т.е. $2k < n$. Следовательно, $m_k = 0$ при $2k < n$. Это означает, что $v_{n-k} = 0$ при $2k < n$, т.е. $v_i = 0$ при $2i > n$.

Задача 4.3.2. *Пусть $v = v_0 + v_1 + \ldots + v_{[n/2]}$ — класс Ву замкнутого многообразия M^n, $w = 1 + w_1 + \ldots + w_n$ — класс Штифеля–Уитни.*

а) Докажите, что если $w_1 = \ldots = w_k = 0$, то $v_1 = \ldots = v_k = 0$ и $v_{k+1} = w_{k+1}$.

б) Докажите, что если $w_1 = \ldots = w_k = 0$ и $n = 2k$ или $2k + 1$, то $w_{k+1} = w_{k+2} = \ldots = w_n = 0$.

Задача 4.3.3. *[Mi2] Пусть M^{4k} — замкнутое $(2k-1)$-связное многообразие. Докажите, что на диагонали формы пересечения многообразия M^{4k} стоят чётные числа тогда и только тогда, когда $w_{2k}(M^{4k}) = 0$.*

Воспользовавшись результатом задачи 4.3.2, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4.3.5 (Штифель [St5]). *Любое замкнутое ориентируемое трёхмерное многообразие параллелезуемо.*

Доказательство. Чтобы доказать параллелезуемость многообразия M^3, нужно построить три линейно независимых сечения его касательного расслоения. Учитывая ориентируемость, достаточно построить два независимых сечения. При построении k независимых сечений n-мерного вещественного расслоения первое препятствие возникает при продолжении на $(n-k+1)$-мерный остов. Если $n-k$ нечётно и $k \geqslant 2$, то это препятствие — в точности класс w_{n-k+1}. В нашем случае это будет класс w_2. Если построены два независимых сечения на 2-мерном остове, то задача решена, потому что препятствие к продолжению их на 3-мерный остов лежит в когомологиях с коэффициентами $\pi_2\bigl(V(3,2)\bigr)$, а $V(3,2) \approx \mathbb{R}P^3$ и $\pi_2(\mathbb{R}P^3) = 0$. Поэтому достаточно доказать, что $w_2(M^3) = 0$. Для ориентируемого многообразия $w_1 = 0$. Согласно задаче 4.3.2 (б) из равенства $w_1 = 0$ следует, что $w_2 = 0$ и $w_3 = 0$. □

Замечание. Штифель доказал параллелезуемость замкнутого ориентируемого трёхмерного многообразия в предположении, что $w_2(M^3) = 0$; у него не было убедительного доказательства того, что это равенство выполняется.

Штифель занимался общей задачей о построении $n-1$ линейно независимых векторных полей на ориентируемом n-мерном многообразии, т.е. задачей о параллелезуемости многообразия. По совету Хопфа он начал с простейшего нетривиального случая $n=3$. Но все многочисленные примеры ориентируемых замкнутых трёхмерных многообразий, которые рассмотрел Штифель, оказались параллелезуемыми. Именно для решения этой задачи Штифель построил теорию характеристических классов [St5].

О результатах Штифеля Хопф сделал доклад на первой международной топологической конференции в Москве (1935 г.). Присутствовавший на этом докладе Уитни сказал, что значительная часть этих результатов содержится в только что вышедшей его заметке [Wh2], о которой Штифель и Хопф тогда ещё не знали. Построения Уитни носили более общий характер, а Штифеля больше интересовали конкретные проблемы, которыми Уитни не интересовался.

4.3.3. Препятствия к вложениям

Пусть замкнутое многообразие M^n погружено в $\mathbb{R}^{n+k}$, ν_{M^n} — нормальное расслоение для этого погружения. Согласно теореме Уитни (теорема 3.2.9 на с. 168) $w_i(\nu_{M^n}) = \bar{w}_i(M^n)$. Значит, $\bar{w}_i(M^n) = 0$ при $i > k$, поскольку $\dim \nu_{M^n} = k$. В том случае, когда многообразие M^n вложено в $\mathbb{R}^{n+k}$, появляется дополнительное условие $\bar{w}_k(M^n) = 0$, доказательством которого мы сейчас займёмся.

Из теоремы о трубчатой окрестности следует, что если замкнутое многообразие M^n вложено в $\mathbb{R}^{n+k}$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ множество M_ε, состоящее из точек, удалённых от M^n не более чем на ε, гомеоморфно пространству расслоения $E(\nu_{M^n}) = E$. При этом возникает гомеоморфизм пар $(E, E_0) \approx (M_\varepsilon, M_\varepsilon \setminus M^n)$. Используя гомеоморфизм вырезания, получаем $H^*(E, E_0) \cong H^*(M_\varepsilon, M_\varepsilon \setminus M^n) \cong H^*(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k} \setminus M^n)$. Рассмотрим композицию двух гомоморфизмов ограничения

$$H^k(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k} \setminus M^n) \to H^k(\mathbb{R}^{n+k}) \to H^k(M^n). \tag{1}$$

Эта композиция, очевидно, нулевая, поскольку $H^k(\mathbb{R}^{n+k}) = 0$. Поэтому достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма. *При композиции (1) класс, соответствующий классу Тома $U \in H^k(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$, переходит в $w_k(\nu_{M^n})$.*

Доказательство. Нулевое сечение $s : M \to E$ индуцирует изоморфизм

$s^*: H^k(E) \to H^k(M^n)$. Покажем, что композиция гомоморфизмов

$$H^k(E, E_0) \to H^k(E) \xrightarrow{s^*} H^k(M^n)$$

переводит класс Тома U в $w_k(\nu_{M^n})$. Действительно, изоморфизм Тома $\varphi: H^k(M^n) \to H^{2k}(E, E_0)$ переводит класс $s^*(U|_E)$ в класс $p^*s^*(U|_E) \smile U = (U|_E) \smile U = U \smile U = \operatorname{Sq}^k U$. Поэтому $s^*(U|_E) = \varphi^{-1} \operatorname{Sq}^k U = w_k(\nu_{M^n})$.

Если заменить пару (E, E_0) на гомеоморфную ей пару $(M_\varepsilon, M_\varepsilon \setminus M^n)$, то получим, что композиция гомоморфизмов ограничения

$$H^k(M_\varepsilon, M_\varepsilon \setminus M^n) \to H^k(M_\varepsilon) \to H^k(M^n)$$

переводит класс, соответствующий классу Тома U, в $w_k(\nu_{M^n})$.

Композиция (1) включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
H^k(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k} \setminus M^n) & \longrightarrow & H^k(\mathbb{R}^{n+k}) \\
\big\downarrow{\cong} & & \big\downarrow \\
H^k(M_\varepsilon, M_\varepsilon \setminus M^n) & \longrightarrow & H^k(M^n).
\end{array}$$

Поэтому при композиции (1) класс в $H^k(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k} \setminus M^n)$, соответствующий классу Тома U, тоже переходит в $w_k(\nu_{M^n})$. □

Задача 4.3.4. *Докажите, что если $n = 2^m$, то $\mathbb{R}P^n$ нельзя вложить в $\mathbb{R}^{2n-1}$.*

Глава 5.

Когомологии Чеха и де Рама

5.1. Когомологии пучков

5.1.1. Пучки и предпучки

Предположим, что каждому открытому множеству $U \subset X$ сопоставлена абелева группа $\mathcal{F}(U)$, причём $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$, а каждому включению отрытых множеств $V \to U$ сопоставлен гомоморфизм $r_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, называемый *гомоморфизмом ограничения*. Предположим, далее, что эти сопоставления удовлетворяют следующим условиям:

- $r_U^U := \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$;
- $r_W^U = r_W^V r_V^U$, если $W \subset V \subset U$.

В таком случае говорят, что $\mathcal{F}$ — *предпучок* абелевых групп на X.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — предпучки на одном и том же пространстве X. Предположим, что для любого открытого множества $U \subset X$ задан гомоморфизм $h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, причём диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathcal{G}(U) \\
\big\downarrow{\scriptstyle r_V^U} & & \big\downarrow{\scriptstyle r_V^U} \\
\mathcal{F}(V) & \xrightarrow{h_V} & \mathcal{G}(V)
\end{array}$$

коммутативна для всех $V \subset U$. Тогда говорят, что задан *гомоморфизм* предпучков $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

Аналогично можно определить предпучок колец или предпучок R-модулей, где R — фиксированное кольцо; гомоморфизмы таких предпучков тоже определяются аналогично.

Пример 5.1.1. *Для каждой абелевой группы G можно рассмотреть предпучок, который любому непустому открытому множеству $U \subset X$ сопоставляет группу G, а пустому множеству сопоставляет нулевую группу. Этот предпучок называют* постоянным.

Пример 5.1.2. *В качестве $\mathcal{F}(U)$ возьмём множество непрерывных функций на U; групповая операция — поточечное сложение функций.*

Для краткости элемент $r_V^U(f)$, где $f \in \mathcal{F}(U)$, будем обозначать $f|_V$.

Пучок — это предпучок, удовлетворяющий определённым дополнительным условиям. Сформулируем эти условия. Пусть $\mathcal{U} = \{U\}$ — некоторое семейство открытых подмножеств в X. Семейство элементов $\{f_U \in \mathcal{F}(U)\}$, $U \in \mathcal{U}$, будем называть *согласованным*, если $f_U|_{U \cap U'} = f_{U'}|_{U \cap U'}$ для любых $U, U' \in \mathcal{U}$. Каждое семейство открытых множеств $\mathcal{U}$ задаёт открытое множество $V = \bigcup_{U \subset \mathcal{U}} U$. Предпучок $\mathcal{F}$ называют *пучком*, если для любого семейства множеств $\mathcal{U}$ выполняются следующие условия:

- если элемент $f \in \mathcal{F}(V)$ таков, что $f|_U = 0$ для всех $U \in \mathcal{U}$, то $f = 0$;
- для любого согласованного семейства элементов $\{f_U\}$ существует элемент $f \in \mathcal{F}(V)$, для которого $f|_U = f_U$ для всех $U \in \mathcal{U}$.

Пример 5.1.3. *Пусть X — объединение двух непересекающихся открытых множеств U_1 и U_2. Тогда (ненулевой) постоянный предпучок на X не является пучком.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$. Семейство элементов $0 \in \mathcal{F}(U_1)$, $f \in \mathcal{F}(U_2)$, $f \neq 0$, согласовано, но не существует элемента $f' \in \mathcal{F}(X)$, для которого $f'|_{U_1} = 0$ и $f'|_{U_2} = f \neq 0$. □

Пример 5.1.4. *Пусть $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ — предпучок ограниченных функций, т.е. $\mathcal{F}(U)$ состоит из ограниченных функций на U. Этот предпучок не является пучком.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $U_k = (-k, k)$. Тогда семейство элементов $\{f_k\}$, где $f_k(x) = x$, согласованное, но не существует ограниченной функции f на $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$, которая на каждом множестве U_k совпадала бы с f_k. Действительно, такой функцией могла бы быть только функция $f(x) = x$, а она не ограниченная. □

Любому предпучку можно сопоставить пучок, используя переход к прямому пределу. Напомним соответствующие определения.

Множество J называют *направленным*, если между некоторыми его элементами задано отношение $\alpha > \beta$ так, что выполняются следующие условия:

- $\alpha > \alpha$ для любого $\alpha \in J$;
- если $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$, то $\alpha > \gamma$;
- для любых $\alpha, \beta \in J$ найдётся $\delta \in J$, для которого $\alpha > \delta$ и $\beta > \delta$.

Пример 5.1.5. *Пусть J состоит из открытых множеств, содержащих фиксированную точку $x \in X$, а отношение $V < U$ соответствует включению $V \subset U$. Тогда J — направленное множество.*

Пусть J — направленное множество. Систему абелевых групп $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in J$, называют *направленной*, если для любой пары элементов $\alpha > \beta$ задан гомоморфизм $f_{\alpha\beta} : G_\alpha \to G_\beta$, причём $f_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}$ и $f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\gamma}$.

Пример 5.1.6. *Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок на пространстве X, J — направленное множество из примера 5.1.5, $G_U = \mathcal{F}(U)$ и $f_{UV} = r_V^U$. Тогда $\{G_U\}$, $U \ni x$, — направленная система абелевых групп.*

Для направленной системы абелевых групп *прямой предел* $\varinjlim_{\alpha \in J} G_\alpha$ определяется следующим образом. Рассмотрим несвязное объединение групп G_α и профакторизуем его по следующему отношению эквивалентности: $g_\alpha \sim g_\beta$, если $f_{\alpha\delta}(g_\alpha) = f_{\beta\delta}(g_\beta)$ для некоторого δ (здесь $g_\alpha \in G_\alpha$ и $g_\beta \in G_\beta$). Групповая операция вводится следующим образом: $\{g_\alpha\} + \{g_\beta\} = \{f_{\alpha\delta}(g_\alpha) + f_{\beta\delta}(g_\beta)\}$, где $\alpha > \delta$ и $\beta > \delta$.

Для направленной системы абелевых групп из примера 5.1.6 прямой предел состоит из ростков в точке x, которые определяются следующим образом. Будем считать, что элементы $f \in \mathcal{F}(U)$ и $g \in \mathcal{F}(V)$, где U и V — открытые окрестности точки x, эквивалентны, если $f|_W = g|_W$ для некоторого открытого множества $W \subset U \cap V$. Класс эквивалентности, в котором лежит элемент $f \in \mathcal{F}(U)$, называют *ростком* f в точке x и обозначают f_x. Сложение ростков определяется естественным образом.

Положим $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$, т.е. $\mathcal{F}_x$ — группа ростков в точке x, $\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$. Снабдим $\tilde{\mathcal{F}}$ топологией так, чтобы естественная проекция $p : \tilde{\mathcal{F}} \to X$, отображающая $\mathcal{F}_x$ в x, была локальным гомеоморфизмом. Пусть $U \subset X$ — открытое множество, $f \in \mathcal{F}(U)$. Рассмотрим множество всех ростков f_x, $x \in U$. Такие множества будем считать базой топологии пространства $\tilde{\mathcal{F}}$. Ясно, что если $\tilde{\mathcal{F}}$ снабжено такой топологией, то p — локальный гомеоморфизм.

Сечением $\tilde{\mathcal{F}}$ над открытым множеством $U \subset X$ будем называть непрерывное отображение $s : U \to \tilde{\mathcal{F}}$, для которого $p \circ s = \mathrm{id}_U$. Множество сечений над U будем обозначать $\Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}})$; это множество является группой. Для семейства групп $\Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}})$ естественным образом определены гомоморфизмы ограничений, которые удовлетворяют аксиомам предпучка. Более того, если мы положим $\bar{\mathcal{F}}(U) = \Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}})$, то получим предпучок $\bar{\mathcal{F}}$, который является пучком. Его называют пучком, *порождённым* $\mathcal{F}$, или *ассоциированным* с $\mathcal{F}$.

Каждому элементу $f \in \mathcal{F}(U)$ можно сопоставить сечение $s \in \Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}})$, положив $s(x) = f_x$. Так мы получаем гомоморфизм предпучков $\tau : \mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$.

Теорема 5.1.1. *Если $\mathcal{F}$ — пучок, то τ — изоморфизм пучков, т.е. для любого открытого множества $U \subset X$ отображение $\tau_U : \mathcal{F}(U) \to \bar{\mathcal{F}}(U)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Проверим сначала, что τ_U — мономорфизм. Пусть $f, g \in \mathcal{F}(U)$ и $f_x = g_x$ для всех $x \in U$. Из определения ростка следует, что для каждой точки $x \in U$ найдётся окрестность $V \ni x$, для которой $f|_V = g|_V$, т.е. $(f - g)|_V = 0$. Поэтому из первой аксиомы пучка следует, что $f = g$

Проверим теперь, что τ — эпиморфизм. Пусть $s \in \Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}})$. Тогда для каждой точки $x \in U$ найдётся окрестность $V \ni x$ и найдётся элемент $f \in \mathcal{F}(V)$, для которого $f_x = s(x)$. Это означает, что сечения s и $\tau_V(f)$ совпадают в точке x. Два сечения, совпадающих в точке x, должны совпадать и в некоторой окрестности $W \ni x$. Поэтому $s|_W = \tau_W(f|_W)$. Каждой точке $x \in U$ мы сопоставили открытое множество $W_x \ni x$ (лежащее в U) и элемент $f^x \in \mathcal{F}(W_x)$ так, что $f^x_y = s(y)$ для всех $y \in W_x$. Семейство элементов $\{f^x \in \mathcal{F}(W_x)\}$ согласованное, т.е. $f^x|_{W_x \cap W_z} = f^z|_{W_x \cap W_z}$. Действительно, для всех $y \in W_x \cap W_z$ выполняется равенство $f^x_y = s(y) = f^z_y$. Поэтому $\tau_{W_x \cap W_z}(f^x|_{W_x \cap W_z} - f^z|_{W_x \cap W_z}) = 0$; остаётся заметить, что мономорфность τ мы уже доказали. Воспользовавшись второй аксиомой пучка, получим элемент $f \in \mathcal{F}(U)$, для которого $f_x = s(x)$ для всех $x \in U$. □

Прямые пределы часто бывает удобно вычислять не по всему направленному множеству J, а по некоторому его подмножеству J_0. Подмножество $J_0 \subset J$ называют *кофинальным* в направленном множестве J, если для любого $\alpha \in J$ в J_0 есть элемент δ, для которого $\alpha > \delta$.

Теорема 5.1.2. *Пусть $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in J$, — направленная система абелевых групп, $J_0 \subset J$ — кофинальное подмножество. Тогда J_0 — направленное множество и $\varinjlim_{\alpha \in J} G_\alpha \cong \varinjlim_{\alpha \in J_0} G_\alpha$.*

Доказательство. Для $\alpha, \beta \in J_0$ можно выбрать $\delta' \in J$ так, что $\alpha > \delta'$ и $\beta > \delta'$. Затем для δ' можно выбрать $\delta \in J_0$ так, что $\delta' > \delta$. Поэтому J_0 — направленное множество.

Тождественные отображения $G_\alpha \to G_\alpha$ коммутируют с отображениями $f_{\alpha\delta}$, поэтому тождественные отображения $G_\alpha \to G_\alpha$, $\alpha \in J_0$, задают гомоморфизм $\varinjlim_{\alpha \in J} G_\alpha \cong \varinjlim_{\alpha \in J_0} G_\alpha$. Этот гомоморфизм — эпиморфизм, поскольку для любого элемента $g_\alpha \in G_\alpha$, $\alpha \in J$, можно выбрать $\delta \in J_0$ так, что $\alpha > \delta$. Тогда определено отображение $f_{\alpha\delta} : G_\alpha \to G_\delta$ и $g_\alpha \sim g_\delta = f_{\alpha\delta}(g_\delta)$. Проверим теперь, что этот гомоморфизм — мономорфизм. Пусть $g_\alpha \sim 0_\beta$ для некоторого $\beta \in J$, т.е. можно выбрать $\delta \in J$ так, что $f_{\alpha\delta}(g_\alpha) = f_{\beta\delta}(0_\beta) = 0_\delta$. Выберем $\gamma \in J_0$ так, что $\delta > \gamma$. Тогда $f_{\alpha\gamma}(g_\alpha) = f_{\delta\gamma} \circ f_{\alpha\delta}(g_\alpha) = f_{\delta\gamma}(0_\gamma) = 0_\gamma$, т.е. $g_\alpha \sim 0_\gamma$ для некоторого $\gamma \in J_0$. □

5.1.2. Когомологии Чеха

Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — открытое покрытие пространства X; $\mathcal{F}$ — предпучок на X. Мы будем предполагать, что все множества U_α попарно различны. Для краткости введём обозначение $U_{\alpha_0 \ldots \alpha_k} = U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}$. *Коцепь* $c^k \in C^k(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ сопоставляет упорядоченному набору $U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_k}$ элемент $c^k(U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_k}) \in \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \ldots \alpha_k})$. *Кограничный гомоморфизм* определяется формулой

$$(\delta c^k)(U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_{k+1}}) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i c^k(U_{\alpha_0}, \ldots, \widehat{U_{\alpha_i}}, \ldots, U_{\alpha_{k+1}})|_{U_{\alpha_0 \ldots \alpha_{k+1}}}.$$

Простая стандартная проверка показывает, что $\delta\delta = 0$. Это позволяет определить группу когомологий $\check{H}^k(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ — *когомологии Чеха* покрытия $\mathcal{U}$ с коэффициентами в предпучке $\mathcal{F}$.

Пример 5.1.7. *Если $\mathcal{F}$ — постоянный предпучок, соответствующий абелевой группе G, то $\check{H}^k(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \cong H^k(N(\mathcal{U}); G)$, где $N(\mathcal{U})$ — нерв покрытия $\mathcal{U}$.*

Посредством перехода к прямому пределу можно определить когомологии Чеха, зависящие только от самого пространства X, а не от конкретного его покрытия $\mathcal{U}$. Для этого нужно построить направленное семейство групп когомологий. Делается это следующим образом. Пусть $\mathcal{U} < \mathcal{V}$, т.е. $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ — измельчение покрытия $\mathcal{V} = \{V_\beta | \beta \in \mathcal{B}\}$. Согласно определению измельчения существует отображение $\lambda : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, для которого $U_\alpha \subset V_{\lambda(\alpha)}$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$. Сопоставим коцепи $c^k \in C^k(\mathcal{V}; \mathcal{F})$ коцепь $\lambda^\# c^k \in C^k(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, для которой

$$(\lambda^\# c^k)(U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_k}) = c^k(V_{\lambda(\alpha_0)}, \ldots, V_{\lambda(\alpha_k)}).$$

Легко проверить, что отображение $\lambda^\#$ коцепное, т.е. $\lambda^\# \delta = \delta \lambda^\#$. Коцепное отображение $\lambda^\#$ индуцирует гомоморфизм когомологий $\lambda^* : \check{H}^k(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \to \check{H}^k(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

Гомоморфизм λ^* не зависит от выбора λ. Прежде чем доказывать это утверждение в общем виде, поясним, почему оно верно для постоянного пучка $\mathcal{F}$.

Пример 5.1.8. *Для постоянного пучка $\mathcal{F}$ гомоморфизм $\lambda^* : \check{H}^k(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \to \check{H}^k(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ индуцирован симплициальным отображением $\tilde{\lambda} : N(\mathcal{U}) \to N(\mathcal{V})$, переводящим α в $\lambda(\alpha)$. Если $\mu : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — другое отображение, для которого $U_\alpha \subset V_{\mu(\alpha)}$, то отображения $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ гомотопны.*

Доказательство. Предположим, что точка x принадлежит симплексу $[\alpha_0, \ldots, \alpha_n]$. Тогда точки $\tilde{\lambda}(x)$ и $\tilde{\mu}(x)$ принадлежат симплексу с вершинами $\lambda(\alpha_0)$, …, $\lambda(\alpha_n)$, $\mu(\alpha_0)$, …, $\mu(\alpha_n)$; такой симплекс существует, потому что

$$\cap \left(V_{\lambda(\alpha_i)} \cap V_{\mu(\alpha_i)}\right) \supset \cap U_{\alpha_i} \neq \varnothing.$$

Соединив точки $\tilde{\lambda}(x)$ и $\tilde{\mu}(x)$ отрезком, легко построить требуемую гомотопию. □

Перейдём теперь к общему утверждению.

Теорема 5.1.3. *Если $\mu : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — другое отображение, для которого $U_\alpha \subset V_{\mu(\alpha)}$, то существует коцепная гомотопия, связывающая отображения $\lambda^\#$ и $\mu^\#$.*

Доказательство. Зададим отображение $D : C^k(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \to C^{k-1}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ формулой

$$(Dc^k)(U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_{k-1}}) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i c^k(V_{\lambda(\alpha_0)}, \ldots, V_{\lambda(\alpha_i)}, V_{\mu(\alpha_i)}, \ldots, V_{\mu(\alpha_{k-1})}).$$

Покажем, что $\delta D + D\delta = \mu^\# - \lambda^\#$. В выражении $(\delta(Dc^k) + D(\delta c^k))(U_0, \ldots, U_k)$ ограничения коцепей $(-1)^i(-1)^j c^k(V_{\lambda(0)}, \ldots, V_{\lambda(j)}, V_{\mu(j)}, \ldots, \hat{U}_i, \ldots, V_{\mu(k)})$ и

$(-1)^j(-1)^{i+1}c^k(V_{\lambda(0)},\dots,V_{\lambda(j)},V_{\mu(j)},\dots,\widehat{V_{\mu(i)}},\dots,V_{\mu(k)})$ на $V_{\lambda(0)\dots\lambda(j)\mu(j)\dots\widehat{\mu(i)}\dots\mu(k)}$ сокращаются. Здесь предполагается, что $i > j$. Случай $i < j$ рассматривается аналогично. Ни с чем не сокращаются только члены $c^k(\widehat{V_{\lambda(0)}},V_{\mu(0)},\dots,V_{\mu(k)})$ и $(-1)^k(-1)^{k+1}c^k(V_{\lambda(0)},\dots,V_{\lambda(k)},\widehat{V_{\mu(k)}},)$ □

Мы построили направленную систему абелевых групп, поэтому можно рассмотреть прямой предел $\varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U};\mathcal{F}) = \check{H}^k(X;\mathcal{F})$ — *когомологии Чеха* пространства X с коэффициентами в предпучке $\mathcal{F}$. Когомологии Чеха пространства X с коэффициентами в постоянном предпучке, соответствующем абелевой группе G, мы будем обозначать $\check{H}^k(X;G)$.

Теорема 5.1.4. *Если K — конечный симплициальный комплекс, то $\check{H}^k(|K|;G) \cong H^k(K;G)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}_0$ — покрытие пространства $|K|$ открытыми множествами $\operatorname{st} v_i$, где v_i — вершина K. Тогда нерв $N(\mathcal{U}_0)$ отождествляется с K, поэтому $\check{H}^k(\mathcal{U}_0;G) \cong H^k\big(N(\mathcal{U}_0);G\big) \cong H^k(K;G)$.

Пусть K' — барицентрическое подразделение K, $h_1 : K' \to K$ — симплициальная аппроксимация тождественного отображения (h_1 сопоставляет барицентру грани одну из вершин этой грани), $\mathcal{U}_1$ — покрытие пространства $|K|$ звёздами вершин симплициального комплекса K'. Если отождествить $N(\mathcal{U}_1)$ с K', то h_1 можно рассматривать как отображение $N(\mathcal{U}_1) \to N(\mathcal{U}_0)$. Это отображение индуцирует изоморфизм когомологий.

Затем можно рассмотреть $\mathcal{U}_m$ — покрытие $|K|$ звёздами вершин m-го барицентрического подразделения K. Отображение $N(\mathcal{U}_m) \to N(\mathcal{U}_{m-1})$, индуцирующее изоморфизм когомологий, строится точно так же.

Мы построили направленное множество $\mathcal{U}_0 > \mathcal{U}_1 > \dots$ и направленную систему абелевых групп $\check{H}^k(\mathcal{U}_m;G)$, в которой все гомоморфизмы $f_{\alpha\beta}$ являются изоморфизмами. Поэтому $\varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U}_m;G) \cong H^k(K;G)$.

Чтобы воспользоваться теоремой 5.1.2, покажем, что покрытия $\mathcal{U}_0 > \mathcal{U}_1 > \dots$ образуют кофинальное подмножество в множестве всех покрытий пространства $|K|$. Пусть $\mathcal{U}$ — произвольное открытое покрытие пространства $|K|$, δ — его число Лебега (мы предполагаем, что симплициальный комплекс K вложен в евклидово пространство). Выберем m так, что диаметр любого симплекса m-го барицентрического подразделения K меньше δ. Тогда $\mathcal{U}_m < \mathcal{U}$. □

Теорема 5.1.5. *Пусть X — нормальное топологическое пространство, Y — его компактное подпространство. Тогда $\check{H}^k(Y;G) \cong \varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U};G)$, где $\mathcal{U}$ — покрытие Y множествами, открытыми в X (а не в Y, как в определении когомологий Чеха).*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — покрытие Y множествами, открытыми в X. Выберем из него конечное подпокрытие $\{U_1, \ldots, U_n\}$ и рассмотрим покрытие Y множествами $U_i \cap Y$, открытыми в Y. Любое подпространство нормального пространства хаусдорфово, а компактное хаусдорфово пространство нормально. Поэтому пространство Y нормально, а значит, в покрытие $\{U_i \cap Y\}$ можно вписать открытое покрытие $\{V_i\}$ так, что $\bar{V}_i \subset U_i \cap Y$. Здесь $\bar{V}_i$ — замыкание V_i в Y, но оно же будет и замыканием V_i в X, поскольку Y замкнуто в X.

Построим набор открытых в X множеств $W_1, \ldots, W_n$ так, что $\bar{V}_i \subset W_i$, $\bar{W}_i \subset U_i$ и нервы покрытий $\{\bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n\}$ и $\{\bar{W}_1, \ldots, \bar{W}_n\}$ совпадают, т.е. $\bar{V}_{i_1} \cap \ldots \cap \bar{V}_{i_p} = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\bar{W}_{i_1} \cap \ldots \cap \bar{W}_{i_p} = \varnothing$. Пусть C_1 — объединение всех множеств вида $\bar{V}_{i_1} \cap \ldots \cap \bar{V}_{i_p}$, не пересекающих $\bar{V}_1$. Множества $\bar{V}_1$, C_1 и $X \setminus U_1$ замкнуты в X, причём множества $\bar{V}_1$ и $C_1 \cup (X \setminus U_1)$ не пересекаются. Поэтому в X можно выбрать открытое множество W_1 так, что $\bar{V}_i \subset W_i$ и $\bar{W}_1 \cap \big(C_1 \cup (X \setminus U_1)\big) = \varnothing$; это равенство означает, что $\bar{W}_1 \cap C_1 = \varnothing$ и $\bar{W}_1 \subset U_1$. Покажем, что нервы покрытий $\{\bar{W}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_n\}$ и $\{\bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n\}$ совпадают. Ясно, что если $\bar{W}_1 \cap \bar{V}_{i_1} \cap \ldots \cap \bar{V}_{i_p} = \varnothing$, то $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_{i_1} \cap \ldots \cap \bar{V}_{i_p} = \varnothing$, поскольку $\bar{V}_1 \subset W_1 \subset \bar{W}_1$. Предположим теперь, что $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_{i_1} \cap \ldots \cap \bar{V}_{i_p} = \varnothing$. Тогда $\bar{V}_{i_1} \cap \ldots \cap \bar{V}_{i_p} \subset C_1$. Но $\bar{W}_1 \cap C_1 = \varnothing$, поэтому $\bar{W}_1 \cap \bar{V}_{i_1} \cap \ldots \cap \bar{V}_{i_p} = \varnothing$. Повторив ту же самую конструкцию для $\bar{W}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_n$, построим $\bar{W}_2$ и т.д.

Покажем, что нервы покрытий Y открытыми в X множествами $\{W_1, \ldots, W_n\}$ и открытыми в Y множествами $\{W_1 \cap Y, \ldots, W_n \cap Y\}$ совпадают. Ясно, что если $W_{i_1} \cap \ldots \cap W_{i_p} = \varnothing$, то $W_{i_1} \cap \ldots \cap W_{i_p} \cap Y = \varnothing$. Предположим теперь, что $W_{i_1} \cap \ldots \cap W_{i_p} \cap Y = \varnothing$. Тогда $\bar{V}_{i_1} \cap \ldots \cap \bar{V}_{i_p} = \varnothing$, а это эквивалентно тому, что $\bar{W}_{i_1} \cap \ldots \cap \bar{W}_{i_p} = \varnothing$. Значит, $W_{i_1} \cap \ldots \cap W_{i_p} = \varnothing$.

Итак, мы показали, что покрытия Y открытыми в X множествами $\{W_1, \ldots, W_n\}$, для которых нервы покрытий $\{W_1, \ldots, W_n\}$ и $\{W_1 \cap Y, \ldots, W_n \cap Y\}$ совпадают, кофинальны в множестве покрытий Y множествами, открытыми в X. Значит, согласно теореме 5.1.2 $\varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U};G) \cong \varinjlim \check{H}^k(\mathcal{W};G)$. По построению $\check{H}^k(\mathcal{W};G) \cong \check{H}^k(\mathcal{W} \cap Y;G)$; здесь $\mathcal{W} \cap Y = \{W_1 \cap Y, \ldots, W_n \cap Y\}$. Кроме того, покрытия $\mathcal{W} \cap Y$ кофинальны в множестве всех открытых покрытий Y. Из этого следует требуемый изоморфизм. □

Для вычисления чеховских когомологий часто бывает полезно следующее утверждение.

Теорема 5.1.6. *Пусть X — компактное триангулируемое пространство, Y_n — подкомплекс некоторой триангуляции пространства X. Предположим, что $|Y_1| \supset |Y_2| \supset \dots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} |Y_n| = Y$. Тогда $\check{H}^k(Y;G) \cong \varinjlim H^k(Y_n;G)$.*

Доказательство. Пусть X_n — триангуляция X, для которой какое-то[1] подразделение Y_n является полным подкомплексом, т.е. если на набор вершин Y_n натянут симплекс комплекса X_n, то на этот набор вершин натянут и симплекс комплекса Y_n. Эту триангуляцию мы выберем столь мелкой, что будут выполняться два условия: (1) диаметр любого симплекса X_n меньше $1/n$ (чтобы придать этому смысл, нужно вложить X в евклидово пространство); (2) звезда каждой вершины X_n содержится в звезде некоторой вершины X_{n-1}. Мы будем предполагать, что триангуляция Y_n индуцирована триангуляцией X_n.

Рассмотрим для Y_n два покрытия $\mathcal{U}_n$ и $\mathcal{U}'_n$; $\mathcal{U}_n$ — покрытие звёздами в Y_n всех вершин Y_n, $\mathcal{U}'_n$ — покрытие звёздами в X_n всех вершин Y_n. Первое покрытие открыто в Y_n, второе открыто в X_n.

Условие (2) позволяет построить симплициальную аппроксимацию $h_n : Y_n \to Y_{n-1}$ вложения $|Y_n| \subset |Y_{n-1}|$. Нерв покрытия $\mathcal{U}_n$ можно отождествить с Y_n, поэтому получаем симплициальное отображение $h_n : N(\mathcal{U}_n) \to N(\mathcal{U}_{n-1})$ и индуцированный им гомоморфизм (не обязательно изоморфизм) $(h_n)_* : \check{H}^k(\mathcal{U}_{n-1}) \to \check{H}^k(\mathcal{U}_n)$; для краткости мы опустили группу коэффициентов G. Таким образом, $\varinjlim H^k(Y_n) \cong \varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U}_n)$.

Для покрытий $\mathcal{U}'_n$ из условия (2) следует, что $\mathcal{U}'_n < \mathcal{U}'_{n-1}$, поэтому возникает гомоморфизм $(h'_n)_* : \check{H}^k(\mathcal{U}'_{n-1}) \to \check{H}^k(\mathcal{U}'_n)$. Покажем, что нервы покрытий $\mathcal{U}_n$ и $\mathcal{U}'_n$ совпадают, а значит, после отождествления этих нервов гомоморфизмы $(h_n)_*$ и $(h'_n)_*$ совпадают.

Ясно, что $\mathrm{st}(v, Y_n) \subset \mathrm{st}(v, X_n)$, поэтому если $\cap\, \mathrm{st}(v_i, Y_n) \neq \varnothing$, то $\cap\, \mathrm{st}(v_i, X_n) \neq \varnothing$. Предположим теперь, что $\cap\, \mathrm{st}(v_i, X_n) \neq \varnothing$. Это означает, что на вершины $\{v_i\}$ симплекса в X_n натянут симплекс. При этом $\{v_i\}$ — вершины Y_n, а по построению симплициальный подкомплекс Y_n полный. Значит, на вершины $\{v_i\}$ в Y_n натянут симплекс, т.е. $\cap\, \mathrm{st}(v_i, Y_n) \neq \varnothing$.

Таким образом, $\varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U}_n) \cong \varinjlim \check{H}^k(\mathcal{U}'_n)$.

[1] Согласно задаче 8.3 из части I достаточно взять барицентрическое подразделение.

Чтобы воспользоваться теоремой 5.1.2, покажем, что покрытия $\mathcal{U}'_1 > \mathcal{U}'_2 > \ldots$ образуют кофинальное подмножество в семействе покрытий Y открытыми в X множествами. Пусть $\mathcal{U}$ — покрытие Y множествами, открытыми в X. Сначала покажем, что $\mathcal{U}$ покрывает некоторое множество $|Y_n|$. Предположим, что в каждом множестве $|Y_n|$ есть точка y_n, не покрытая $\mathcal{U}$. Из компактности X следует, что последовательность $\{y_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$. Предельная точка y лежит в $\bigcap_{n=1}^{\infty} |Y_n| = Y$. Она, как и любая точка множества Y, покрыта неким открытым множеством U из покрытия $\mathcal{U}$. Но тогда $y_{n_k} \in U$ для достаточно большого k, что противоречит предположению.

Точно так же, как доказывается теорема Лебега об открытых покрытиях, можно доказать, что существует положительное число δ, обладающее следующим свойством: если диаметр множества B, пересекающего $|Y_n|$, меньше δ, то B содержится в одном из открытых множеств покрытия $\mathcal{U}$. Пусть $1/m < \delta/2$ и $m \leqslant n$. Покажем, что покрытие $\mathcal{U}'_m$ вписано в покрытие $\mathcal{U}$. Диаметр любой звезды вершины Y_m меньше $2/m < \delta$. Кроме того, эта звезда пересекает $|Y_n|$, поскольку $|Y_m| \subset |Y_n|$. Значит, звезда содержится в одном из открытых множеств покрытия $\mathcal{U}$. □

С помощью когомологий Чеха можно доказать следующий более общий вариант двойственности Александера.

Теорема 5.1.7 (двойственность Александера–Понтрягина). *Пусть $A \subsetneq S^n$ — замкнутое подмножество. Тогда $\check{\tilde{H}}^k(A) \cong \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus A)$ при $0 \leqslant k \leqslant n-1$. (Здесь $\check{\tilde{H}}^*$ — приведённые чеховские когомологии, $\tilde{H}_*$ — приведённые сингулярные гомологии.)*

Доказательство. Пусть K — столь мелкая триангуляция S^n, что не все n-мерные симплексы K пересекают A; $K^{(m)}$ — m-е барицентрическое подразделение K. Рассмотрим M_m — подкомплекс $K^{(m)}$, состоящий из тех симплексов, которые пересекают A. Симплициальный комплекс M_m не обязан быть многообразием; у него могут быть особые точки (или особые симплексы). Но все особые точки лежат вне A, поэтому из M_m можно вырезать малые окрестности особых точек так, чтобы M_m стало многообразием, содержащим A (рис. 5.1).

Так можно построить последовательность триангулированных многообразий $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$, причём $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = A$. Для M_i верна теорема двойственности Александера $\check{H}^k(M_i) \cong \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus M_i)$;

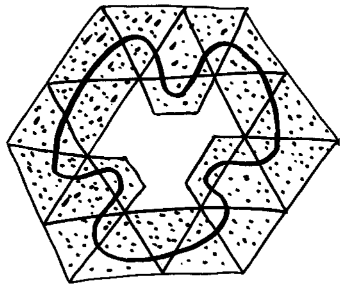

Рис. 5.1. Исправление M_m

это доказывается точно так же, как в гладком (триангулируемом) случае. Изоморфизмы двойственности коммутируют с гомоморфизмами, индуцированными вложениями $M_{i+1} \subset M_i$, поэтому $\varinjlim \tilde{H}^k(M_i) \cong \varinjlim \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus M_i)$. Согласно теореме 5.1.6 прямой предел, стоящий слева, это группа чеховских когомологий $\tilde{\check{H}}^k(A)$. Убедимся, что справа стоит группа сингулярных гомологий $\tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus A)$.

Гомоморфизмы $\tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus M_i) \to \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus A)$, индуцированные вложениями, дают гомоморфизм $\varinjlim \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus M_i) \to \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus A)$. Нужно проверить, что этот гомоморфизм — изоморфизм. Носитель любой сингулярной цепи из $C_{n-k-1}(S^n \setminus A)$ компактен. Вложенные друг в друга открытые множества $S^n \setminus M_i$ покрывают его, поэтому он содержится в одном из них. Из этого следует эпиморфность. Мономорфность следует из компактности носителя $(n-k)$-мерной сингулярной цепи, границей которой служит разность двух данных $(n-k-1)$-мерных сингулярных цепей. □

5.1.3. Расслоения со структурной группой и некоммутативные когомологии Чеха

Точно так же, как определяется пучок абелевых групп, можно определить пучок неабелевых групп на пространстве X. В неабелевом случае группы когомологий $\check{H}^k(X;\mathcal{F})$ при $k > 1$ определить нельзя, но можно определить когомологическое множество $\check{H}^1(X;\mathcal{F})$ с отмеченным элементом. При этом если $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп, то это множество совпадает с группой когомологий Чеха, причём отмеченный элемент совпадает с нулевым элементом группы когомологий.

Напомним, что если $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на топологическом пространстве X и $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — открытое покрытие X, то коцепь $c^1 \in C^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ сопоставляет упорядоченному набору U_i, U_j элемент $c^1(U_i, U_j) \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) = \Gamma(U_i \cap U_j; \mathcal{F})$. При этом коцепь c^1 является коциклом, если для любого упорядоченного набора U_i, U_j, U_k при ограничении на $U_i \cap U_j \cap U_k$ имеет место равенство $c^1(U_i, U_j) + c^1(U_j, U_k) = c^1(U_i, U_k)$. Коцепь c^1 является кограницей, если существует коцепь $c^0 \in C^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, для которой при ограничении на $U_i \cap U_j$ имеет место равенство $c^1(U_i, U_j) = c^0(U_j) - c^0(U_i)$.

Для пучков неабелевых групп соответствующие определения такие. Коцикл (1-мерный) f снова сопоставляет упорядоченному набору U_i, U_j элемент $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) = \Gamma(U_i \cap U_j; \mathcal{F})$, причём для ограничений на $U_i \cap U_j \cap U_k$ имеет место равенство $f_{ij} f_{jk} = f_{ik}$. Два коцикла f и f' эквивалентны (отличаются на кограницу), если для каждого множества U_i существует элемент $g_i \in \Gamma(U_i; \mathcal{F})$, для которого при ограничении на $U_i \cap U_j$ имеет место равенство $f'_{ij} = g_i^{-1} f_{ij} g_j$. Когомологическое множество $\check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ — это множество классов эквивалентных коциклов. Отмеченный элемент этого множества — класс коцикла 1, который каждому упорядоченному набору U_i, U_j сопоставляет единичный элемент группы $\Gamma(U_i \cap U_j; \mathcal{F})$.

Когомологическое множество $\check{H}^1(X; \mathcal{F})$, как и в коммутативном случае, строится как прямой предел. Пусть покрытие $\mathcal{U}$ — измельчение покрытия $\mathcal{V}$ и $U_i \subset V_{\lambda(i)}$. Тогда коциклу $f \in Z^1(\mathcal{V}; \mathcal{F})$ можно сопоставить коцикл $\lambda^\# f \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, для которого $(\lambda^\# f)(U_i \cap U_j) = f(V_{\lambda(i)} \cap V_{\lambda(j)})$. Отображение $\lambda^\#$ индуцирует отображение $\lambda^* : \check{H}^1(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \to \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. Проверим, что если $U_i \subset V_{\mu(i)}$, то $\mu^* = \lambda^*$. Эквивалентность коциклов $\lambda^\# f$ и $\mu^\# f$ устанавливает 0-мерная коцепь $g_i = f_{\lambda(i),\mu(i)}$. Действительно, из уравнения коцикла следует, что $f_{\mu(i),\lambda(i)} f_{\lambda(i),\lambda(j)} f_{\lambda(i),\mu(j)} = f_{\mu(i),\mu(j)}$, т.е. $g_i^{-1} (\lambda^\# f)_{ij} g_j = (\mu^\# f)_{ij}$.

Пусть G — топологическая группа, B — топологическое пространство. Рассмотрим пучок $\mathcal{G}$ на B, для которого $\Gamma(U, \mathcal{G})$ — группа всех непрерывных отображений из U в G, т.е. $\mathcal{G}$ — пучок ростков непрерывных функций со значениями в G.

Предположим, что группа G эффективно действует на топологическом пространстве F. Локально тривиальное расслоение $p : E \to B$ со слоем F называют *расслоением со структурной группой* G, если гомеоморфизмы $h_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ обладают следующим свойством: для любой пары индексов i, j найдётся элемент $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{G})$, для которого $h_i h_j^{-1}(u, f) = \big(u, g_{ij}(u) f\big)$ для всех $u \in U_i \cap U_j$. Действие G на

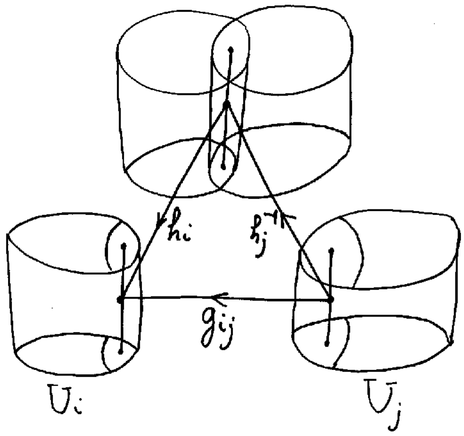

Рис. 5.2. Функции перехода

F эффективно, поэтому элемент g_{ij} однозначно задаётся гомеоморфизмами h_i и h_j. Элемент g_{ij} представляет собой отображение из $U_i \cap U_j$ в структурную группу G. Это отображение называют ***функцией перехода***. Функции перехода описывают, как производится склейка общей части «столбиков» $U_i \times F$ и $U_j \times F$ (рис. 5.2).

В этом определении расслоения со структурной группой есть существенный недостаток — зависимость от покрытия $\{U_i\}$. Чтобы избавиться от этого недостатка, рассмотрим все гомеоморфизмы $h_U : p^{-1}(U) \to U \times F$, которые можно добавить к гомеоморфизмам h_i, а именно, те гомеоморфизмы, которые обладают следующим свойством: для каждого U_i найдётся элемент $g_{U,i} \in \Gamma(U \cap U_i, \mathcal{G})$, для которого $h_U h_i^{-1}(u, f) = \big(u, g_{U,i}(u)f\big)$ для всех $u \in U \cap U_i$. Такие гомеоморфизмами будем называть ***допустимыми картами***. Будем считать, что два покрытия $\{U_i\}$ и $\{U'_j\}$ с гомеоморфизмами $\{h_i\}$ и $\{h'_j\}$ задают одно и то же расслоение со структурной группой G, если у них совпадают множества допустимых карт.

Введём теперь понятие изоморфизма двух расслоений со структурной группой G над одной и той же базой B. Пусть $p : E \to B$ и $p' : E' \to B$ — расслоения со структурной группой G. Гомеоморфизм $\varphi : E \to E'$ называют ***изоморфизмом*** расслоений со структурной группой G, если для каждой точки $b \in B$ выполняются следующие свойства:

1) слой $p^{-1}(b)$ отображается на слой $(p')^{-1}(b)$;

2) можно выбрать окрестность $U \ni b$, элемент $g_U \in \Gamma(U, \mathcal{G})$, допустимую карту $h_U : p^{-1}(U) \to U \times F$ для расслоения E и допустимую карту $h'_U : (p')^{-1}(U) \to U \times F$ для расслоения E' так, что для всех $u \in U$ имеет место равенство $h'_U \varphi h_U^{-1}(u, f) = \big(u, g_U(u)f\big)$.

Например, n-мерные векторные расслоения — это то же самое, что расслоения со слоем $\mathbb{R}^n$ и структурной группой $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Изоморфизм векторных расслоений — это то же самое, что изоморфизм расслоений со структурной группой. Если в векторном расслоении можно ввести риманову метрику (например, если база компактна), то можно считать, что структурная группа — это $\mathrm{O}(n)$. При этом расслоение ориентируемо тогда и только тогда, когда в качестве структурной группы можно взять $\mathrm{SO}(n)$.

Пример 5.1.9. *Пусть $\mathbb{C}P^n$ покрыто картами U_i, $i = 0, \ldots, n$, которые в однородных координатах $(z_0 : \ldots : z_n)$ задаются уравнениями $z_i = 0$. Тогда каноническое расслоение γ_n^1 над $\mathbb{C}P^n$ задаётся функциями перехода $g_{ij} = z_i/z_j$.*

Доказательство. Слоем канонического расслоения над точкой $(z_0 : \ldots : z_n)$ является прямая $(\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n)$. Гомеоморфизм $h_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}$ можно задать формулой $h_i(\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n) = \big((z_0 : \ldots : z_n), \lambda_i\big)$, где $\lambda_i = \lambda z_i$, т.е. $(\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n) = \lambda_i \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right)$. По определению $\lambda_i = g_{ij}\lambda_j$, т.е. $g_{ij} = \lambda_i/\lambda_j = z_i/z_j$. $\square$

Пример 5.1.10. *Пусть n-мерное векторное расслоение задаётся функциями перехода g_{ij} (в каждой точке g_{ij} представляет собой матрицу порядка n) Тогда двойственное расслоение задаётся функциями перехода $(g_{ij}^T)^{-1}$.*

Доказательство. Отображение $g_{ij} : V_1 \to V_2$ индуцирует двойственное отображение $V_2^* \to V_1^*$, которое задаётся матрицей g_{ij}^T. Но нас интересует не это отображение, а обратное к нему отображение $V_1^* \to V_2^*$. $\square$

Если ξ — одномерное расслоение с функциями перехода g_{ij}, то двойственное расслоение ξ^* задаётся функциями перехода $1/g_{ij}$. Ясно также, что если одномерное расслоение η задаётся функциями перехода h_{ij}, то расслоение $\xi \otimes \eta$ задаётся функциями перехода $g_{ij}h_{ij}$. В частности, расслоение $\xi \otimes \xi^*$ тривиально.

Пример 5.1.11. *Рассмотрим отображение* $p : \mathbb{C}P^{n+1} \setminus (0 : \ldots : 0 : 1) \to \mathbb{C}P^n$, *заданное формулой* $p(z_0 : \ldots : z_{n+1}) = (z_0 : \ldots : z_n)$. *Это отображение является векторным расслоением, двойственным каноническому расслоению* γ_n^1.

Доказательство. Гомеоморфизм $h_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}$ можно задать формулой $h_i(z_0 : \ldots : z_{n+1}) = \big((z_0 : \ldots : z_n), \lambda_i\big)$, где $\lambda_i = z_{n+1}/z_i$. Тогда $g_{ij} = \lambda_i/\lambda_j = z_j/z_i$. □

Если задано открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_i\}$ пространства B и задан коцикл $g = \{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$, то можно построить расслоение E_g над B со структурной группой G и слоем F. Для этого нужно взять дизъюнктное объединение множеств $U_i \times F$ и для каждой точки $u \in U_i \cap U_j$ отождествить точку $(u, f) \in U_i \times F$ с точкой $\big(u, g_{ij}(u)f\big) \in U_j \times F$. Корректность такого отождествления обеспечивается уравнением коцикла. Для полученного пространства E_g проекция $p_g : E_g \to B$ индуцирована естественной проекцией $U_i \times F \to U_i$.

Если заданы два коцикла $g \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$ и $g' \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$, то расслоения $p_g : E_g \to B$ и $p_{g'} : E_{g'} \to B$ изоморфны (как расслоения со структурной группой G) тогда и только тогда, когда коциклам g и g' соответствует один и тот же элемент когомологического множества $\check{H}^1(B; \mathcal{G})$.

Ясно также, что любое расслоение над B со структурной группой G и слоем F можно получить как расслоение E_g для некоторого коцикла g. Поэтому имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.1.8. *Пусть задано эффективное непрерывное действие топологической группы* G *на пространстве* F. *Тогда классы изоморфных расслоений над* B *со структурной группой* G *и слоем* F *находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с элементами когомологического множества* $\check{H}^1(B; \mathcal{G})$. *При этом тривиальному расслоению* $B \times F$ *соответствует отмеченный элемент.*

5.2. Когомологии де Рама

Напомним, что дифференциальная k-форма ω на многообразии M^n — это полилинейная кососимметрическая функция от k векторных полей $\xi_1, \ldots, \xi_k$ на M^n. Линейное пространство k-форм на многообразии M^n мы будем обозначать[1] $\Omega^k(M^n)$. Для двух дифференциальных форм $\omega_1 \in \Omega^p(M^n)$ и $\omega_2 \in \Omega^q(M^n)$ определено их внешнее произведение

[1] В части I использовалось обозначение $\Lambda^k M^n$.

$\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{p+q}(M^n)$; при этом $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq}\omega_2 \wedge \omega_1$. Внешнее умножение превращает линейное пространство $\Omega^*(M^n) = \bigoplus_{k\geqslant 0}\Omega^k(M^n)$ в алгебру.

Гладкое отображение $f : M^n \to N^m$ индуцирует линейное отображение $f^* : \Omega^k(N^m) \to \Omega^k(M^n)$, а именно, $(f^*\omega)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = f^*\omega(f_*\xi_1, \ldots, f_*\xi_k)$, где $f_* = df$ — дифференциал отображения f. В локальных координатах это отображение выглядит следующим образом. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_m$ — локальные координаты на N^m и M^n. Тогда

$$f^*(\sum a_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = \sum a_{i_1\ldots i_k} \frac{\partial f_{i_1}}{\partial y_{j_1}} \ldots \frac{\partial f_{i_k}}{\partial y_{j_k}} dy_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy_{j_k}.$$

Отображение $f^* : \Omega^*(N^m) \to \Omega^*(M^n)$ является гомеоморфизмом алгебр.

Построим полилинейное отображение $d : \Omega^k(M^n) \to \Omega^{k+1}(M^n)$, обладающее следующими свойствами: 1) $d \circ d = 0$; 2) d полилинейно относительно гладких функций, т.е. $d\omega(\varphi\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_p) = \varphi d\omega(\xi_0, \ldots, \xi_p)$ для любой $\varphi \in C^\infty(M^n)$. Для этого нам понадобится понятие коммутатора векторных полей.

Пусть ξ и η — векторные поля на M^n, $\varphi \in C^\infty(M^n)$. Положим $[\xi, \eta](\varphi) = \xi(\eta(\varphi)) - \eta(\xi(\varphi))$. Если воспользоваться тем, что $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}$, то в локальных координатах получим выражение

$$[\xi, \eta](\varphi) = \sum_{i,j} \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Таким образом, в фиксированной локальной системе координат $[\xi, \eta]$ представляет собой векторное поле. Оператор $[\xi, \eta]$ на гладких функциях не зависит от выбора локальной системы координат, поэтому мы получаем векторное поле $[\xi, \eta]$, которое называют *коммутатором* векторных полей ξ и η.

Непосредственно из определения видно, что $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$. Легко проверить, что если $\varphi \in C^\infty(M^n)$, то $[\varphi\xi, \eta] = \varphi[\xi, \eta] - \eta(\varphi)\xi$; для доказательства нужно заметить, что

$$\frac{\partial(\varphi\xi_i)}{\partial x_j} = \varphi \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \xi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

Теперь мы уже можем определить отображение d. Пусть

$\omega \in \Omega^k(M^n)$. Положим

$$d\omega(\xi_0,\ldots,\xi_k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\xi_i\big(\omega(\xi_0,\ldots,\hat{\xi}_i,\ldots,\xi_k)\big)+ \\ +\sum_{0\leqslant i<j\leqslant k}(-1)^{i+j}\omega([\xi_i,\xi_j],\ldots,\hat{\xi}_i,\ldots,\hat{\xi}_j,\ldots,\xi_k).$$

Для $\varphi \in C^\infty(M^n)=\Omega^0(M^n)$ положим $d\varphi(\xi)=\xi(\varphi)$. Кососимметричность и полилинейность $d\omega$ видны непосредственно из определения. Равенство $d\omega(\varphi\xi_0,\ldots,\xi_k)=\varphi d\omega(\xi_0,\ldots,\xi_k)$ следует из того, что

$$\begin{aligned}&\xi_i\big(\omega(\varphi\xi_0,\ldots,\xi_k)\big)+\omega([\varphi\xi_0,\xi_i],\ldots,\hat{\xi}_i,\ldots,\xi_k)=\\&=\varphi\xi_i\big(\omega(\varphi\xi_0,\ldots,\hat{\xi}_i,\ldots,\xi_k)\big)+\xi_i(\varphi)\omega(\varphi\xi_0,\ldots,\hat{\xi}_i,\ldots,\xi_k)+\\&+\varphi\omega([\xi_0,\xi_i],\ldots,\hat{\xi}_i,\ldots,\xi_k)-\xi_i(\varphi)\omega(\varphi\xi_0,\ldots,\hat{\xi}_i,\ldots,\xi_k)=\\&=\varphi\Big(\xi_i\big(\omega(\xi_0,\ldots,\hat{\xi}_i,\ldots,\xi_k)\big)+\omega([\xi_0,\xi_i],\ldots,\hat{\xi}_i,\ldots,\xi_k)\Big).\end{aligned}$$

Введём локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ и вычислим дифференциал формы $\omega=\varphi(x)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$, где $i_1<\ldots<i_k$. Положим $\xi_0=\frac{\partial}{\partial x_{j_0}}$, $\ldots$, $\xi_k=\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}$, где $j_0<\ldots<j_k$. Векторные поля ξ_i попарно коммутируют: $[\xi_i,\xi_j]=0$. Поэтому

$$d\omega(\xi_0,\ldots,\xi_k)=\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\frac{\partial}{\partial x_{j_p}}\big(\omega(\xi_0,\ldots,\hat{\xi}_p,\ldots,\xi_k)\big).$$

Здесь $\omega(\xi_0,\ldots,\hat{\xi}_p,\ldots,\xi_k)=\varphi(x)$, если $i_1=j_0$, $\ldots$, $i_p=j_{p-1}$, $i_{p+1}=$ $=j_p$, $\ldots$, $i_k=j_k$, а во всех остальных случаях получаем 0. При этом $j_{p-1}<j_p<j_{p+1}$. Значит,

$$\begin{aligned}&(-1)^p\frac{\partial}{\partial x_{j_p}}\big(\omega(\xi_0,\ldots,\hat{\xi}_p,\ldots,\xi_k)\big)=\\&\qquad=(-1)^p\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j_p}}dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_p}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}(\xi_0,\ldots,\xi_p,\ldots,\xi_k)=\\&\qquad\qquad=\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j_p}}dx_{j_p}\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_{j_p}}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}(\xi_0,\ldots,\xi_k).\end{aligned}$$

В итоге получаем

$$d(\varphi(x)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k})=\sum_{s=0}^{n}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_s}dx_s\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}.$$

Пользуясь этим выражением, легко проверить, что $d \circ d = 0$; кроме того, если ω_1 — k-форма, то $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$.

Дифференциальную форму ω называют *замкнутой*, если $d\omega = 0$. Дифференциальную форму ω называют *точной*, если $\omega = d\omega'$ для некоторой формы ω'. Факторпространство замкнутых k-форм на многообразии M^n по точным k-формам называют *когомологиями де Рама* и обозначают $H^k_{\mathrm{DR}}(M^n)$.

Пример 5.2.1. $H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ *и* $H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}) = 0$.

Доказательство. Для $\mathbb{R}$ есть только один нетривиальный дифференциал $d : \Omega^0(\mathbb{R}) \to \Omega^1(\mathbb{R})$; при этом $\varphi \mapsto \frac{d\varphi}{dx} dx$. Ясно, что $\operatorname{Ker} d$ состоит из постоянных функций. Поэтому $H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} d \cong \mathbb{R}$. Легко проверить, что $\operatorname{Im} d = \Omega^1(\mathbb{R})$. Действительно, любая 1-форма на $\mathbb{R}$ имеет вид $\xi\, dx$, где $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Положим $\varphi(x) = \int_0^x \xi(t)\, dt$ при $x \geqslant 0$ и $\varphi(x) = \int_x^0 \xi(t)\, dt$ при $x \leqslant 0$. Тогда $d\varphi = \xi\, dx$. Таким образом, $H^1_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}) = \Omega^1(\mathbb{R}) / \operatorname{Im} d = \Omega^1(\mathbb{R})/\Omega^1(\mathbb{R}) = 0$. □

Пример 5.2.2. *Если* M^n *— связное многообразие, то* $H^0_{\mathrm{DR}}(M^n) \cong \mathbb{R}$.

Доказательство. Ядро гомоморфизма $d : \Omega^0(M^n) \to \Omega^1(M^n)$ состоит из функций, которые в каждой координатной окрестности удовлетворяют условию $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0$. Такие функции постоянны на каждой компоненте связности многообразия. □

Легко проверить, что отображение $f^* : \Omega^k(N^m) \to \Omega^k(M^n)$, индуцированное гладким отображением $f : M^n \to N^m$, цепное, т.е. $df^*\omega = f^* d\omega$. Действительно, на векторных полях $\xi_0, \ldots, \xi_k$ обе формы принимают одно и то же значение

$$\sum (-1)^i \xi_i \omega(f_*\xi_0, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, f_*\xi_k) + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega(f_*[\xi_i, \xi_j], \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, f_*\xi_k),$$

поскольку $f_*[\xi_i, \xi_j] = [f_*\xi_i, f_*\xi_j]$.

Теорема 5.2.1. *Пусть* $M^n = U_1 \cup U_2$, *где* U_1 *и* U_2 *— открытые множества. Тогда имеет место точная последовательность Майера–Вьеториса*

$$\to H^k_{\mathrm{DR}}(M^n) \to H^k_{\mathrm{DR}}(U_1) \oplus H^k_{\mathrm{DR}}(U_2) \to H^k_{\mathrm{DR}}(U_1 \cap U_2) \to H^{k+1}_{\mathrm{DR}}(M^n) \to$$

Доказательство. Достаточно построить точную последовательность групп коцепей

$$0 \to \Omega^k(M^n) \xrightarrow{i^*} \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \xrightarrow{j^*} \Omega^k(U_1 \cap U_2) \to 0.$$

Пусть $\omega \in \Omega^k(M^n)$. Положим $i^*(\omega) = (i_1^*\omega, i_2^*\omega)$, где $i_1^*\omega$ и $i_2^*\omega$ — ограничения формы ω на U_1 и U_2. Пусть $\omega_1 \in \Omega^k(U_1)$ и $\omega_2 \in \Omega^k(U_2)$. Положим $j^*(\omega_1, \omega_2) = j_1^*\omega_1 - j_2^*\omega_2$, где $j_i^*\omega_i$ — ограничение формы ω_i на U_i.

Мономорфность гомоморфизма i^* очевидна, поскольку форма на M^n однозначно задаётся своими ограничениями на U_1 и U_2.

Покажем, что j^* — эпиморфизм. Пусть $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ — гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию $\{U_1, U_2\}$. Тогда форму $\omega \in \Omega^k(U_1 \cap U_2)$ можно представить в виде $i_1^*\lambda_2\omega + i_2^*\lambda_1\omega$; здесь $\lambda_2\omega$ — корректно определённая форма на U_1, поскольку $\lambda_2 = 0$ на множестве $U_1 \setminus (U_1 \cap U_2)$.

Наконец, проверим, что $\operatorname{Ker} j^* = \operatorname{Im} i^*$. Из равенства $j^*i^* = 0$ следует, что $\operatorname{Ker} j^* \supset \operatorname{Im} i^*$. Пусть $(\omega_1, \omega_2) \in \operatorname{Ker} j^*$, т.е. $j_1^*\omega_1 = j_2^*\omega_2$. Это означает, что $\omega_1(x) = \omega_2(x)$ для всех $x \in U_1 \cap U_2$. Поэтому можно определить форму ω на M^n, полагая её равной ω_1 на U_1 и ω_2 на U_2. Ясно, что $i^*\omega = (\omega_1, \omega_2)$. □

Для некомпактного многообразия M^n наряду с алгеброй дифференциальных форм $\Omega^*(M^n)$ часто бывает полезно рассматривать алгебру $\Omega_c^*(M^n)$ дифференциальных форм с компактными носителями (т.е. форм, тождественно равных нулю вне некоторого компактного множества). Дифференциал d для них тот же самый, свойство $d \circ d = 0$ для него тоже выполняется, поэтому по формам с компактными носителями можно построить когомологии, которые мы будем обозначать $H_c^*(M^n)$. Если многообразие M^n компактно, то когомологии H_{DR}^* и H_c^* для него совпадают. Но если M^n некомпактно (точнее говоря, у него нет компактных связных компонент), то эти когомологии различны.

Пример 5.2.3. *Если M^n — связное некомпактное многообразие, то $H_c^0(M^n) = 0$.*

Доказательство. Ядро гомоморфизма $d : \Omega_c^0(M^n) \to \Omega_c^1(M^n)$ состоит из постоянных функций с компактными носителями. Но поскольку M^n некомпактно (и связно), такая функция только одна — тождественно равная нулю. □

Пример 5.2.4. $H_c^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

Доказательство. Форма $\psi(x)dx$ (с компактным носителем) лежит в образе гомоморфизма $d\colon \Omega^0_c(\mathbb{R}) \to \Omega^1_c(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда носитель функции $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,dt$ компактен, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\,dt = 0$.

Рассмотрим отображение $\Omega^1_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, заданное формулой $\psi(x)dx \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\,dt$. Ясно, что это отображение — эпиморфизм. Его ядро совпадает с $\operatorname{Im} d$. Поэтому $\Omega^1_c(\mathbb{R})/\operatorname{Im} d \cong \mathbb{R}$. □

Когомологии с компактными носителями имеют весьма существенное отличие от обычных когомологий де Рама, которое проявляется даже в случае компактных многообразий. А именно, для когомологий с компактными носителями имеет место точная последовательность Майера–Вьеториса, но отображения в ней направлены в обратную сторону, т.е. так, как для гомологий, а не для когомологий. Причина этого заключается в том, что для форм с компактными носителями нельзя использовать операцию ограничения формы на открытое множество. Действительно, если компактный носитель формы содержит данное открытое множество, то в результате получится форма с некомпактным носителем. Но в случае форм с компактными носителями для открытого множества U можно использовать операцию распространения формы на множество, содержащее U, полагая форму равной нулю вне U. Действительно, любая точка вне U имеет окрестность, не пересекающуюся с компактным множеством $K \subset U$.

Теорема 5.2.2. *Пусть $M^n = U_1 \cup U_2$, где U_1 и U_2 — открытые множества. Тогда имеет место точная последовательность Майера–Вьеториса*

$$\to H^k_c(M^n) \to H^k_c(U_1 \cap U_2) \to H^k_c(U_1) \oplus H^k(U_2) \to H^{k+1}_c(M^n) \to$$

Доказательство. Построим точную последовательность

$$0 \to \Omega^k_c(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{j_c^*} \Omega^k_c(U_1) \oplus \Omega^k_c(U_2) \xrightarrow{i_c^*} \Omega^k_c(M^n) \to 0$$

следующим образом. Для формы $\omega \in \Omega^k_c(U_1 \cap U_2)$ положим $j^*\omega = (j_1^*\omega, -j_2^*\omega)$, где $j_p^*\omega$ — распространение формы ω на U_p. Пусть $\omega_1 \in \Omega^k_c(U_1)$ и $\omega_2 \in \Omega^k_c(U_2)$. Положим $i^*(\omega_1, \omega_2) = i_1^*\omega_1 + i_2^*\omega_2$, где $i_p^*\omega_p$ — распространение формы ω_p с множества U_p на всё многообразие.

Мономорфность и точность в среднем члене очевидны. Проверим эпиморфность. Пусть $\omega \in \Omega^k_c(M^n)$ и $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ — гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию $\{U_1, U_2\}$. Носитель формы $\lambda_p\omega$ представляет собой пересечений компактного множества $\operatorname{supp}\omega$ и замкнутого множества $\operatorname{supp}\lambda_p$, поэтому он компактен (замкнутое подмножество компактного пространства компактно). Значит, $\lambda_p \omega \in \Omega_c(U_p)$. Ясно, что $i_c^*(\lambda_1\omega, \lambda_2\omega) = \omega$. □

5.2.1. Теорема Стокса. Гомотопическая инвариантность

Интегрирование форм

Выберем в $\mathbb{R}^n$ координаты и запишем форму $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ в виде $\omega = \varphi(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Для краткости это будем записывать так: $\omega = \varphi(x)\, dx$. Перейдя к другой системе координат $y(x)$, получим $dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Кратко это будем записывать так: $dy = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) dx$. В новых координатах $\omega = \psi(y)\, dy$. Выясним, как связаны функции $\psi(y)$ и $\varphi(x)$. Ясно, что $\varphi(x)\, dx = \omega = \psi(y)\, dy = \psi(y) \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) dx$, поэтому $\varphi(x) = \psi\big(y(x)\big) \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$.

Формула замены переменных в интеграле показывает, что

$$\int \psi(y)\, dy = \int \psi\big(y(x)\big) \left|\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)\right| dx = \pm \int \varphi(x)\, dx,$$

где знак $\pm$ соответствует знаку определителя $\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$. Это позволяет определить интеграл формы следующим образом. Предположим, что в $\mathbb{R}^n$ фиксирована ориентация. Пусть $\omega \in \Omega^n_c(\mathbb{R}^n)$ — форма с компактным носителем. Положим $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx$, где x — система координат, ориентация которой согласована с ориентацией $\mathbb{R}^n$

Чтобы определить *интеграл* формы $\omega \in \Omega^n_c(M^n)$, где M^n — ориентированное многообразие, поступим следующим образом. Возьмём произвольный локально конечный атлас $\{U_\alpha\}$ с картами $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$, сохраняющими ориентацию. Пусть $\{\lambda_\alpha\}$ — подчинённое ему гладкое разбиение единицы. Положим

$$\int_{M^n} \omega = \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_\alpha (f_\alpha^{-1})^* \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \lambda_\alpha \omega.$$

Носитель формы $\lambda_\alpha \omega$ — замкнутое подмножество компактного множества $\operatorname{supp} \lambda_\alpha$, поэтому он компактен. Если $\{V_\beta\}$ — другой ориентирующий атлас и $\{\mu_\beta\}$ — подчинённое ему разбиение единицы, то из равенства $\sum_\beta \mu_\beta = 1$ следует, что $\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \lambda_\alpha \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int_{U_\alpha} \lambda_\alpha \mu_\beta \omega$. Носитель формы $\lambda_\alpha \mu_\beta \omega$ лежит в $U_\alpha \cap V_\beta$, поэтому $\int_{U_\alpha} \lambda_\alpha \mu_\beta \omega = \int_{V_\beta} \lambda_\alpha \mu_\beta \omega$. Следовательно, $\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \lambda_\alpha \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int_{V_\beta} \lambda_\alpha \mu_\beta \omega = \sum_\beta \int_{V_\beta} \mu_\beta \omega$, поскольку

$\sum_\alpha \lambda_\alpha = 1$. Это означает, что определение интеграла формы ω по многообразию M^n корректно.

Теорема Стокса

Теорема Стокса заключается в том, что $\int_{M^n} d\omega = \pm \int_{\partial M^n} \omega$ для любой формы $\omega \in \Omega^n_c(M^n)$. Во втором интеграле формально следовало бы вместо ω написать $i^*\omega$, где $i : \partial M^n \to M^n$ — естественное включение; другими словами, $i^*\omega$ — ограничение формы ω на ∂M^n. От знака $\pm$ перед вторым интегралом можно избавиться посредством соглашения об ориентации ∂M^n, индуцированной ориентацией M^n.

Займёмся доказательством теоремы Стокса.

Случай 1. $M^n = \mathbb{R}^n$.

Пусть $\omega = \varphi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1} \in \Omega^{n-1}_c(\mathbb{R}^n)$. Тогда $d\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = (-1)^{n-1} \int \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Но $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, \infty) - \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\infty) = 0$, поскольку носитель функции φ компактен.

Случай 2. $M^n = \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geqslant 0\}$.

Пусть $\omega = \sum_i \varphi_i\, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega^{n-1}_c(\mathbb{R}^n)$. Тогда $d\omega = \sum_i (-1)^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} d\omega = \sum_{1 \leqslant i < n} (-1)^{i-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n + \\ + (-1)^{n-1} \left(\int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Если $i \neq n$, то $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx_i = 0$, как и в случае 1. При $i = n$ получаем интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dx_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, \infty) - \varphi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = -\varphi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Значит,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} d\omega = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) dx_1 \ldots dx_{n-1} = (-1)^n \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \omega;$$

при записи последнего равенства мы воспользовались тем, что при ограничении на $\partial \mathbb{R}^n_+$ форма dx_n обращается в нуль; поэтому при ограничении на $\partial\mathbb{R}^n_+$ от формы ω остаётся только одно слагаемое $\varphi_n\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$.

От знака $(-1)^n$ можно избавиться, если предполагать, что ориентация $\partial\mathbb{R}^n_+$ задаётся формой $(-1)^n dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$. По-другому это соглашение можно сформулировать следующим образом. Пусть базис $e_1, \ldots, e_{n-1}$ задаёт положительную ориентацию края, ε — вектор внешней нормали к краю. Тогда базис ε, $e_1, \ldots, e_{n-1}$ задаёт положительную ориентацию многообразия. Действительно, $\varepsilon = -e_n$, поэтому базис ε, $e_1, \ldots, e_{n-1}$ ориентирован так же, как базис $(-1)^n e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что ориентация $\partial\mathbb{R}^n_+$ выбрана именно так, и в формуле Стокса знак писать не будем. Отметим, что на с. 109 мы пришли к тому же самому соглашению об ориентации края.

Случай 3. M^n — *произвольное ориентированное многообразие.*

Переход от $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n_+$ к произвольным многообразиям делается посредством разбиений единицы. Пусть $\{U_\alpha\}$ — ориентирующий атлас для M^n, в котором все множества U_α диффеоморфны $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_+$; $\{\lambda_\alpha\}$ — подчинённое ему гладкое разбиение единицы. Представим форму $\omega \in \Omega^{n-1}_c(M^n)$ в виде $\omega = \sum \lambda_\alpha\omega$. Теорему Стокса достаточно доказать для каждой отдельной формы $\lambda_\alpha\omega$. Носитель этой формы — замкнутое подмножество компактного множества $\operatorname{supp}\lambda_\alpha \subset U_\alpha$, поэтому он компактен.

Гомотопическая инвариантность когомологий де Рама

Теорема 5.2.3. *Пусть $i_0, i_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ — вложения, заданные формулами $x \mapsto (x, 0)$ и $x \mapsto (x, 1)$. Тогда для всех $k \geqslant 0$ существует линейное отображение $D : \Omega^k(\mathbb{R}^{n+1}) \to \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$, обладающее следующим свойством: $dD + Dd = i_1^* - i_0^*$.*

Доказательство. Для $\varphi \in \Omega^0(\mathbb{R}^{n+1}) = C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ положим $D\varphi = 0$. При $k \geqslant 1$ базисные формы из $\Omega^k(\mathbb{R}^{n+1})$ разбиваются на два типа. А именно, пусть t — координата на прямой $\mathbb{R}$, $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в $\mathbb{R}^n$. Формы, в которые не входит dt, будем обозначать $\alpha = a\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, а формы, в которые входит dt, будем обозначать $\beta = b\,dt \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k-1}}$. Любая форма является суммой форм таких видов, поэтому требуемое утверждение достаточно доказать только для них.

Положим $D\alpha = 0$ и $D\beta = \left(\int_0^1 b\,dt\right) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k-1}}$.

Займёмся теперь проверкой равенства $dD + Dd = i_1^* - i_0^*$ во всех трёх случаях: для функции φ, для формы α и для формы β.

1) $dD\varphi = 0$ и $Dd\varphi = \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt = \varphi(1) - \varphi(0) = (i_1^* - i_0^*)\varphi$.

2) $dD\alpha = 0$ и $Dd\alpha = \left(\int_0^1 \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = (i_1^* - i_0^*)\alpha$.

3) Прежде всего заметим, что $i_0^*\beta = i_1^*\beta = 0$, поскольку ограничение dt на $i_0(\mathbb{R}^n)$ и на $i_1(\mathbb{R}^n)$ тождественно равно нулю (все касательные векторы имеют нулевую t-координату). Далее,

$$dD\beta = \sum_i \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x_i}dt\right) dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k-1}},$$

$$Dd\beta = D\left(\sum_i \frac{\partial b}{\partial x_i} dx_i \wedge dt \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k-1}}\right) =$$

$$= -\sum_i \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x_i}dt\right) dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k-1}}.$$

Поэтому $dD\beta + Dd\beta = 0$. □

Следствие (лемма Пуанкаре). *В $\mathbb{R}^n$ любая замкнутая дифференциальная k-форма ($k > 0$) точна, т.е. $H^k_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой $(x, t) \mapsto tx$. Тогда $Hi_1 = \mathrm{id}$ и $Hi_0 = *$ (отображение в 0). Пусть $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ и $d\omega = 0$. Тогда $\omega = (i_1^* - i_0^*)H^*\omega = dD(H^*\omega) + Dd(H^*\omega)$. Но $Dd(H^*\omega) = DH^*d\omega$, поэтому $\omega = dD(H^*\omega)$, т.е. форма ω точна. □

Теорему 5.2.3 можно доказать и для отображений $i_0, i_1 : M^n \times \mathbb{R} \to M^n$; доказательство не требует никаких существенных изменений. Как следствие, получаем, что гомотопные отображения индуцируют одинаковые отображения когомологий де Рама.

Пример 5.2.5. $H^k_c(\mathbb{R}^n) \cong H^k_{\mathrm{DR}}(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{при } k = n; \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases}$

Доказательство. Используя диффеоморфизм $\mathbb{R}^n \approx S^n \setminus \{x_0\}$, можно построить точную последовательность

$$0 \to \Omega^k_c(\mathbb{R}^n) \to \Omega^k(S^n) \to \Omega^k(S^n)/\Omega^k_c(\mathbb{R}^n) \to 0.$$

Здесь $\Omega^k(S^n)/\Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$ — ростки k-форм в точке x_0. Когомологии ростков k-форм легко вычисляются с помощью леммы Пуанкаре. Действительно, достаточно малую окрестность точки x_0 можно считать расположенной в $\mathbb{R}^n$, поэтому из замкнутости k-формы в малой окрестности x_0 при $k \geqslant 0$ следует её точность.

По короткой точной последовательности форм можно построить точную последовательность когомологий. В результате получим $H_c^k(\mathbb{R}^n) \cong H_{\mathrm{DR}}^k(S^n)$ при $k \geqslant 2$. Кроме того, получаем точную последовательность

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_c^0(\mathbb{R}^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{\mathrm{DR}}^0(S^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{R} \arrow[r] & H_c^1(\mathbb{R}^n) \arrow[r] & H_{\mathrm{DR}}^1(S^n) \arrow[r] & 0 \\ & 0 & \mathbb{R} & & & & \end{tikzcd}$$

Поэтому $H_c^1(\mathbb{R}^n) \cong H_{\mathrm{DR}}^1(S^n)$. В частности, $H_{\mathrm{DR}}^1(S^1) \cong \mathbb{R}$.

Остаётся вычислить когомологии де Рама S^n, $n \geqslant 2$. Представим S^n в виде объединения открытых множеств $U_1 = S^n \setminus \{x_1\}$ и $U_2 = S^n \setminus \{x_2\}$, диффеоморфных $\mathbb{R}^n$. При этом $U_1 \cap U_2 \approx S^{n-1} \times \mathbb{R}$, а значит, $H_{\mathrm{DR}}^k(U_1 \cap U_2) \cong H_{\mathrm{DR}}^k(S^{n-1})$. Поэтому при $k > 0$ последовательность Майера–Вьеториса показывает, что $H_{DR}^k(S^{n-1}) \cong H_{\mathrm{DR}}^{k+1}(S^n)$. При $k = 0$ и $n \geqslant 2$ получаем точную последовательность

$$\begin{tikzcd} H_{\mathrm{DR}}^0(S^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{\mathrm{DR}}^0(\mathbb{R}^n) \oplus H_{\mathrm{DR}}^0(\mathbb{R}^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{\mathrm{DR}}^0(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{\mathrm{DR}}^1(S^n) \arrow[r] & 0 \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \mathbb{R} & & \end{tikzcd}$$

Из точности в члене $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ следует, что в этом члене $\mathrm{Ker} \cong \mathbb{R}$ и $\mathrm{Im} \cong \mathbb{R}$, а значит, ядром отображения $H_{\mathrm{DR}}^0(S^{n-1}) \to H_{\mathrm{DR}}^1(S^n)$ служит $\mathbb{R}$. Поэтому $H_{\mathrm{DR}}^1(S^n) = 0$. □

Любая n-форма $\omega \in \Omega^n(S^n)$ замкнута. Если эта форма ω точна, то она лежит в ядре отображения $\Omega^n(S^n) \to \mathbb{R}$, заданного формулой $\omega \mapsto \int_{S^n} \omega$. Действительно, $\int_{S^n} d\alpha = 0$. Равенство $H_{DR}^n(S^n) = \mathbb{R}$ показывает, что пространство точных n-форм совпадает с ядром этого отображения. Поэтому когомологический класс любой n-формы ω, для которой $\int_{S^n} \omega \neq 0$, является ненулевым элементом группы $H_{DR}^n(S^n) = \mathbb{R}$.

Чтобы получить ненулевой класс когомологий в $H_c^n(\mathbb{R}^n)$, нужно взять форму $\varphi(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, для которой φ — функция с компактным носителем и $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \neq 0$.

5.2.2. Двойственность Пуанкаре для когомологий де Рама

Пусть M^n — компактное ориентированное многообразие, $\alpha^k \in \Omega^k(M^n)$ и $\beta^{n-k} \in \Omega^{n-k}(M^n)$. Тогда $\alpha^k \wedge \beta^{n-k} \in \Omega^n(M^n)$, поэтому можно рассмотреть интеграл $\int_{M^n} \alpha^k \wedge \beta^{n-k}$. В случае, когда многообразие M^n некомпактное, такой интеграл может оказаться расходящимся. Чтобы этого избежать, будем предполагать, что $\beta^{n-k} \in \Omega_c^{n-k}(M^n)$.

Если M^n — многообразие без края, то построенное таким образом отображение $\Omega^k(M^n) \times \Omega_c^{n-k}(M^n) \to \mathbb{R}$ переносится на когомологии де Рама. Действительно, пусть $d\alpha^k = 0$ и $d\beta^{n-k} = 0$. Тогда $d(\omega^{k-1} \wedge \beta^{n-k}) = d\omega^{k-1} \wedge \beta^{n-k}$ и $d(\alpha^k \wedge \omega^{n-k-1}) = \pm\alpha^k \wedge d\omega^{n-k-1}$, поэтому формы $d\omega^{k-1} \wedge \beta^{n-k}$ и $\alpha^k \wedge d\omega^{n-k-1}$ точные. А интеграл точной формы (с компактным носителем) по многообразию без края равен нулю. Это означает, что отображение переносится на фактор замкнутых форм по точным. В результате получаем билинейное отображение $H^k_{\mathrm{DR}}(M^n) \times H_c^{n-k}(M^n) \to \mathbb{R}$, т.е. линейное отображение $D : H^k_{\mathrm{DR}}(M^n) \to \big(H_c^{n-k}(M^n)\big)^*$.

Теорема 5.2.4 (двойственность Пуанкаре). *Для ориентированного многообразия M^n без края отображение $D : H^k_{\mathrm{DR}}(M^n) \to \big(H_c^{n-k}(M^n)\big)^*$ — изоморфизм.*

Доказательство. [Gr2] Сначала проверим, что утверждение верно для $M^n = \mathbb{R}^n$. Группы $H^k(\mathbb{R}^n)$ и $H_c^k(\mathbb{R}^n)$ мы уже вычисляли (лемма Пуанкаре и пример 5.2.5). Отличны от нуля только группы $H^0(\mathbb{R}^n)$ и $H_c^n(\mathbb{R}^n)$, причём обе они изоморфны $\mathbb{R}$. Поэтому достаточно проверить, что отображение $D : H^0_{\mathrm{DR}}(M^n) \to \big(H_c^n(M^n)\big)^*$ ненулевое.

Пусть $1 \in H^0(\mathbb{R}^n)$ — функция на $\mathbb{R}^n$, тождественно равная 1, $\varphi(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ — форма, когомологический класс которой отличен от 0. Тогда

$$\langle D(1), \varphi(x_1, \dots, x_n)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \ldots \wedge x_n \neq 0,$$

а значит, $D(1) \neq 0$.

Утверждение доказано для $M^n = \mathbb{R}^n$, а тем самым и для всех открытых подмножеств произвольного многообразия M^n, диффеоморфных $\mathbb{R}^n$. Чтобы перенести его на все открытые подмножества M^n (а тем самым и на всё M^n), мы применим стандартную технику, основанную на отображении одной последовательности Майера–Вьеториса в другую.

Рассмотрим последовательность Майера–Вьеториса для когомологий с компактными носителями

$$\ldots \leftarrow H_c^{n-k}(M^n) \leftarrow H_c^{n-k}(U_1) \oplus H_c^{n-k}(U_2) \leftarrow \\ \leftarrow H_c^{n-k}(U_1 \cap U_2) \leftarrow H_c^{n-k-1}(M^n) \leftarrow \ldots$$

и дуализируем её, т.е. рассмотрим последовательность двойственных пространств и двойственных отображений. Затем отобразим последовательность Майера–Вьеториса для когомологий де Рама в дуализированную последовательность посредством отображения D:

$$\begin{tikzcd}
\to H^k(M^n) \arrow[r] \arrow[d, "D_{M^n}"] & H^k(U_1)\oplus H^k(U_2) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U_1}\oplus D_{U_1}"] & H^k(U_1\cap U_2) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U_1\cap U_2}"] & H^{k+1}(M^n) \to \arrow[d, "D_{M^n}"] \\
\to H_c^{n-k}(M^n)^* \arrow[r] & H_c^{n-k}(U_1)^*\oplus H_c^{n-k}(U_2)^* \arrow[r] & H_c^{n-k}(U_1\cap U_2)^* \arrow[r] & H_c^{n-k-1}(M^n)^* \to
\end{tikzcd}$$

Покажем, что полученная диаграмма коммутативна с точностью до знака. Коммутативность левого и среднего квадрата, в которых используются только операции ограничения формы и распространения формы, очевидна. Займёмся правым квадратом.

В правом квадрате верхнее отображение устроено следующим образом. Пусть $\alpha^k \in \Omega^k(U_1 \cap U_2)$ и $d\alpha^k = 0$. Представим форму α^k в виде $\alpha^k = \alpha_1^k - \alpha_2^k$, где $\alpha_i^k \in \Omega^k(U_i)$. Форме α^k сопоставляется форма $\alpha^{k+1} \in \Omega^{k+1}(M^n)$, которая равна $d\alpha_i^k$ на U_i. Отображение $H_c^{n-k-1}(M^n) \to H_c^{n-k}(U_1 \cap U_2)$, которому двойственно нижнее отображение квадрата, устроено следующим образом. Пусть $\beta^{n-k-1} \in \Omega_c^{n-k-1}(M^n)$ и $d\beta^{n-k-1} = 0$. Представим форму β^{n-k-1} в виде $\beta^{n-k-1} = \beta_1^{n-k-1} + \beta_2^{n-k-1}$, где $\beta_i^{n-k-1} \in \Omega_c(U_i)$. Форме β^{n-k-1} сопоставляется форма $\beta^{n-k} \in \Omega_c^{n-k}(U_1 \cap U_2)$, которая равна $d\beta_1^{n-k-1} = -d\beta_2^{n-k-1}$ (здесь подразумевается равенство на $U_1 \cap U_2$). Требуется доказать, что $\int_{U_1\cap U_2} \alpha^k \wedge \beta^{n-k} = \pm \int_{M^n} \alpha^{k+1} \wedge \beta^{n-k-1}$. Ясно, что

$$\int_{M^n} \alpha^{k+1} \wedge \beta^{n-k-1} = \int_{U_1} \alpha^{k+1} \wedge \beta_1^{n-k-1} + \int_{U_2} \alpha^{k+1} \wedge \beta_2^{n-k-1} = \\ = \int_{U_1} d\alpha_1^k \wedge \beta_1^{n-k-1} + \int_{U_2} d\alpha_2^k \wedge \beta_2^{n-k-1}.$$

Форма $\alpha_i^k \wedge \beta_i^{n-k-1}$ имеет компактный носитель в U_i, поэтому $\int_{U_i} d(\alpha_i^k \wedge \beta_i^{n-k-1}) = 0$. Значит,

$$(-1)^{k+1} \int_{M^n} \alpha^{k+1} \wedge \beta^{n-k-1} = \int_{U_1} \alpha_1^k \wedge d\beta_1^{n-k-1} + \int_{U_2} \alpha_2^k \wedge d\beta_2^{n-k-1}.$$

Носитель формы $d\beta_1^{n-k-1} = -d\beta_2^{n-k-1}$ лежит в пересечении носителей форм β_1^{n-k-1} и β_2^{n-k-1}, поэтому он лежит в $U_1 \cap U_2$. Значит, эту форму можно рассматривать как распространение формы β^{n-k}. Поэтому

$$(-1)^{k+1}\int_{M^n} \alpha^{k+1}\wedge\beta^{n-k-1} = \int_{U_1\cap U_2} \alpha_1^k\wedge\beta^{n-k} - \int_{U_1\cap U_2} \alpha_2^k\wedge\beta^{n-k} =$$
$$= \int_{U_1\cap U_2} (\alpha_1^k - \alpha_2^k)\wedge\beta^{n-k} = \int_{U_1\cap U_2} \alpha^k\wedge\beta^{n-k},$$

что и требовалось.

Теперь из 5-леммы следует, что если теорема двойственности Пуанкаре верна для многообразий U_1, U_2 и $U_1 \cap U_2$, то она верна и для многообразия $U_1 \cup U_2 = M^n$.

Следующий (и важнейший) шаг — доказательство теоремы двойственности Пуанкаре для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $\mathcal{U}$ — база топологии пространства $\mathbb{R}^n$, состоящая из открытых прямоугольников, заданных неравенствами $a_i < x_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Эта база обладает двумя важными для наших целей свойствами: (1) для любого множества из $\mathcal{U}$ верна теорема двойственности Пуанкаре; (2) пересечение любых двух множеств из $\mathcal{U}$ снова лежит в $\mathcal{U}$.

Лемма 5.2.1. *Пусть $\mathcal{U}$ — база топологии многообразия M^n, для которой выполняются свойства (1) и (2). Тогда для любого конечного объединения множеств из $\mathcal{U}$ верна теорема двойственности Пуанкаре.*

Доказательство. Пусть $U_1, \ldots, U_k$ — множества из $\mathcal{U}$. Докажем индукцией по k, что теорема двойственности Пуанкаре верна для $U_1 \cup \ldots \cup U_k$. При $k = 1$ это верно согласно свойству (1). При $k > 1$ представим рассматриваемое множество в виде $U' \cup U_k$, где $U' = U_1 \cup \ldots \cup U_{k-1}$. Для множеств U' и U_k теорема двойственности Пуанкаре верна по предположению индукции, поэтому остаётся проверить, что она верна для множества $U' \cap U_k = (U_1 \cap U_k) \cup \ldots \cup (U_{k-1} \cap U_k)$. Согласно свойству (2) теорема двойственности Пуанкаре верна для каждого множества $U_i \cap U_k$, поэтому она верна и для $U' \cap U_k$. $\square$

Лемма 5.2.2. *Пусть $\mathcal{U}$ — база топологии многообразия M^n, для которой выполняется свойство (1). Тогда для любого (не обязательно конечного!) объединения* попарно не пересекающихся *множеств из $\mathcal{U}$ верна теорема двойственности Пуанкаре.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{U}$, причём $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ для любых $\alpha, \beta \in A$. Тогда естественные вложения $\Omega^k(\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha) \to \prod_{\alpha\in A} \Omega^k(U_\alpha)$ и

$\bigoplus_{\alpha\in A}\Omega_c^{n-k}(U_\alpha)\to\Omega_c^{n-k}(\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha)$ являются изоморфизмами. Во втором случае берётся прямая сумма, а не прямое произведение, потому что форма с компактным носителем может быть отличной от нуля лишь на конечном числе множеств U_α. После дуализации второго отображения получаем изоморфизм $\Omega_c^{n-k}(\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha)^*\to\prod_{\alpha\in A}\Omega_c^{n-k}(U_\alpha)^*$. Здесь уже стоит прямое произведение. Ситуация в точности такая, как для цепей и коцепей: в каждую цепь входит конечное число симплексов, но коцепь может принимать ненулевое значение на любом множестве симплексов.

Переходя от форм к когомологиям, получаем изоморфизмы когомологий, которые включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} H^k_{\mathrm{DR}}\left(\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha\right) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "D"] & \prod_{\alpha\in A}H^k_{\mathrm{DR}}(U_\alpha) \arrow[d, "\prod_{\alpha\in A}D_\alpha", "\cong"'] \\ H_c^{n-k}\left(\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha\right)^* \arrow[r, "\cong"] & \prod_{\alpha\in A}H_c^{n-k}(U_\alpha). \end{tikzcd}$$

Значит, D — изоморфизм. □

Пусть $U\subset\mathbb{R}^n$ — произвольное открытое множество. Его можно представить в виде $U=\bigcup_{i=1}^\infty V_i$, где $\bar V_i\subset U$; в качестве множеств V_i можно взять открытые шары рационального радиуса с рациональными центрами. Положим $K_1=\bar V_1$. Граница множества K_1 — компактное подмножество U, поэтому её можно покрыть конечным набором множеств $V_{i_1},\ldots,V_{i_m}$. Положим $K_2=\bar V_2\cup\bar V_{i_1}\cup\ldots\cup\bar V_{i_m}$. Аналогично построим K_3 и т.д. По построению $\bigcup_{i=1}^\infty K_i=U$ и $K_i\subset\operatorname{int}K_{i+1}$. Из условия $K_i\subset\operatorname{int}K_{i+1}$ следует, что существует компактное множество L_i, для которого $K_i\subset\operatorname{int}L_i\subset L_i\subset\operatorname{int}K_{i+1}$ (рис. 5.3).

Покроем множество $\overline{K_i\setminus K_{i-1}}$ множествами базы $\mathcal{U}$, целиком лежащими в $\operatorname{int}(L_i\setminus L_{i-1})$. Из компактности множества $\overline{K_i\setminus K_{i-1}}$ следует, что из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Пусть U_i — объединение всех множеств, входящих в это подпокрытие. Согласно лемме 5.2.1 для множества U_i верна теорема двойственности Пуанкаре. Кроме того, по построению $\bigcup_{i=1}^\infty U_i=U$ и $U_i\cap U_j=\varnothing$ при $|i-j|>1$. Пусть $W_1=\bigcup_{i=0}^\infty U_{2i+1}$ и $W_2=\bigcup_{i=1}^\infty U_{2i}$. Согласно лемме 5.2.2 теорема двойственности Пуанкаре верна для множеств W_1 и W_2. Кроме того, $U=W_1\cup W_2$. Поэтому остаётся проверить, что теорема двойственности Пуанкаре верна для $W_1\cap W_2$. Множество $W_1\cap W_2$ представляет собой объединение попарно не пересекающихся множеств $U_i\cap U_{i+1}$, $i=1,2,\ldots$ Каждое из этих множеств является объединением конечного числа множеств из $\mathcal{U}$. Поэтому согласно лемме 5.2.1 для множества

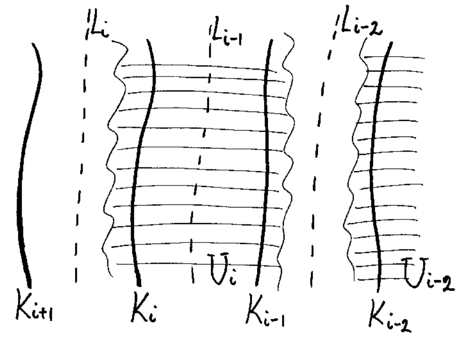

Рис. 5.3. Множества K_i и L_i

$U_i \cap U_{i+1}$ верна теорема двойственности Пуанкаре, а значит, согласно лемме 5.2.2 она верна и для $W_1 \cap W_2$.

Для произвольного многообразия M^n доказательство теоремы двойственности Пуанкаре теперь можно провести примерно по той же схеме, что и для открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$. Единственное существенное отличие состоит в выборе базы топологии $\mathcal{U}$. В качестве $\mathcal{U}$ возьмём набор открытых множеств, гомеоморфных $\mathbb{R}^n$ и покрывающих M^n, и всех их конечных пересечений. Для этой базы свойство (2) выполняется по определению, а свойство (1) выполняется потому, что любое множество из $\mathcal{U}$ можно рассматривать как открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, а для таких множеств теорему двойственности Пуанкаре мы уже доказали. Кроме того, вместо шаров рационального радиуса с рациональными центрами нужно взять подходящую счётную базу топологии пространства M^n. В остальном доказательство проходит без изменений. $\square$

5.3. Теорема де Рама

Теорема де Рама [Rh] утверждает, что для замкнутого многообразия M^n когомологии де Рама $H^*_{\mathrm{DR}}(M^n)$ изоморфны симплициальным (или сингулярным) когомологиям $H^*(M^n; \mathbb{R})$. Здесь имеется в виду изоморфизм алгебр, т.е. $\smile$-умножение коцепей соответствует $\wedge$-умножению форм. Сейчас известно много разных доказательств теоремы де Рама, но все они не очень простые. Мы приведём доказательство, которое восходит к Уитни [Уи] (см. также [Si]). По поводу других

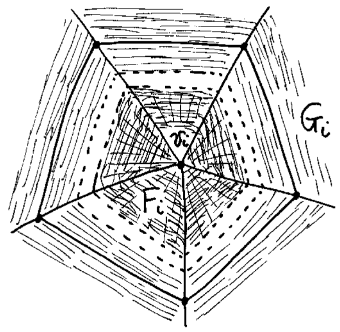

Рис. 5.4. Множества F_i и G_i

доказательств теоремы де Рама см. [Хи], [Уэ], [We2], [Sa2] и [Cu]. Кроме того, мы докажем аналог теоремы де Рама для симплициальных комплексов.

5.3.1. Доказательство теоремы де Рама

Триангуляцию $f : |K| \to M^n$ называют *гладкой*, если для любого n-мерного симплекса Δ^n комплекса K существует открытое множество $U \supset \Delta^n$ в $\mathbb{R}^n$ и существует продолжение отображения $f|_{\Delta^n}$ на U, которое является (гладким) вложением многообразия U в M^n. Мы будем предполагать, что фиксирована гладкая триангуляция M^n. (В части I доказано существование именно гладкой триангуляции многообразия.) Пусть $C^k(M^n) = C^k(K; \mathbb{R})$. Зададим отображение $\rho : \Omega^k(M^n) \to C^k(M^n)$ формулой $\langle \rho(\omega^k), \Delta^n \rangle = \int_{\Delta^k} \omega^k$. Теорема Стокса показывает, что $\rho d\omega = (\delta\rho)\omega$, поэтому отображение ρ индуцирует гомоморфизм линейных пространств $\rho^* : H_{\mathrm{DR}}(M^n) \to H^k(M^n; \mathbb{R})$.

Шаг 1. ρ^* — *эпиморфизм.*

Покажем, что эпиморфность имеет место уже на уровне коцепей, т.е. каждой коцепи $c^k \in C^k(M^n)$ можно сопоставить форму $\omega^k \in \Omega^k(M^n)$, для которой $\rho(\omega^k) = c^k$. Для построения формы по коцепи нам понадобится специальное разбиение единицы, подчинённое покрытию $\{\operatorname{st} v_i\}$, где $v_1, \ldots, v_r$ — вершины комплекса K. А именно, пусть x_i — барицентрическая координата, соответствующая вершине v_i (предполагается, что $x_i = 0$ для любой точки, лежащей вне симплексов с вершиной v_i). Пусть F_i — множество всех точек, для которых $x_i \geqslant \frac{1}{n+1}$, а G_i — множество всех точек, для которых $x_i \leqslant \frac{1}{n+2}$ (рис. 5.4). Пусть λ_i — неотрицательная гладкая функция, которая положительна на F_i и обращается в нуль на G_i. Множества F_i покрывают M^n. Действительно, сумма $n+1$ барицентрических координат любой точки $x \in M^n$ равна 1, поэтому одна из них не меньше $\frac{1}{n+1}$. Таким образом, функция $\lambda(x) = \lambda_1(x) + \ldots + \lambda_n(x)$ положительна. Поэтому функции $\{\mu_i\}$, где $\mu_i(x) = \lambda_i(x)/\lambda(x)$, образуют гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию $\{M^n \setminus G_i\}$.

Пусть $\Delta_s^k = [v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$ и c_s^k — коцепь, двойственная симплексу Δ_s^k, т.е. $\langle c_s^k, \Delta_r^k \rangle = \delta_{sr}$. Сопоставим коцепи c_s^k форму

$$\varphi_{i_0 \ldots i_k} = k! \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \mu_{i_j} d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k}.$$

В результате получим линейное отображение $\varphi : C^k(M^n) \to \Omega^k(M^n)$ (линейное отображение достаточно задать на базисе). Докажем последовательно свойства этого отображение, которые позволят сделать вывод, что ρ^* — эпиморфизм.

Свойство 1. $d\varphi(c_s^k) = \varphi(\delta c_s^k)$.

Ясно, что $d\varphi(c_s^k) = (k+1)! d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k}$. Вычислим теперь $\varphi(\delta c_s^k)$. Коцепь δc_s^k представляет собой сумму коцепей, двойственных симплексам вида $[v_p, v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$. Поэтому коцепь $\frac{1}{(k+1)!}\varphi(\delta c_s^k)$ равна

$$\sum{}' \left(\mu_p d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k} - \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \mu_{i_j} d\mu_p \wedge d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k} \right),$$

где $\sum'$ означает суммирование по всем $(k+1)$-мерным симплексам $[v_p, v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$. Заметим, что если $p \notin \{i_0, \ldots, i_k\}$, но на вершины v_p, v_{i_0}, $\ldots$, v_{i_k} не натянут симплекс, то $\mu_p d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k} = 0$. Действительно, если $x \notin \operatorname{st} v_p$, то $\mu_p(x) = 0$. Если же $x \in \operatorname{st} v_p$, то $x_p \neq 0$. Но тогда $x_{i_j} = 0$ для некоторого j (иначе $x_p \neq 0$, $x_{i_0} \neq 0$, $\ldots$, $x_{i_k} \neq 0$, поэтому точка x лежит внутри симплекса $[v_p, v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$). Рассмотрим открытое множество U, состоящее из точек $y \in M^n$, для которых $y_{i_j} < \frac{1}{n+2}$. Точка x принадлежит множеству U и μ_{i_j} обращается в нуль на U, поскольку $U \subset G_{i_j}$. Следовательно, $d\mu_{i_j} = 0$. Таким образом,

$$\sum{}' \mu_p d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k} = \sum_{p \notin \{i_0, \ldots, i_k\}} \mu_p d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k}.$$

Воспользовавшись этим свойством и тем, что $\sum \mu_i(x) = 1$ (а значит,

$\sum d\mu_i = 0$), получим

$$\begin{aligned}
&\sum{}' \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \mu_{i_j} d\mu_p \wedge d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k} = \\
&\quad = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sum{}' \mu_{i_j} d\mu_p \wedge d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k} = \\
&\quad = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sum_{p \notin \{i_0, \ldots, i_k\}} \mu_{i_j} d\mu_p \wedge d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k} = \\
&\quad = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sum_{p \neq i_j} \mu_{i_j} d\mu_p \wedge d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k} = \\
&\quad = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \mu_{i_j} \left(\sum_{p \neq i_j} d\mu_p \right) d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k} = \\
&\quad = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \mu_{i_j} \left(-d\mu_{i_j} \right) d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k} = \\
&\quad = -\sum_{j=0}^{k} \mu_{i_j} d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k}.
\end{aligned}$$

В результате получаем, что

$$\begin{aligned}
\varphi(\delta c_s^k) &= (k+1)! \sum_p \mu_p d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k} = \\
&= (k+1)! d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k} = d\varphi(c_s^k).
\end{aligned}$$

Свойство 2. Если $\langle c^0, v_i \rangle = 1$ для каждой вершины v_i, то $\varphi(c^0) = 1$ (функция, тождественно равная 1).

Ясно, что $c^0 = \sum_i c_i^0$, где c_i^0 — коцепь, двойственная симплексу $[v_i]$. Поэтому $\varphi(c^0) = \sum_i \mu_i = 1$.

Свойство 3. Если c_s^k — коцепь, двойственная симплексу $\Delta_s^k = [v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$, то форма $\varphi(c_s^k)$ тождественно равна нулю в окрестности множества $M^n \setminus \operatorname{st} \Delta_s^k$.

По определению

$$\varphi(c_s^k) = k! \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \mu_{i_j} d\mu_{i_0} \wedge \ldots \wedge \widehat{d\mu_{i_j}} \wedge \ldots \wedge d\mu_{i_k}.$$

Функция μ_i и форма $d\mu_i$ тождественно равны нулю на множестве G_i, поэтому форма $\varphi(c_s^k)$ тождественно равна нулю на множестве $G_{i_0} \cup \ldots \cup G_{i_k}$. Это множество содержит окрестность множества $M^n \setminus \operatorname{st} \Delta_s^k$.

Свойство 4. $\rho \circ \varphi = \mathrm{id}$.

Применим индукцию по k. Сначала рассмотрим случай $k = 0$. Пусть коцепь c_i^0 двойственна симплексу $[v_i]$. Тогда $\varphi(c_i^0) = \mu_i$ и $\langle \rho\varphi(c_i^0), [v_j] \rangle = \int_{[v_j]} \mu_i = \mu_i(v_j)$. Если $i \neq j$, то $v_j \notin \operatorname{st} v_i$, а вне $\operatorname{st} v_i$ функция μ_i равна нулю. Кроме того, $\mu_i(v_i) = \sum_j \mu_i(v_j) = 1$. Поэтому коцепь $\rho\varphi(c_i^0)$ двойственна симплексу $[v_i]$, т.е. $\rho\varphi(c_i^0) = c_i^0$.

Предположим теперь, что $k \geqslant 1$ и свойство 4 доказано для всех коцепей размерности $k - 1$. Пусть c_s^k — коцепь, двойственная симплексу $\Delta_s^k = [v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$. Согласно свойству 3 форма $\varphi(c_s^k)$ обращается в нуль вне $\operatorname{st} \Delta_s^k$, поэтому она тождественно равна нулю на любом k-мерном симплексе, отличном от Δ_s^k. Остаётся проверить, что $\langle \rho\varphi(c_s^k), \Delta_s^k \rangle = 1$. Пусть $c_{s,j}^{k-1}$ — коцепь, двойственная симплексу $\Delta_{s,j}^{k-1} = [v_{i_0}, \ldots, \widehat{v_{i_j}}, \ldots, v_{i_k}]$. Тогда $\delta c_{s,0}^{k-1} = c_s^k + c_t^k + \ldots + c_\tau^k$, где $c_t^k, \ldots, c_\tau^k$ — коцепи, двойственные симплексам, границей которых служит симплекс $\delta c_{s,0}^{k-1}$ (и которые отличны от Δ_s^k). Но мы только что доказали, что $\langle \rho\varphi(c_t^k), \Delta_s^k \rangle = 0$ при $t \neq s$. Значит, $\langle \rho\varphi(\delta c_{s,0}^{k-1}), \Delta_s^k \rangle = \langle \rho\varphi(c_s^k), \Delta_s^k \rangle$. С другой стороны, воспользовавшись свойством 1 и формулой Стокса, получим

$$\langle \rho\varphi(\delta c_{s,0}^{k-1}), \Delta_s^k \rangle = \langle d\rho\varphi(c_{s,0}^{k-1}), \Delta_s^k \rangle = \\ = \int_{\partial \Delta_s^k} \rho\varphi(c_{s,0}^{k-1}) = \sum_j \int_{\Delta_{s,j}^{k-1}} \rho\varphi(c_{s,j}^{k-1}) = \int_{\Delta_{s,0}^{k-1}} \rho\varphi(c_{s,0}^{k-1}) = 1$$

(в самом конце мы воспользовались свойством 4 для коцепей коразмерности $k - 1$).

Этим доказательство эпиморфности отображения ρ^* завершено. Действительно, из свойства 1 следует, что α индуцирует гомоморфизм $\varphi^* : H^k(M^n; \mathbb{R}) \to H_{\mathrm{DR}}^k(M^n)$, а из свойства 4 следует, что $\rho^* \circ \varphi^* = \mathrm{id}$. Поэтому ρ^* — эпиморфизм.

Шаг 2. ρ^* — *мономорфизм.*

Пусть Δ^m — симплекс в $\mathbb{R}^n$, $m \geqslant 1$. Докажем следующие утверждения.

(A_k), $k \geqslant 0$. Пусть ω^k — замкнутая форма, определённая в окрестности $\partial \Delta^m$. Если $m = k + 1$, то дополнительно предполагается, что

$\int_{\partial\Delta^m}\omega^k = 0$. Тогда существует замкнутая форма α^k, определённая в окрестности Δ^m, для которой $\alpha^k = \omega^k$ в окрестности $\partial\Delta^m$.

(B_k), $k \geqslant 1$. Пусть ω^k — замкнутая форма, определённая в окрестности Δ^m, α^{k-1} — форма, определённая в окрестности $\partial\Delta^m$. Предположим, что в окрестности $\partial\Delta^m$ выполняется равенство $\omega^k = d\alpha^{k-1}$. Если $m = k$, то дополнительно предполагается, что $\int_{\partial\Delta^k}\alpha^{k-1} = \int_{\Delta^k}\omega^k$. Тогда существует форма $\beta^{k-1} = \alpha^{k-1}$, определённая в окрестности $\partial\Delta^m$, для которой $\beta^{k-1} = \alpha^{k-1}$ в окрестности $\partial\Delta^m$ и $d\beta^{k-1} = \omega^k$ в окрестности Δ^m.

Оба дополнительных предположения связаны с тем, что должна выполняться теорема Стокса.

Схема доказательства будет такая. Сначала мы докажем (A_0), а затем докажем, что $(A_{k-1}) \Longrightarrow (B_k)$ и $(B_k) \Longrightarrow (A_k)$.

(A_0) Замкнутость 0-формы (функции) ω^0 означает, что она постоянна на каждой связной компоненте. Если $m \geqslant 2$, то множество $\partial\Delta^m$ связно; окрестность этого множества тоже можно считать связной. В этом случае форма ω^0 равна константе c, и мы полагаем $\alpha^0 = c$. Если $m = 1$, то множество $\partial\Delta^m$ несвязно, но в этом случае $m = k + 1$, поэтому должно выполняться условие $\int_{\partial\Delta^1}\omega^0 = 0$. Пусть $\Delta^1 = [v_0, v_1]$. Тогда это условие имеет вид $\omega^0(v_1) = \omega^0(v_0)$, поэтому на обеих компонентах связности форма ω^0 принимает одно и то же значение c, и мы снова полагаем $\alpha^0 = c$.

$(A_{k-1}) \Longrightarrow (B_k)$ Пусть ω^k — замкнутая форма, определённая в окрестности Δ^m. Согласно лемме Пуанкаре $\omega^k = d\beta_1^{k-1}$ для некоторой формы β_1^{k-1} (мы предполагаем, что окрестность Δ^m диффеоморфна открытому n-мерному шару). Рассмотрим в окрестности $\partial\Delta^m$ форму $\gamma^{k-1} = \alpha^{k-1} - \beta_1^{k-1}$. Тогда $d\gamma^{k-1} = \omega^k - \omega^k = 0$. Более того, если $m = k$, то $\int_{\partial\Delta^k}\gamma^{k-1} = \int_{\partial\Delta^k}\alpha^{k-1} - \int_{\partial\Delta^k}\beta_1^{k-1} = \int_{\Delta^k}d\omega^k - \int_{\Delta^k}d\beta_1^{k-1} = 0$. Поэтому к форме γ^{k-1} можно применить (A_{k-1}). В результате получим, что существует замкнутая форма γ_1^{k-1}, которая определена в окрестности Δ^m, причём $\gamma_1^{k-1} = \gamma^{k-1} = \alpha^{k-1} = \beta_1^{k-1}$ в окрестности $\partial\Delta^m$. Форма $\beta^{k-1} = \beta_1^{k-1} + \gamma_1^{k-1}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

$(B_k) \Longrightarrow (A_k)$ Пусть ω^k — замкнутая форма, определённая в окрестности $\partial\Delta^m$, где $\Delta^m = [v_0, \ldots, v_m]$. Рассмотрим множество $(\partial\Delta^m) \setminus [v_1, \ldots, v_m]$, гомеоморфное открытому $(m-1)$-мерному шару. Можно считать, что окрестность этого множества гомеоморфна открытому n-мерному шару. В таком случае можно применить лемму Пуанкаре и получить форму β^{k-1}, определённую на этой окрестности и удовлетворяющую равенству $d\beta^{k-1} = \omega^k$. В частности, $d\beta^{k-1} = \omega^k$ в окрестности $\partial\Delta^{m-1}$, где $\Delta^{m-1} = [v_1, \ldots, v_m]$. При $m > 1$ можно применить (B_k) к формам ω^k и β^{k-1} и симплексу Δ^{m-1}. Нужно лишь проверить, что при $m-1=k$ выполняется равенство $\int_{\Delta^{m-1}} \omega^k = \int_{\partial\Delta^{m-1}} \beta^{k-1}$. Положим $c = \partial\Delta^m - \Delta^{m-1}$. Тогда $\partial c = -\partial\Delta^{m-1}$ и любой симплекс цепи c содержится в окрестности, на которой определена форма β^{k-1}. Поэтому $\int_{\Delta^{m-1}} \omega^k - \int_{\partial\Delta^{m-1}} \beta^{k-1} = \int_{\Delta^{m-1}} \omega^k + \int_{\partial c} \beta^{k-1} = \int_{\Delta^{m-1}} \omega^k + \int_c \omega^k = \int_{\partial\Delta^m} \omega^k = 0$. Применив (B_{k-1}), получим форму β_1^{k-1}, которая определена в окрестности Δ^{m-1}, причём $\beta_1^{k-1} = \beta^{k-1}$ в окрестности $\partial\Delta^{m-1}$. Формы β_1^{k-1} и β^{k-1} совпадают там, где они обе определены, поэтому из них можно склеить форму α_1^{k-1}, которая определена в окрестности $\partial\Delta^{m-1}$ и удовлетворяет равенству $d\alpha_1^{k-1} = \omega_k$. Чтобы продолжить её до формы α^{k-1}, определённой в окрестности Δ^m, рассмотрим функцию λ, которая равна 1 в малой окрестности $\partial\Delta^m$ и равна 0 вне чуть большей окрестности $\partial\Delta^m$. Форма $\alpha^{k-1} = \lambda\alpha_1^{k-1}$ обладает всеми требуемыми свойствами. Остаётся рассмотреть отдельно случай $m=1$. В этом случае форма ω^k определена в окрестностях вершин v_0 и v_1; эти окрестности можно считать непересекающимися (и гомеоморфными открытому n-мерному шару). Согласно лемме Пуанкаре существует форма α_1^{k-1}, которая определена в этих окрестностях и удовлетворяет равенству $d\alpha_1^{k-1} = \omega^k$. Форма α^{k-1}, определённая в окрестности отрезка $[v_0, v_1]$, строится по форме α_1^{k-1} точно так же, как и раньше.

Мономорфность отображения ρ^* вытекает из следующей леммы, которую мы докажем, используя утверждения (B_k).

Лемма. *Пусть ω^k — замкнутая форма на M^n, причём $\rho(\omega^k) = \delta c^{k-1}$ для некоторой коцепи $c^{k-1} \in C^{k-1}(M^n; \mathbb{R})$. Тогда существует форма α^{k-1} на M^n, для которой $d\alpha^{k-1} = \omega^k$ и $\rho(\alpha^{k-1}) = c^{k-1}$.*

Доказательство. Напомним, что мы фиксировали триангуляцию $f\colon |K| \to M^n$. Форму α^{k-1} мы будем строить индукцией по размерности остова K. А именно, мы будем строить последовательность форм $\alpha_0^{k-1}, \ldots, \alpha_n^{k-1}$ так, что:

1) форма α_m^{k-1} определена в окрестности m-мерного остова K, причём там, где эта форма определена, выполняется равенство $d\alpha_m^{k-1} = \omega^k$;

2) форма α_{m+1}^{k-1} совпадает с α_m^{k-1} в окрестности m-мерного остова;

3) $\rho(\alpha_{m-1}^{k-1}) = c^{k-1}$.

Последнее равенство нужно понимать так. Отображение ρ мы определяем только для форм, заданных на всём K, но в действительности мы пользовались лишь ограничением k-формы на k-мерный остов. Поэтому можно считать, что отображение ρ определено для форм α_m^{k-1}, где $m \geqslant k-1$; при этом $\rho(\alpha_{m-1}^{k-1}) = \rho(\alpha_n^{k-1})$, т.е. в качестве α^{k-1} можно взять форму α_n^{k-1}.

Форма α_0^{k-1} строится следующим образом. Покроем вершины v_1, $\dots$, v_r комплекса K непересекающимися окрестностями. В каждой из этих окрестностей можно применить лемму Пуанкаре и построить форму, дифференциал которой равен ω^k. Если $k \geqslant 1$, то требуемая форма построена. При $k = 1$ нужно ещё, чтобы выполнялось равенство $\rho(\alpha_0^0) = c^0$, т.е. $\alpha_0^0(v_i) = \langle c^0, v_i \rangle$. Этого легко добиться, поскольку в окрестности каждой точки v_i к функции α_0^0 можно прибавить произвольную константу C_i.

Форму α_m^{k-1} по форме α_{m-1}^{k-1} можно строить отдельно для каждого симплекса Δ^m. Действительно, общая область определения построенных таким образом форм содержится в окрестности $(m-1)$-мерного остова, а там эти формы совпадают с α_{m-1}^{k-1}. Построение формы α_m^{k-1} основано на утверждении (B_k), которое применяется к формам ω_k и α_{m-1}^{k-1}. Чтобы применить утверждение (B_k), нужно проверить, что если $k = m$, то $\int_{\partial\Delta^k} \alpha_{m-1}^{k-1} = \int_{\Delta^k} \omega^k$. Но $\int_{\Delta^k} \omega^k = \rho(\omega^k) = \langle \delta c^{k-1}, \Delta^k \rangle = \langle c^{k-1}, \partial\Delta^k \rangle = \langle \rho(\alpha_{k-1}^{k-1}), \partial\Delta^k \rangle = \int_{\partial\Delta^k} \alpha_{m-1}^{k-1}$. Если $m = k-1$, то нужно ещё, чтобы выполнялось равенство $\int_{\Delta^{k-1}} \alpha_{k-1}^{k-1} = \langle c^{k-1}, \Delta^{k-1} \rangle$. Попытаемся добиться этого, добавив к построенной форме замкнутую форму β^{k-1}, которая определена в окрестности $(k-1)$-мерного остова, обращается в нуль в окрестности $(k-2)$-мерного остова и $\int_{\Delta^{k-1}} \beta^{k-1}$ имеет заданное значение для каждого симплекса Δ^{k-1}, т.е. $\rho(\beta^{k-1})$ — заданная коцепь d^{k-1}. Покажем, что форма $\beta^{k-1} = \varphi(d^{k-1})$, где $\varphi : C^k(M^n) \to \Omega^k(M^n)$ — отображение, определённое на с. 324, обладает требуемыми свойствами. Напомним, что согласно свойству 3 форма $\varphi(c_s^k)$ тождественно равна нулю в окрестности множества $M^n \setminus \operatorname{st}\Delta_s^k$. В частности, она равна нулю в окрестности $(k-1)$-мерного остова. Следовательно, форма β^{k-1} обращается в нуль в окрестности $(k-2)$-мерного остова, а форма $d\beta^{k-1} = \varphi(\delta d^{k-1})$ обращается в нуль в окрестности $(k-1)$-мерного остова. □

Наконец, проверим, что при изоморфизме де Рама $\wedge$-умножение форм переходит в $\smile$-умножение когомологических классов. Пусть формам ω_1^p и ω_2^q соответствуют когомологические классы α^p и β^q. Рассмотрим на многообразии $M^n \times M^n$ форму $(p_1^*\omega_1^p) \wedge (p_2^*\omega_2^q)$, где $p_1, p_2 : M^n \times M^n \to M^n$ — естественные проекции на первый и второй множитель. Из теоремы Фубини следует, что эта форма соответствует когомологическому классу $\alpha^p \otimes \beta^q$, поскольку

$$\int_{\Delta_1^p \times \Delta_2^q} (p_1^* \omega_1^p) \wedge (p_2^* \omega_2^q) = \delta_{pr} \delta_{qs} \left(\int_{\Delta_1^r} \omega_1^p \right) \left(\int_{\Delta_2^q} \omega_2^q \right).$$

Пусть $d : M^n \to M^n \times M^n$ — диагональное отображение. Тогда $d^*(\alpha^p \otimes \beta^q) = \alpha^p \smile \beta^q$ и $d^*\big((p_1^* \omega_1^p) \wedge (p_2^* \omega_2^q)\big) = \omega_1^p \wedge \omega_2^q$.

5.3.2. Симплициальная теорема де Рама

Дифференциальные формы можно рассматривать не только на гладких многообразиях, но и на симплициальных комплексах. Идея построения таких форм восходит к Уитни [Уи] и Тому [Th2]. Но наиболее важную роль в развитии этой теории сыграла работа Сулливана [Su], в которой он применил кусочно-полиномиальные дифференциальные формы для решения некоторых задач гомотопической топологии. Кроме того, Сулливан построил теорию над полем $\mathbb{Q}$ (и вообще над любым полем нулевой характеристики), а не только над полем $\mathbb{R}$.

Пусть $x_0, \ldots, x_n$ — барицентрические координаты на симплексе Δ^n; предполагается, что $\sum x_i = 1$. Будем называть *полиномиальной* k-формой на Δ^n выражение вида

$$\sum P_{i_1,\ldots,i_k}(x_0, \ldots, x_n) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

где $P_{i_1,\ldots,i_k}$ — многочлен с рациональными коэффициентами. Можно также рассматривать и многочлены с вещественными коэффициентами. Здесь снова предполагается, что $\sum x_i = 1$ и, соответственно, $\sum dx_i = 0$.

Помимо полиномиальных дифференциальных форм можно рассматривать *гладкие* дифференциальные k-формы на симплексе Δ^n. Они имеют вид

$$\sum f_{i_1,\ldots,i_k}(x_0, \ldots, x_n) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

где $f_{i_1,\ldots,i_k}$ — гладкая функция на открытом множестве в $\mathbb{R}^n$, содержащем Δ^n.

Полиномиальная дифференциальная форма на симплициальном комплексе K получается склейкой полиномиальных дифференциальных форм на симплексах K. Эти формы должны быть согласованы в следующем смысле: если симплексы Δ_1 и Δ_2 имеют общую грань Δ_{12} и на этих симплексах заданы формы ω_1 и ω_2, то ограничения форм ω_1 и ω_2 на Δ_{12} должны совпадать. Ограничение формы на грань $x_i = 0$ производится следующим образом: нужно положить $x_i = 0$ и $dx_i = 0$.

Гладкие дифференциальные формы на симплициальном комплексе K определяются аналогично. Обратите внимание, что гладкие формы на триангуляции многообразия — это совсем не то же самое, что гладкие формы на многообразии. Например, гладкие функции (0-формы) на триангуляции окружности — это кусочно гладкие функции.

Пространства полиномиальных и гладких k-форм на симплициальном комплексе K мы будем обозначать $A^k(K)$ и $A^k_{C^\infty}(K)$ соответственно.

На пространствах $A^k(K)$ и $A^k_{C^\infty}(K)$ определён оператор d; определено также внешнее произведение форм. Для полиномиальных форм над $\mathbb{Q}$ существенно, что $d(P_{i_1,\ldots,i_k}dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})$ выражается через частные производные многочлена $P_{i_1,\ldots,i_k}$, которые тоже являются многочленами с рациональными коэффициентами.

Докажем теперь некоторые свойства полиномиальных форм, аналогичные свойствам дифференциальных форм на многообразиях.

Лемма 1. *Пусть K — конечный симплициальный комплекс, CK — конус над K. Предположим, что форма $\omega^k \in A(CK)$ замкнута, $k \geqslant 1$. Тогда $\omega^k = d\alpha^{k-1}$ для некоторой формы $\alpha^{k-1} \in A^{k-1}(CK)$.*

Доказательство. Представим точку конуса CK в виде $\lambda x + (1-\lambda)a$, где $x \in K$, a — вершина конуса и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Зададим отображение $\mu : CK \times I \to CK$ формулой

$$\mu(\lambda x + (1-\lambda)a) = \lambda(1-t)x + \big(\lambda + t(1-\lambda)\big)a.$$

Для формы ω^k на CK можно рассмотреть форму $\mu^*(\omega^k)$ на $CK \times I$. Пусть Δ — некоторый симплекс K. Ограничение формы $\mu^*(\omega^k)$ на $CK \times I$ можно представить в виде $\sum_{p\geqslant 0}(t^p\alpha_p(\Delta) + t^p\beta_p(\Delta) \wedge dt)$, где $\alpha_p(\Delta)$ и $\beta_p(\Delta)$ — формы на Δ, в которые не входят t и dt. Они определяют формы α_p и β_p на всём K.

При $t=0$ отображение μ тождественное, поэтому если мы положим $t=0$ и $dt=0$, то из формы $\mu^*(\omega^k)$ мы получим ω^k. Это означает, что $\alpha_0 = \omega^k$. При $t=1$ отображение μ постоянное, поэтому если мы положим $t=1$ и $dt=0$, то из формы $\mu^*(\omega^k)$ мы получим 0 (постоянное отображение индуцирует нулевое отображение k-форм при $k \geqslant 1$; здесь существенно, что $k \geqslant 1$). Это означает, что $\sum_{p\geqslant 0}\alpha_p = 0$.

Воспользуемся теперь тем, что форма ω^k замкнута. Из этого следует, что $d\big(\mu^*(\omega^k)\big) = \mu^*(d\omega^k) = 0$, т.е. $d\left(\sum_{p\geqslant 0} t^p\alpha_p + t^p\beta_p \wedge dt\right) = 0$. Здесь $d(t^p\alpha_p) = t^p d\alpha_p + (-1)^{\deg\alpha_p} pt^{p-1}\alpha_p \wedge dt$ и $d(t^p\beta_p \wedge dt) = t^p d\beta_p \wedge dt$. Поэтому $d\alpha_p = 0$ и $(-1)^{\deg\alpha_p} p\alpha_p + d\beta_{p-1} = 0$ для всех $p \geqslant 0$.

Из полученных равенств следует, что $d\left(\sum_{p\geqslant 0}(-1)^{\deg\alpha_p}\frac{\beta_p}{p+1}\right) = \sum_{p\geqslant 0}(-1)^{\deg\alpha_p}\frac{d\beta_p}{p+1} = -\sum_{p\geqslant 1}\alpha_p = \alpha_0 = \omega^k$. □

Лемма 2 (о продолжении). *Для любой формы $\omega \in A^k(\partial\Delta^n)$ существует форма $\Omega \in A^k(\Delta^n)$, ограничение которой на $\partial\Delta^n$ совпадает с ω.*

Доказательство. Симплекс $\Delta^n = [v_0, \ldots, v_n]$ с выброшенной вершиной v_0 можно спроецировать из вершины v_0 на противоположную ей грань $[v_1, \ldots, v_n]$. В барицентрических координатах это отображение задаётся формулой

$$(x_0, \ldots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_0}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_0}\right).$$

Обозначим это отображение π_0. Пусть ω_0 — ограничение формы ω на грань $[v_1, \ldots, v_n]$. На $\Delta^n \setminus \{x_0\}$ можно рассмотреть форму $\pi_0^*\omega_0$. Если

$$\omega_0 = \sum P_{i_1\ldots i_k}(y_1, \ldots, y_n)dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge y_{i_k},$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — барицентрические координаты на $[v_1, \ldots, v_n]$, то

$$\pi_0^*\omega_0 = \sum P_{i_1\ldots i_k}\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_0}\right) d\left(\frac{x_{i_1}}{1-x_0}\right) \wedge \ldots \wedge d\left(\frac{x_{i_k}}{1-x_0}\right).$$

Но $d\left(\frac{x_i}{1-x_0}\right) = \frac{(1-x_0)dx_i + x_i dx_0}{(1-x_0)^2}$. Поэтому можно выбрать натуральное число N так, что форма $(1-x_0)^N\pi_0^*\omega_0 = \tilde{\omega}_0$ будет полиномиальной формой. Более того, форма $\tilde{\omega}_0$ корректно определена на всём симплексе Δ^n: в вершине v_0 она равна нулю, поскольку в этой вершине $x_0 = 1$. Аналогично можно построить формы $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_n$, рассматривая проекции из вершин $v_0, \ldots, v_n$.

Грань $[v_1, \ldots, v_n]$ задаётся уравнением $x_0 = 0$, поэтому на этой грани форма $\tilde{\omega}_0$ совпадает с ω. Таким образом, форма $\omega - \tilde{\omega}_0|_{\partial\Delta^n}$ обращается в нуль на грани $[v_1, \ldots, v_n]$.

Наша конструкция обладает следующим свойством: если форма ω обращается в нуль на грани $x_i = 0$, то форма $\omega - \tilde{\omega}_0|_{\partial\Delta^n}$ тоже обращается в нуль на этой грани. Другими словами, если задана форма ω на $\partial\Delta^n$, которая обращается в нуль на нескольких гранях, то мы можем построить форму $\tilde{\omega}_1$ на Δ^n, которая обращается в нуль на всех тех же гранях и ещё дополнительно совпадает с ω на какой-то другой грани. Теперь по индукции можно построить требуемую форму, поскольку форма $\omega = 0$ продолжается на Δ^n очевидным образом. □

Замечание. Для гладких функций на Δ^n аналогичное утверждение тоже верно. Доказывается оно почти точно так же, нужно лишь заменить функцию $(1-x_0)^N$ на гладкую функцию, которая равна 1 в окрестности грани $[v_1, \ldots, v_n]$ и равна 0 в окрестности вершины v_0.

Лемма 3. *Пусть ω^k — замкнутая полиномиальная форма на симплексе Δ^n, обращающаяся в нуль на $\partial\Delta^n$; при $k=n$ будем дополнительно предполагать, что $\int_{\Delta^n}\omega^k=0$. Тогда $\omega^k=d\alpha^{k-1}$ для некоторой формы $\alpha^{k-1}\in A^{k-1}(\Delta^n)$, обращающейся в нуль на $\partial\Delta^n$ ($\omega^k=0$ при $k=0$).*

Доказательство. При $n=0$ есть только нулевые формы. Пусть $n=1$ и $\Delta^1=[0,1]$. Если $k=0$, то у нас есть полином $P(x)$, для которого $P'(x)=0$ для всех x и $P(0)=P(1)=0$. Значит, $P(x)=0$ для всех x. Если $k=1$, то у нас есть 1-форма $P(x)\,dx$, причём по условию $\int_0^1 P(x)\,dx=0$. Пусть $Q(x)=\int_0^x P(t)\,dt=0$. Тогда $d\bigl(Q(x)\bigr)=P(x)\,dx$ и $Q(0)=Q(1)=0$.

Далее мы применим индукцию по n. Но доказательство импликации $A_{n-1}\Rightarrow A_n$ (где A_n — утверждение леммы для Δ^n) мы получим, доказав импликации $A_{n-1}\Rightarrow B_n\Rightarrow A_n$, где B_n — следующее утверждение: «Пусть $k\geqslant 1$ и ω^k — замкнутая полиномиальная форма на $\partial\Delta^n$; при $k=n-1$ будем дополнительно предполагать, что $\int_{\partial\Delta^n}\omega^{n-1}=0$. Тогда $\omega^k=d\alpha^{k-1}$ для некоторой полиномиальной формы $\partial\Delta^n$. »

Сначала докажем импликацию $A_{n-1}\Rightarrow B_n$. Пусть ω^k — замкнутая полиномиальная форма на $\partial\Delta^n$. Рассмотрим грань $[v_1,\ldots,v_n]$ симплекса $\Delta^n=[v_0,\ldots,v_n]$. Пусть $K=\partial[v_1,\ldots,v_n]$ и CK — объединение всех граней Δ^n, кроме грани $[v_1,\ldots,v_n]$. Применив лемму Пуанкаре (лемма 1), получим, что $\omega^k|_{CK}=d\beta^{k-1}$ для некоторой формы $\beta^{k-1}\in A^k(CK)$. Применив лемму о продолжении, форму β^{k-1} можно продолжить до формы $\tilde\beta^{k-1}$ на $\partial\Delta^n$. Форма $\omega^k-\tilde\beta^{k-1}$ замкнута и она может быть отлична от нуля только на грани $[v_1,\ldots,v_n]$, причём на $K=\partial[v_1,\ldots,v_n]$ эта форма обращается в нуль. Если $k=n-1$, то

$$0=\int_{\partial\Delta^n}\omega^k=\int_{\partial\Delta^n}(\omega^k-\tilde\beta^{k-1})=\int_{[v_1,\ldots,v_n]}(\omega^k-\tilde\beta^{k-1}).$$

Поэтому утверждение A_{n-1} можно применить к ограничению формы $\omega^k-\tilde\beta^{k-1}$ на симплекс $[v_1,\ldots,v_n]$. В результате получим, что $(\omega^k-\tilde\beta^{k-1})|_{[v_1,\ldots,v_n]}=\partial\gamma^{k-1}$ для некоторой формы γ^{k-1} на симплексе $[v_1,\ldots,v_n]$, обращающейся в нуль на $\partial[v_1,\ldots,v_n]$. Форму γ^{k-1} можно продолжить до формы $\tilde\gamma^{k-1}$ на $\partial\Delta^n$, тождественно равной нулю на CK. При этом $\omega^k=d(\tilde\beta^{k-1}+\tilde\gamma^{k-1})$.

Докажем теперь импликацию $B_n\Rightarrow A_n$. Пусть ω^k — замкнутая полиномиальная форма на Δ^n, обращающаяся в нуль на $\partial\Delta^n$; при $k=n$ дополнительно предполагается, что $\int_{\partial\Delta^n}\omega^k=0$. Очевидно, что если $k=0$, то $\omega^k = 0$. Поэтому будем предполагать, что $k \geqslant 1$. В таком случае можно применить лемму Пуанкаре и построить форму $\beta^{k-1} \in A^{k-1}(\Delta^n)$, для которой $d\beta^{k-1} = \omega^k$. Форма β^{k-1} может не обращаться в нуль на $\partial\Delta^n$; это нужно исправить. Пусть $k = 1$ и $n \geqslant 2$. Тогда β^{k-1} — функция, постоянная на $\partial\Delta^n$. Поэтому можно считать, что β^{k-1} обращается в нуль на $\partial\Delta^n$. Пусть теперь $k \geqslant 2$. Если $k = n$, то

$$\int_{\partial\Delta^n} \beta^{k-1} = \int_{\Delta^n} d\beta^{k-1} = \int_{\Delta^n} d\omega^k = 0.$$

Поэтому можно применить B_n и получить, что $\beta^{k-1}|_{\partial\Delta^n} = d\tilde{\gamma}^{k-2}$, где $d\tilde{\gamma}^{k-2}$ — некоторая полилинейная форма на $\partial\Delta^n$. Пусть γ^{k-2} — продолжение формы $\tilde{\gamma}^{k-2}$ на $\partial\Delta^n$. Положим $\alpha^{k-1} = \beta^{k-1} - d\gamma^{k-2}$. Тогда $d\alpha^{k-1} = d\beta^{k-1} = \omega^k$ и $\alpha^{k-1}|_{\partial\Delta^n} = \beta^{k-1}|_{\partial\Delta^n} - d\tilde{\gamma}^{k-2}$. □

Теперь мы уже можем непосредственно приступить к формулировке и доказательству *симплициальной теоремы де Рама*. Зададим отображение $\rho\colon A^*(K) \to C^*(K;\mathbb{Q})$ формулой $\langle \rho(\omega), \Delta^n \rangle = \int_{\Delta^n} \omega^n$. Теорема Стокса показывает, что $\rho d\omega = \delta\rho\omega$, поэтому отображение ρ индуцирует отображение ρ^* алгебр когомологий.

Теорема 5.3.1. *Отображение ρ^* — изоморфизм алгебр.*

Доказательство. Сначала мы будем доказывать, что ρ^* — изоморфизм векторных пространств. То, что ρ^* сохраняет умножение, мы докажем позже.

Прежде всего докажем, что ρ — эпиморфизм. Рассмотрим на симплексе Δ_i^n форму $\omega_i^n = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Эта форма замкнута, потому что на n-мерном симплексе нет ненулевых $(n+1)$-форм. Проверим, что $\omega_i^n|_{\partial\Delta_i^n} = 0$. Для граней, заданных уравнениями $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, это очевидно, а для грани, заданной уравнением $x_0 = 0$ это следует из того, что $dx_1 + \ldots + dx_n = -dx_0 = 0$. Поэтому можно рассмотреть форму на n-мерном остове, которая совпадает с ω_i^n на Δ_i^n и равна нулю на всех остальных n-мерных симплексах. Согласно лемме о продолжении эту форму можно продолжить на весь симплициальный комплекс K. В результате получим форму $\Omega_i^n \in A^n(K)$, для которой $\langle \rho(\Omega_i^n), \Delta_j^n \rangle = c\delta_{ij}$, где $c \neq 0$ — рациональное число. Из этого следует, что ρ — эпиморфизм.

Мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Ker}\rho \to A^*(K) \xrightarrow{\rho} C^*(K;\mathbb{Q}) \to 0.$$

Здесь $\operatorname{Ker}\rho$ состоит из форм $\omega^n \in A^*(K)$, для которых $\int_{\Delta^n} \omega^n = 0$ для любого симплекса Δ^n в K. Чтобы доказать, что ρ^* — изоморфизм, достаточно проверить, что $H^*(\operatorname{Ker}\rho) = 0$. Иными словами, если $\omega^n \in A^*(K)$, $d\omega^n = 0$ и $\int_{\Delta^n} \omega^n = 0$ для всех симплексов Δ^n в K, то $\omega^n = d\alpha^{n-1}$ для некоторой формы $\alpha^{n-1} \in \operatorname{Ker} \rho$ (это означает, что $\int_{\Delta^{n-1}} \alpha^{n-1} = 0$ для любого симплекса Δ^{n-1} в K; при $n = 0$ подразумевается, что $\omega^n = 0$). Согласно лемме 3 для симплекса Δ_i^n существует форма $\beta_i^{n-1} \in A^{n-1}(\Delta_i^n)$, для которой $\omega^n|_{\Delta_i^n} = d\beta_i^{n-1}$ и $\beta_i^{n-1}|_{\partial\Delta_i^n} = 0$. Из форм β_i^{n-1} можно склеить форму $\tilde{\beta}^{n-1}$ на n-мерном остове K, обращающуюся в нуль на $(n-1)$-мерном остове. С помощью леммы о продолжении форму $\tilde{\beta}^{n-1}$ можно продолжить до формы β^{n-1} на всём K. Замкнутая форма $\omega^n - d\beta^{n-1}$ обращается в нуль на n-мерном остове, т.е. она обращается в нуль на границе любого $(n+1)$-мерного симплекса. Снова применив лемму 3, построим форму $\gamma_j^{n-1} \in A^{n-1}(\Delta_j^{n+1})$, для которой $(\omega^n - d\beta^{n-1})|_{\Delta_j^{n+1}} = d\gamma_j^{n-1}$ и $\gamma_j^{n-1}|_{\partial\Delta_j^{n+1}} = 0$. Из форм γ_j^{n-1} можно склеить форму $\tilde{\gamma}^{n-1}$ на $(n+1)$-мерном остове и продолжить её до формы γ^{n-1} на всём K. Замкнутая форма $\omega^n - d(\beta^{n-1} + \gamma^{n-1})$ обращается в нуль теперь уже на $(n+1)$-мерном остове. Поэтому конструкцию можно повторять. В результате построим форму $\alpha^{n-1} = \beta^{n-1} + \gamma^{n-1} + \ldots$ Эта сумма корректно определена, потому что форма, которая получается на k-м шаге, обращается в нуль на $(n+k-2)$-мерном остове. Форма α^{n-1} обладает требуемыми свойствами, поскольку формы β^{n-1}, γ^{n-1}, $\ldots$ обращаются в нуль на $(n-1)$-мерном остове.

Докажем теперь, что ρ^* сохраняет умножение. Пусть $\alpha, \beta \in Z^*(K; \mathbb{Q})$. Напомним, что класс $[\alpha] \smile [\beta] \in H^*(K; \mathbb{Q})$ — это образ класса $[\alpha \otimes \beta]$ при отображении, индуцированном диагональным отображением $d : |K| \to |K \times K|$. Пусть $\omega_1^n, \omega_2^m \in A^*(K)$, L — триангуляция $|K \times K|$ с вершинами, которые являются произведениями вершин комплекса K. Построим форму $\omega_1^n \times \omega_2^m \in A^{n+m}(L)$ следующим образом. Любой симплекс Δ комплекса L лежит в произведении $\Delta_1 \times \Delta_2$, где Δ_1 и Δ_2 — симплексы K. Рассмотрим канонические проекции $p_i : \Delta_1 \times \Delta_2 \to \Delta_i$, $i = 1, 2$, и построим форму $(p_1^*\omega_1^n) \wedge (p_2^*\omega_2^m)$ на $\Delta_1 \times \Delta_2$. Из ограничений таких форм на симплексы Δ склеивается форма на L, которую мы обозначим $\omega_1^n \times \omega_2^m$.

Отображение $\rho : A^*(L) \to C^*(L; \mathbb{Q})$ переводит форму $\omega_1^n \times \omega_2^m$ в коцепь $\rho(\omega_1^n \times \omega_2^m)$, для которой $\langle \rho(\omega_1^n \times \omega_2^m), \Delta_1^p \times \Delta_2^q \rangle = \int_{\Delta_1^p \times \Delta_2^q} (p_1^*\omega_1^n) \wedge (p_2^*\omega_2^m) = \delta_{np}\delta_{mq} \left(\int_{\Delta_1^n} \omega_1^n \right) \left(\int_{\Delta_2^m} \omega_2^m \right)$; при записи второго равенства мы применили теорему Фубини. Таким образом, $\rho(\omega_1^n \times \omega_2^m) = \rho(\omega_1^n) \otimes \rho(\omega_2^m)$. Кроме того, непосредственно из определения видно, что $d^*(\omega_1^n \times \omega_2^m) = \omega_1^n \wedge \omega_2^m$. $\square$

Глава 6.

Топология многообразий

6.1. Полином Александера

6.1.1. Форма Зейферта

Пусть F— сфера с g ручками, из которой вырезано $n \geqslant 1$ дисков (предполагается, что поверхность F компактна). Тогда $\chi(F) = 2 - 2g - n$. Ясно также, что поверхность F гомотопически эквивалентна букету окружностей. Эйлерова характеристика букета k окружностей равна $k - 1$, поэтому поверхность F гомотопически эквивалентна букету $2g + n - 1$ окружностей. Таким образом, $H_1(F) \cong \mathbb{Z}^{2g+n-1}$. В качестве образующих группы $H_1(F)$ можно взять гомологические классы циклов, изображённых на рис. 6.1.

Предположим, что поверхность F вложена в S^3. Тогда согласно теореме двойственности Александера $H^1(F;\mathbb{Z}) \cong H_1(S^3 \setminus F)$. Пространство F гомотопически эквивалентно букету $2g + n - 1$ окружностей, поэтому $H^1(F;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g+n-1} \cong H_1(F)$. Изоморфизм $H_1(S^3 \setminus F) \cong H_1(F)$ несложно доказать и непосредственно. Мы так и сделаем, чтобы получить явное описание этого изоморфизма. При этом для нас наиболее важно то, что билинейная форма $\beta : H_1(S^3 \setminus F) \times H_1(F) \to \mathbb{Z}$, которая сопоставляет двум замкнутым ориентированным кривым в $S^3 \setminus F$ и в F их коэффициент зацепления, невырождена.

Если число $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то замкнутая ε-окрестность V поверхности F в S^3 представляет собой шар, к которому приклеено

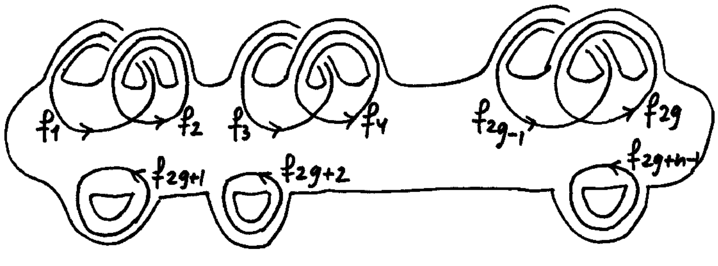

Рис. 6.1. Базис гомологий

$2g+n-1$ ручек. При этом включение $F \subset V$ является гомотопической эквивалентностью. Край ∂V представляет собой сферу с $2g+n-1$ ручками. В группе $H_1(\partial V)$ каждой ручке соответствуют две образующих e_i и f_i'. Здесь e_i — граница малого диска, трансверсально пересекающего f_i в одной точке и не пересекающего f_j при $j \neq i$; f_i' — элемент группы $H_1(\partial V)$, который переходит в f_i при гомоморфизме групп гомологий, индуцированном включением $\partial V \subset V$ (при этом гомоморфизме e_i переходит в 0). Ориентацию e_i выберем так, что $\mathrm{lk}(e_i, f_i) = 1$. Тогда $\mathrm{lk}(e_i, f_j) = \delta_{ij}$. Пусть, далее, V' — замыкание $S^3 \setminus V$. Тогда включение $V' \subset S^3 \setminus F$ является гомотопической эквивалентностью, поскольку включение $\partial V \subset V \setminus F$ является гомотопической эквивалентностью. В последовательности Майера-Вьеториса

$$H_2(S^3) \to H_1(\partial V) \to H_1(V) \oplus H_1(V') \to H_1(S^3)$$

крайние члены нулевые, поэтому $H_1(\partial V) \cong H_1(V) \oplus H_1(V')$. В частности, $H_1(V)$ и $H_1(V')$ — свободные абелевы группы. Ранги групп $H_1(\partial V)$ и $H_1(V)$ нам известны, поэтому получаем, что $H_1(V') \cong \mathbb{Z}^{2g+n-1}$. Образующими этой группы служат образы элементов e_i при гомоморфизме, индуцированном включением $\partial V \subset V'$. Итак, в группах $H_1(V) \cong H_1(F)$ и $H_1(V') \cong H_1(S^3 \setminus F)$ можно выбрать базисы $f_1, \ldots, f_{2g+n-1}$ и $e_1, \ldots, e_{2g+n-1}$ так, что $\mathrm{lk}(e_i, f_j) = \delta_{ij}$.

С помощью билинейной формы $\beta : H_1(S^3 \setminus F) \times H_1(F) \to \mathbb{Z}$ можно построить билинейную форму $\alpha : H_1(F) \times H_1(F) \to \mathbb{Z}$ следующим образом. Пусть v_1, v_2 — положительно ориентированный базис в некоторой точке поверхности F; n — нормальный вектор, для которого базис v_1, v_2, n положительно ориентирован. Выберем достаточно малое число $\varepsilon > 0$, и для каждой кривой γ на поверхности F рассмотрим кривую γ^+, которая получается при параллельном переносе каждой точки кривой

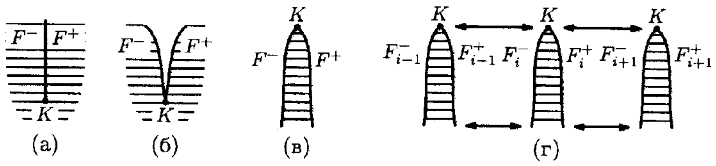

Рис. 6.2. Пространство X_∞

γ в направлении нормали на расстояние ε; кривую, которая получается при переносе в противоположном направлении, обозначим γ^-. Положим $\alpha(x,y)=\beta(x^-,y)$. Билинейную форму α называют *формой Зейферта.*

В качестве базиса $H_1(F)$ снова выберем $f_1,\dots,f_{2g+n-1}$. В этом базисе форме Зейферта соответствует *матрица Зейферта* $A=(a_{ij})$, где $a_{ij}=\alpha(f_i,f_j)=\mathrm{lk}(f_i^-,f_j)=\mathrm{lk}(f_i,f_j^+)$. Пусть $e_1,\dots,e_{2g+n-1}$ — базис $H_1(S^3\setminus F)$, двойственный базису $f_1,\dots,f_{2g+n-1}$ относительно формы β. Тогда $f_i^-=\sum_j a_{ij}e_j$ и $f_j^+=\sum_i a_{ij}e_i$.

6.1.2. Бесконечное циклическое накрытие

Пусть F — компактная ориентируемая поверхность с краем $\partial F = L$, вложенная в S^3. Построим пространство X_∞, которое является бесконечнолистным накрытием пространства $S^3\setminus L$. Для этого разрежем сферу S^3 по F. В результате получим 3-мерное многообразие M^3 с краем $F^+\cup F^-$; каждой точке $a\in F\setminus L$ соответствуют две точки $a^+\in F^+$ и $a^-\in F^-$ (возможность выбрать знаки $+$ и $-$ для всех точек согласованным образом следует из ориентируемости F). Возьмём счётное множество экземпляров M_i^3 $(i\in\mathbb{Z})$ таких многообразий и отождествим ${F^+}_{i-1}$ и F_i^- (отождествляются точки ${a^+}_{i-1}$ и a_i^-, соответствующие одной и той же точке a). Схематично эта конструкция изображена на рис. 6.2. Полученное пространство X_∞ накрывает $S^3\setminus L$. Отображения $M_i^3\to M_{i+1}^3$ индуцируют автоморфизм $t\colon X_\infty\to X_\infty$ этого накрытия. Группа автоморфизмов накрытия порождена элементом t и изоморфна $\mathbb{Z}$. Ясно также, что группа автоморфизмов действует на накрытии транзитивно.

Мы будем предполагать, что поверхность F ориентирована и точка a^+ соответствует положительному направлению нормали, а точка a^- — отрицательному.

Накрытие $X_\infty\to S^3\setminus L$ мы построили с помощью поверхности F. Оказывается, что эта конструкция не зависит от выбора поверхности

F; она зависит только от ориентированного зацепления L (края поверхности F). Действительно, накрытие над $S^3 \setminus L$ однозначно задаётся образом фундаментальной группы накрывающего пространства в $\pi_1(S^3 \setminus L)$. Покажем, что этот образ состоит из тех петель γ, для которых коэффициент зацепления с L равен 0. Ясно, что он состоит из тех петель γ, поднятия которых в X_∞ замкнуты. Иными словами, если мы выйдем из некоторой точки M_0^3 и будем идти вдоль поднятия пути γ, то в конце концов мы должны вернуться в M_0^3. Переходы из M_i^3 в $M_{i\pm1}^3$ соответствуют точкам пересечения кривой γ с поверхностью F; знак здесь тот же самый, что и в определении индекса пересечения. Мы приходим к следующему условию: индекс пересечения кривой γ с поверхностью F равен 0. Согласно одному из определений коэффициента зацепления (см. [Пр3]) это эквивалентно тому, что коэффициент зацепления кривых γ и $L = \partial F = L$ равен 0 (здесь подразумевается, что если L состоит из связных компонент $L_1, \dots, L_n$, то $\operatorname{lk}(\gamma, L) = \sum \operatorname{lk}(\gamma, L_i)$).

Автоморфизм накрытия $t: X_\infty \to X_\infty$ тоже не зависит от выбора поверхности F. Он задаётся теми петлями в $S^3 \setminus L$, для которых коэффициент зацепления с L равен 1 (начало поднятия петли γ отображается в конец этого поднятия).

Для каждого ориентированного зацепления $L \subset S^3$ существует связная ориентированная поверхность F, которая вложена в S^3 и краем которой служит L (см., например, [Пр1]). Эту поверхность называют *поверхностью Зейферта* зацепления L. С помощью поверхности F можно построить накрытие $X_\infty \to S^3 \setminus L$ и автоморфизм $t: X_\infty \to X_\infty$ этого накрытия, которые зависят только от L. Итак, зацеплению L можно сопоставить группу $H_1(X_\infty)$, на которой задан автоморфизм t_*. Это означает, что $H_1(X_\infty)$ — модуль над кольцом $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$, элементами которого служат многочлены от t^{-1} и t с целыми коэффициентами. Чтобы применить эту алгебраическую структуру, нам понадобится матрица, соответствующая заданию модуля образующими и соотношениями (матрица представления модуля). Поэтому мы сейчас дадим определение этой матрицы и докажем некоторые её свойства.

Пусть M — модуль над коммутативным кольцом R с единицей; предполагается, что $1m = m$ для всех $m \in M$. Модуль M называют *свободным*, если существуют элементы $m_1, \dots, m_n \in M$, которые обладают следующим свойством: любой элемент $m \in M$ однозначно представляется в виде $m = r_1 m_1 + \ldots + r_n m_n$; элементы $m_1, \dots, m_n$ называют при этом *базисом* модуля M. Модуль M называют *конечно порождённым*, если существует точная последовательность

$$F \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\varphi} M \to 0, \tag{6.1}$$

где E и F — свободные модули (над тем же кольцом R). Выберем в E и F базисы $e_1, \ldots, e_m$ и $f_1, \ldots, f_n$. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица отображения α относительно этих базисов, т.е. $\alpha(f_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}e_j$. Матрицу A называют *матрицей представления* модуля M. Каждая из m строк матрицы A соответствует образующей модуля M, а каждый из n столбцов — соотношению между образующими. Для данного модуля M точная последовательность (6.1) не единственна; кроме того, базисы в E и F можно выбрать разными способами.

Теорема 6.1.1. *Пусть A и A' — две матрицы представления одного и того же модуля M. Тогда они получаются друг из друга последовательностью преобразований следующего вида (и обратных к ним):*

(1) перестановка строк или столбцов;

(2) замена матрицы A на матрицу $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) добавление к матрице A столбца, состоящего из нулей;

(4) прибавление к строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на некоторое число.

Доказательство. Для точных последовательностей, соответствующих матрицам A и A', можно построить коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
F & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\varphi} & M & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
F' & \xrightarrow{\alpha'} & E' & \xrightarrow{\varphi'} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Действительно, гомоморфизмы g и f можно задать на базисе, а потом продолжить по линейности. Элемент $g(e_j) \in E'$ определим следующим образом. Отображение φ' — эпиморфизм, поэтому существует элемент $e'_j \in E'$, для которого $\varphi'(e'_j) = \varphi(e_j)$. Положим $g(e_j) = e'_j$; тогда $\varphi' g(e_j) = \varphi'(e'_j) = \varphi(e_j)$. Элемент $f(f_i) \in F'$ определим следующим образом. Равенство $\varphi' g\alpha(f_i) = \varphi\alpha(f_i) = 0$ показывает, что существует элемент $f'_i \in F'$, для которого $\alpha'(f'_i) = g\alpha(f_i)$. Положим $f(f_i) = f'_i$; тогда $\alpha' f(f_i) = \alpha'(f'_i) = g\alpha(f_i)$.

Пусть X и Y — матрицы отображений f и g относительно тех же самых базисов, относительно которых записаны матрицы A и A'. Равенство $g\alpha = \alpha' f$ означает, что $XA = A'Y$. Аналогично строятся отображения f' и g' с матрицами X' и Y', для которых $X'A' = AY'$.

Из равенств $\varphi' g = \varphi$ и $\varphi g' = \varphi'$ следует, что $\varphi g' g = \varphi' g = \varphi$. Значит, $\mathrm{Im}(g'g - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Im}\,\alpha$. Пользуясь этим свойством и тем, что модуль E свободный, можно построить гомоморфизм $h: E \to F$, для которого $\alpha h = g'g - \mathrm{id}_E$. Для матриц это равенство принимает вид $AZ = X'X - I$, где Z — матрица отображения h.

Будем использовать обозначение $P \sim Q$, если матрица Q получена из матрицы P последовательностью преобразований (1) — (4) или обратных к ним. Ясно, что

$$A \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} A & X' \\ 0 & I \end{pmatrix} \overset{(3),(4)}{\sim} \begin{pmatrix} A & X' & X'A' \\ 0 & I & A' \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $X'A' = AY'$, получаем

$$\begin{pmatrix} A & X' & X'A' \\ 0 & I & A' \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} A & X' & 0 \\ 0 & I & A' \end{pmatrix} \overset{(3),(4)}{\sim} \begin{pmatrix} A & X' & 0 & XX' \\ 0 & I & A' & X \end{pmatrix}.$$

Далее, используя равенство $XX' = AZ + I$, получаем

$$\begin{pmatrix} A & X' & 0 & XX' \\ 0 & I & A' & X \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} A & X' & 0 & I \\ 0 & I & A' & X \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$A \sim \begin{pmatrix} A & X' & 0 & I \\ 0 & I & A' & X \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} A' & X & 0 & I \\ 0 & I & A & X' \end{pmatrix} \sim A',$$

что и требовалось. □

Пусть A — матрица представления модуля M над кольцом R. Если A содержит m строк и n столбцов, то идеал кольца R, порождённый всеми минорами порядка $m - r + 1$ матрицы A называют r-м *элементарным идеалом* модуля M и обозначают $\mathcal{E}_r$. Если воспользоваться стандартными свойствами определителей, то из теоремы 6.1.1 легко получить, что идеал $\mathcal{E}_r$ не зависит от выбора матрицы A. Условимся считать, что $\mathcal{E}_r = R$ при $r > m$ и $\mathcal{E}_r = 0$ при $r \leqslant 0$. Легко проверить, что $\mathcal{E}_{r-1} \subset \mathcal{E}_r$.

Задача 6.1.1. *Пусть G — конечная абелева группа. Рассмотрим её как $\mathbb{Z}$-модуль. Докажите, что для этого модуля идеал $\mathcal{E}_1$ порождён числом $|G|$, где $|G|$ — порядок группы G.*

6.1.3. Основная теорема

Основная теорема, связывающая матрицу Зейферта A со структурой модуля $H_1(X_\infty)$ над кольцом $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$, заключается в следующем.

Теорема 6.1.2. *Матрица $tA - A^T$ является матрицей представления модуля $H_1(X_\infty)$ над кольцом $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$.*

Доказательство. Представим пространство X_∞ в виде объединения подпространств $M' = \cup M^3_{2i+1}$ и $M'' = \cup M^3_{2i}$. Пересечение этих подпространств представляет собой счётный набор поверхностей Зейферта. В последовательности Майера-Вьеториса

$$\to H_i(M' \cap M'') \to H_i(M') \oplus H_i(M'') \to H_i(X_\infty) \to$$

все группы являются модулями над кольцом $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$. Отдельно на группах $H_i(M')$ и $H_i(M'')$ действие t не определено; t переводит эти группы друг в друга, поэтому на $H_i(M') \oplus H_i(M'')$ действие t определено. Отображения в последовательности Майера-Вьеториса являются гомоморфизмами модулей.

Покажем, что участок последовательности Майера-Вьеториса

$$H_1(M' \cap M'') \xrightarrow{j_*} H_1(M') \oplus H_1(M'') \xrightarrow{i_*} H_1(X_\infty)$$

задаёт представление модуля $H_1(X_\infty)$ образующими и соотношениями. Прежде всего проверим, что i_* — эпиморфизм. Это эквивалентно тому, что $\operatorname{Ker} \partial_* = H_1(X_\infty)$, т.е. $\operatorname{Im} \partial_* = 0$. Последнее равенство эквивалентно тому, что отображение $j_* : H_0(M' \cap M'') \to H_0(M') \oplus H_0(M'')$ — мономорфизм. Группы $H_0(M' \cap M'')$ и $H_0(M') \oplus H_0(M'')$ являются прямыми суммами групп $H_0(M^3_k \cap M^3_{k+1})$ и $H_0(M^3_k)$, каждая из которых изоморфна $\mathbb{Z}$, поскольку поверхность Зейферта F связна. Поэтому модули $H_0(M' \cap M'')$ и $H_0(M') \oplus H_0(M'')$ изоморфны $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$; элемент t^k соответствует элементам $1 \in H_0(M^3_k \cap M^3_{k+1})$ и $1 \in H_0(M^3_k)$. При таком отождествлении отображение j_* переводит t^k в $t^k + t^{k+1}$. В частности, $j_*(1) = 1 + t \neq 0$, поэтому j_* — мономорфизм.

Выберем в $H_1(F) = H_1(M^3_k \cap M^3_{k+1})$ базис $\{f_i\}$, а в $H_1(S^3 \setminus F) = H_1(M^3_k)$ выберем базис $\{e_i\}$, двойственный базису $\{f_i\}$ относительно формы β. Модули $H_1(M' \cap M'')$ и $H_1(M') \oplus H_0(M'')$ свободные. Их базисами служат элементы $1 \otimes f_i$ и $1 \otimes e_i$. При этом элементам $f_i \in H_1(M^3_k \cap M^3_{k+1})$ и $e_i \in H_1(M^3_k)$ соответствуют элементы $t^k \otimes f_i$ и $t^k \otimes e_i$. Легко проверить, что $j_*(1 \otimes f_i) = t \otimes f_i^+ - 1 \otimes f_i^-$. Действительно, рассмотрим элемент $f_i \in H_1(M^3_0 \cap M^3_1)$. При ограничении f_i на $M^3_0 \subset M''$ получается f_i^- (кривая сдвигается в направлении, противоположном направлении нормали), а при ограничении f_i на $M^3_1 \subset M'$ получается f_i^+ (кривая сдвигается в направлении нормали). По определению $j_* = (j', -j'')$; при этом $j'(1 \otimes f_i) \in H_1(M^3_1) = t \otimes H_1(M^3_0)$ и $j''(1 \otimes f_i) \in H_1(M^3_0)$.

Воспользовавшись выражениями f_i^+ и f_i^- через матрицу Зейферта

$A = (a_{ij})$, получаем

$$j_*(1 \otimes f_i) = \sum_j a_{ji} t \otimes e_j - \sum_j a_{ij} \otimes e_j.$$

Таким образом, матрица отображения j_* в выбранных базисах равна $tA - A^T$. Но матрица отображения j_* это и есть матрица представления модуля $H_1(X_\infty)$. □

Элементарный идеал $\mathcal{E}_r$ модуля $H_1(X_\infty)$ над кольцом $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ называют r-м *идеалом Александера* ориентированного зацепления L. Образующую наименьшего главного идеала, содержащего r-й идеал Александера, называют r-м *полиномом Александера* ориентированного зацепления L. Первый полином Александера называют просто *полиномом Александера*; его обозначают $\Delta_L(t)$.

Образующая главного идеала определена с точностью до умножения на единицу (обратимый элемент) кольца. В кольце $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ единицами являются элементы $\pm t^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому r-й полином Александера определён с точностью до умножения на $\pm t^n$.

Согласно теореме 6.1.2 модуль $H_1(X_\infty)$ имеет квадратную матрицу представления, а именно, $tA - A^T$. Поэтому первый элементарный идеал этого модуля главный, а значит, $\Delta_L(t) \doteq \det(tA - A^T)$; символ $\doteq$ здесь и далее означает равенство с точностью до умножения на $\pm t^n$.

6.1.4. Свойства полинома Александера

Прежде всего заметим, что если K — тривиальный узел, то $\Delta_K(t) \doteq 1$. Действительно, в этом случае $X_\infty = D^2 \times \mathbb{R}$, поэтому $H_1(X_\infty) = 0$.

Вычисление полинома Александера сводится к вычислению матрицы Зейферта $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = \mathrm{lk}(f_i, f_i^+)$. Вычислим, например, матрицу Зейферта для трилистника (рис. 6.3). Несложно убедиться, что кривые f_1^+ и f_2^+ расположены так, как показано на рис. 6.4. Поэтому $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $tA - A^T = \begin{pmatrix} t-1 & -t \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}$. Значит, полином Александера для трилистника равен $t^2 - t + 1$.

Отметим, что при вычислении матрицы Зейферта очень удобно пользоваться «плоской» поверхностью Зейферта. Для трилистника такая поверхность Зейферта изображена на рис. 6.5. Поверхность Зейферта такого вида есть у любого зацепления. Чтобы это доказать, обратимся снова к рис 6.1. Деформируем поверхность Зейферта так,

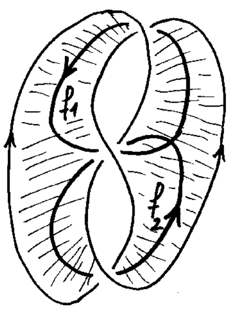

Рис. 6.3. Трилистник

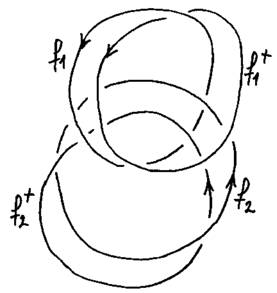

Рис. 6.4. Расположение кривых f_i, f_i^+

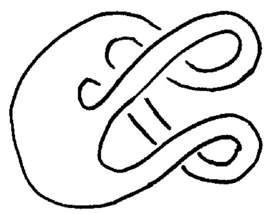

Рис. 6.5. Плоская поверхность Зейферта

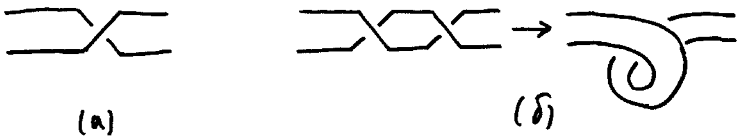

Рис. 6.6. Перекручивания ручки

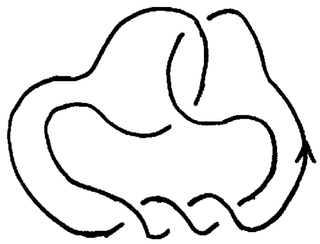

Рис. 6.7. Диаграмма узла к задаче 6.1.2

чтобы ручки, приклеенные к диску, стали длинными и узкими. Если не обращать внимания на то, что ручки могут быть перекручены (рис. 6.6, а), то требуемое расположение поверхности Зейферта строится теперь очевидным образом. Но из ориентированности поверхности следует, что число перекручиваний каждой ручки чётно. Два перекручивания в противоположных направлениях взаимно уничтожаются, а два перекручивания в одном направлении заменяются на петлю (рис. 6.6, б).

Задача 6.1.2. *Вычислите полином Александера узла, изображённого на рис. 6.7.*

Задача 6.1.3. *а) Пусть p, q и r — нечётные числа. Тогда можно построить узел $P(p,q,r)$, как показано на рис. 6.8 (числа p, q, r могут быть отрицательными; для каждого отрицательного числа изменяются типы перекрёстка). Вычислите полином Александера узла $P(p,q,r)$.*

б) Докажите, что полином Александера узла $P(-3,5,7)$ равен t, т.е. у этого узла полином Александера такой же, как у тривиального узла. (Этот узел называют узлом Зейферта*).*

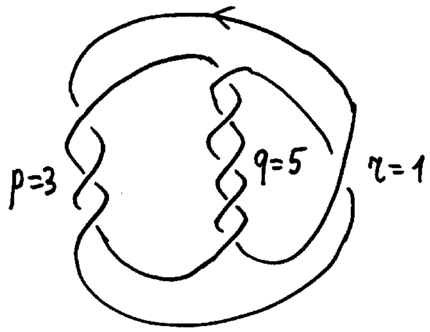

Рис. 6.8. Диаграмма узла к задаче 6.1.3

Докажем теперь некоторые общие свойства полинома Александера. Из свойств определителя следует, что для любого ориентированного зацепления L имеет место соотношение $\Delta_L(t) \doteq \Delta_L(t^{-1})$. Действительно, $\Delta_L(t) \doteq \det(tA - A^T) = (-t)^n \det(t^{-1}A - A^T) \doteq \Delta_L(t^{-1})$.

Теорема 6.1.3. *а) Пусть K — узел. Тогда $\Delta_K(1) \doteq 1$*

б) Пусть L — зацепление, состоящее по крайней мере из двух связных компонент. Тогда $\Delta_L(1) \doteq 0$.

Доказательство. Пусть L — ориентированный узел или зацепление. Выберем на его поверхности Зейферта стандартные образующие циклы $f_1, \ldots, f_{2g+n-1}$ (узел характеризуется тем, что для него $n = 1$). По определению $\Delta_L(1) \doteq \det B$, где $B = A - A^T$, т.е. $b_{ij} = a_{ij} - a_{ji} = \mathrm{lk}(f_i, f_j^+) - \mathrm{lk}(f_j, f_i^+) = \mathrm{lk}(f_i^-, f_j^+) - \mathrm{lk}(f_i^+, f_j)$. Чтобы вычислить эту разность коэффициентов зацепления, натянем на кривые f_i^- и f_i^+ полоску F_i и ориентируем её так, чтобы её краем служил цикл $f_i^- f_i^+$. Тогда рассматриваемая разность коэффициентов зацепления равна индексу пересечения $\langle\langle F_i, f_j\rangle\rangle = \pm\langle\langle f_i, f_j\rangle\rangle$, где последний индекс пересечения вычисляется на поверхности Зейферта. Несложно проверить, что при наших соглашениях о знаках в этом выражении получается знак минус.

При перестановке двух 1-мерных циклов их индекс пересечения меняет знак. Поэтому матрица B состоит из g диагональных блоков $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и ещё $n - 1$ нулей на диагонали. Если $n = 1$, то $\det B = 1$, а если $n > 1$, то $\det B = 0$. □

6.1.5. Полином Конвея

Полином Александера определён с точностью до умножения на $\pm t^r$. Полином Конвея — это (с точностью до замены переменных) однозначно определённый полином Александера, т.е. полином Александера с фиксированной нормировкой. Полиномы Конвея разных зацеплений, в отличие от полиномов Александера, можно складывать. Более того, между полиномами Конвея зацеплений, определённым образом друг с другом связанных, есть замечательное соотношение, позволяющее вычислить полином Конвея любого зацепления, исходя непосредственно из диаграммы зацепления.

Для проверки корректности определения Конвея нам понадобится одно вспомогательное утверждение о взаимосвязях различных поверхностей Зейферта одного и того же ориентированного зацепления L. Это же утверждение понадобится нам впоследствии для проверки корректности определения инварианта Арфа зацепления.

Пусть F — поверхность Зейферта ориентированного зацепления $L \subset S^3$. Предположим, что цилиндр $I \times D^2$ вложен в S^3 так, что его пересечение с F состоит в точности из оснований цилиндра, т.е. $F \cap (I \times D^2) = \partial I \times D^2$; кроме того, в малой окрестности оснований цилиндр лежит по одну сторону от поверхности F. Вырежем из F основания цилиндра и вместо них вклеим $I \times \partial D^2$. В результате снова получим некоторую поверхность Зейферта F' зацепления L. Будем говорить, что поверхность Зейферта F' получена из поверхности Зейферта F *приклеиванием ручки.*

Теорема 6.1.4. *Пусть F_1 и F_2 — поверхности Зейферта ориентированного зацепления L. Тогда существует последовательность поверхностей Зейферта $S_1, \ldots, S_k$, где $S_1 = F_1$ и $S_k = F_2$, причём для любого $i = 1, \ldots, n-1$ одна из поверхностей S_i и S_{i+1} получена из другой либо приклеиванием ручки, либо изотопией (неподвижной на L).*

Доказательство. После малого шевеления (неподвижного на L) можно считать, что поверхности F_1 и F_2 трансверсально пересекаются по конечному числу замкнутых несамопересекающихся кривых (пересечение по L тоже трансверсальное). Пусть M^3 — одно из замыканий областей, на которые поверхности F_1 и F_2 разбивают S^3. Предположим, что M^3 лежит по одну сторону от каждой из поверхностей F_1 и F_2, т.е. если разные части M^3 примыкают к F_1 (или к F_2), то все они лежат по одну сторону от F_1 (или от F_2); ниже мы покажем, что такое M^3 всегда можно выбрать. Пусть $\partial M^3 = \partial_1 M^3 \cup \partial_2 M^3$, где $\partial_i M^3 = \partial M^3 \cap F_i$. Любую триангуляцию сферы S^3, для которой F_1 и F_2 — подкомплексы, можно ограничить на M^3. Пусть A^3 — объединение всех симплексов второго барицентрического подразделения этой триангуляции многообразия M^3, которые пересекаются с $\partial_1 M^3$ или с 1-мерными симплексами исходной триангуляции. Неформально можно сказать, что A^3 — объединение ε-окрестности (воротника) $\partial_1 M^3$ в M^3 и ε-окрестности 1-мерного остова исходной триангуляции. Заменим F_1 на F_1', вырезав $\partial_1 M^3$ и вклеив вместо него замыкание $\partial A^3 \setminus \partial_1 M^3$. Эта операция сводится к последовательным изотопиям и приклеиваниям ручек. Действительно, мы имеем дело с операцией следующего вида. К поверхности приклеено несколько рёбер графа, причём все они приклеены с одной стороны поверхности. Затем рассматривается ε-окрестность графа и берётся её граница. К исходной поверхности добавляется та часть этой границы, которая лежит по ту же сторону от поверхности, что и граф; участки исходной поверхности, лежащие в ε-окрестности графа, удаляются. Такая операция сводится к последовательным изотопиям и приклеиваниям ручек.

Поверхность F_2 мы изменим следующим образом. Пусть B^3 — замыкание $M^3 \setminus A^3$. Другими словами, B^3 — объединение конусов с вершинами в центрах 3-мерных симплексов исходной триангуляции, основаниями которых служат звёзды (во втором барицентрическим подразделении) центров 2-мерных граней этих симплексов, не лежащих в $\partial_1 M^3$. Заменим F_2 на F_2', вырезав $B^3 \cap F_2$ и вклеив вместо него замыкание $\partial B^3 \setminus (B^3 \cap F_2)$. Это снова будет операция того же самого вида. Действительно, пусть некоторый 3-мерный симплекс имеет n 2-мерных граней, не лежащих в $\partial_1 M^3$. Тогда для этого симплекса вклеивается граница ε-окрестности графа, состоящего из n рёбер, выходящих из одной вершины.

Теперь F_1' и F_2' совпадают внутри M^3 и $F_1' \cap F_2' = (F_1 \cap F_2) \cup (\partial A^3 \setminus \partial_1 M^3)$. Но, сдвигая F_1 по воротнику $\partial_1 M^3$, мы могли нарушить необходимое свойство $\partial F_1 = L$. Это нужно исправить. Каждая связная компонента $F_1 \cap F_2$ либо целиком лежит на границе многообразия M^3, либо не пересекается с ним. Если какая-то компонента K зацепления L лежит на границе многообразия M^3, то мы изменим F_1', посредством изотопии, сдвигая $\partial F_1'$ назад по воротнику до тех пор, пока $\partial F_1'$ не совпадёт с K.

Эти преобразования поверхностей Зейферта F_1 и F_2 каждый раз уменьшают число областей, на которые поверхности F_1 и F_2 разбивают сферу S^3. Поэтому мы можем добиться, чтобы F_1 и F_2 не разбивали S^3, т.е. совпадали.

Остаётся доказать, что всегда можно выбрать многообразие M^3

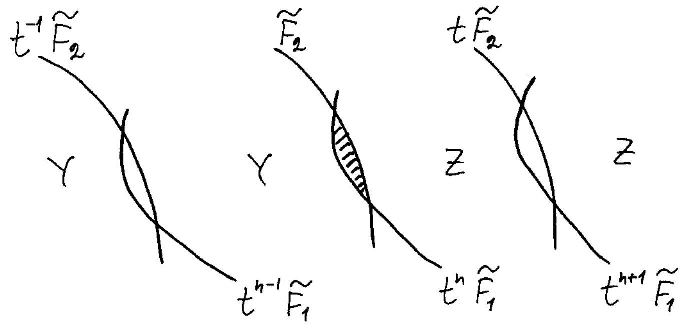

Рис. 6.9. Выбор многообразия M^3

так, чтобы оно лежало по одну сторону как относительно F_1, так и относительно F_2. Для этого воспользуемся бесконечным циклическим накрытием $p: X_\infty \to S^3 \setminus L$, построенным в § 6.1.2. Пространство X_∞ можно строить как с помощью поверхности F_1, так и с помощью поверхности F_2. Поэтому в X_∞ есть два семейства поверхностей $t^i\tilde{F}_1$ и $t^j\tilde{F}_2$ (края трёхмерных многообразий, из которых двумя способами склеивается X_∞). Нас интересует случай, когда F_1 и F_2 пересекаются не только по L. Основная идея состоит в том, чтобы рассмотреть максимальное целое число n, для которого $\tilde{F}_2 \cap t^n\tilde{F}_1 \neq \varnothing$ (рис. 6.9). Чтобы это можно было сделать, будем считать, что из S^3 вырезано не множество L, а его открытая ε-окрестность, так что в результате мы получаем компактное пространство. Теперь мы имеем дело с компактными множествами, поэтому требуемое число n действительно существует.

Поверхность $\tilde{F}_2$ разрезает X_∞ на две части; пусть Y — та из них, в которой лежат поверхности $t^r\tilde{F}_2$ при $r < 0$. Поверхность $t^n\tilde{F}_1$ тоже разрезает X_∞; пусть Z — та часть, в которой лежат поверхности $t^{n+r}\tilde{F}_1$ при $r > 0$. Нетрудно видеть, что проекция $p(Y \cap Z)$ — требуемое многообразие. □

Две квадратные матрицы называют *S-эквивалентными*, если одну из них можно получить из другой с помощью нескольких операций следующих двух типов:

1) $A \mapsto PAP^T$, где P — целочисленная матрица с определителем ± 1.

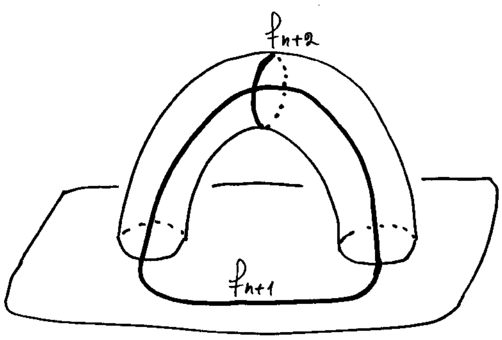

Рис. 6.10. Дополнительные образующие

2) $A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} A & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ или $A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, где α — столбец, β — строка.

Теорема 6.1.5 (Левин [Le3]). *Любые две матрицы Зейферта одного и того же ориентированного зацепления S-эквивалентны.*

Доказательство. Если в $H_1(F;\mathbb{Z})$ заменить базис, то для матрицы Зейферта получим преобразование (1). Поэтому согласно теореме 6.1.4 остаётся посмотреть, что происходит с матрицей Зейферта при приклеивании ручки. Можно считать, что при этом к базису в $H_1(F;\mathbb{Z})$ добавляются образующие f_{n+1} и f_{n+2}, изображённые на рис. 6.10. Если $i \leqslant n$, то $\mathrm{lk}(f^{\pm}_{n+2}, f_i) = 0$. Позаботившись о выборе ориентаций кривых f_{n+1} и f_{n+2}, можно считать, что либо $\mathrm{lk}(f^{+}{}_{n+1}, f_{n+2}) = 0$ и $\mathrm{lk}(f^{-}_{n+1}, f_{n+2}) = 1$, либо $\mathrm{lk}(f^{+}{}_{n+1}, f_{n+2}) = 1$ и $\mathrm{lk}(f^{-}_{n+1}, f_{n+2}) = 0$. В первом случае новая матрица Зейферта имеет вид $\begin{pmatrix} A & \alpha & 0 \\ * & * & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Преобразованиями типа (1) эта матрица приводится к виду $\begin{pmatrix} A & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Аналогично во втором случае матрица приводится к виду $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

Введём формальную переменную $t^{1/2}$, для которой $(t^{1/2})^2 = t$, и определим *полином Александера в нормализации Конвея* $\Delta_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}]$ следующим образом: $\Delta_L(t) = \det(t^{1/2}A - t^{-1/2}A^T)$, где A — матрица Зейферта зацепления L. Если A — матрица порядка r, то $\Delta_L(t) = t^{-r/2}\det(tA - A^T)$, поэтому с точностью до умножения на единицу кольца $\mathbb{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}]$ полином Александера в нормализации Конвея совпадает с полиномом Александера.

Теорема 6.1.6. *Для ориентированного зацепления L полином Александера в нормализации Конвея определён однозначно: он не зависит от выбора матрицы Зейферта A.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\det(t^{1/2}P^TAP - t^{-1/2}P^TA^TP) = \det\bigl(P^T(t^{1/2}A - t^{-1/2}A^T)P\bigr) = \\ = (\det P)^2 \det(t^{1/2}A - t^{-1/2}A^T).$$

Пусть теперь $B = \begin{pmatrix} A & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$t^{1/2}B - t^{-1/2}B^T = \begin{pmatrix} t^{1/2}A - t^{-1/2}A^T & t^{1/2}\alpha & 0 \\ -t^{-1/2}\alpha^T & 0 & t^{1/2} \\ 0 & -t^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножая последнюю строку этой матрицы на подходящие элементы кольца $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ и прибавляя результат к остальным строкам, можно уничтожить столбец $t^{1/2}\alpha$. Аналогично уничтожается строка $-t^{-1/2}\alpha^T$. Поэтому

$$\det(t^{1/2}B - t^{-1/2}B^T) = \det(t^{1/2}A - t^{-1/2}A^T)\det\begin{pmatrix} 0 & t^{1/2} \\ -t^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} = \\ = \det(t^{1/2}A - t^{-1/2}A^T),$$

поскольку $\det\begin{pmatrix} 0 & t^{1/2} \\ -t^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} = 1$. Для преобразования типа (2) доказательство аналогично. □

Из доказательства теоремы 6.1.3 вытекают следующие свойства полинома Александера в нормализации Конвея:

1) Если K — узел, то $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$, $\Delta_K(1) = 1$ и $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$.

2) Если L — зацепление, состоящее по крайней мере из двух связных компонент, то $\Delta_L(1) = 0$.

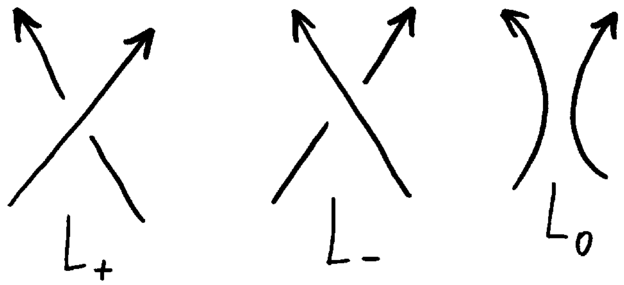

Рис. 6.11. Три зацепления

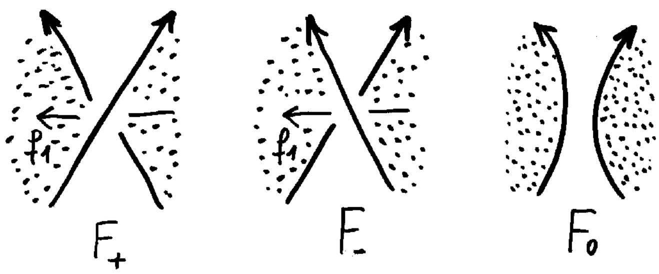

Рис. 6.12. Три поверхности Зейферта

Теорема 6.1.7. *Пусть L_+, L_- и L_0 — ориентированные зацепления, диаграммы которых совпадают всюду, кроме малого диска, а в этом диске устроены так, как показано на рис. 6.11. Тогда их полиномы Александера в нормализации Конвея связаны соотношением*

$$\Delta_{L_+} - \Delta_{L_-} = (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta_{L_0}. \tag{6.2}$$

Доказательство. Построим для зацепления L_0 поверхность Зейферта F_0 так, чтобы в рассматриваемом диске она была устроена так, как показано на рис. 6.12. Приклеивая к L_0 перекрученную полоску, можно получить поверхности Зейферта F_+ и F_- для зацеплений L_+ и L_-. В качестве базиса $H_1(F_\pm)$ выберем класс замкнутой кривой f_1, проходящей по полоске, к которому добавлен базис $H_1(F_0)$. Если A_0 — матрица Зейферта для L_0, то матрица Зейферта для L_- и L_+ имеют вид $\begin{pmatrix} n & \alpha \\ \beta & A_0 \end{pmatrix}$

и $\begin{pmatrix} n-1 & \alpha \\ \beta & A_0 \end{pmatrix}$, где n — некоторое целое число. Рассматривая теперь определители матриц $t^{1/2}A - t^{-1/2}A^T$ для трёх матриц Зейферта, получаем требуемое. При этом нужно лишь учесть, что $\det\begin{pmatrix} a & x \\ y & A_0 \end{pmatrix} = a\det A_0 + c$, где c не зависит от a. □

Соотношение (6.2) вместе с условием, что для тривиального узла полином Александера в нормализации Конвея равен 1, позволяет вычислить Δ_L для любого ориентированного зацепления L (подробности см. в [Пр3]). Поэтому Δ_L — полином от переменной $z = t^{-1/2} - t^{1/2}$. Полином $\nabla_L(z)$, для которого $\nabla_L(t^{-1/2} - t^{1/2}) = \Delta_L(t)$, где Δ_L — полином Александера в нормализации Конвея, называют *полиномом Конвея*. Полином Конвея удовлетворяет соотношению

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z). \tag{6.3}$$

Задача 6.1.4. *Докажите, что если зацепление L расположено по обе стороны от плоскости, не пересекающей это зацепление, то $\nabla_L(z) = 0$.*

Задача 6.1.5. *Используя соотношение* (6.3), *вычислите полином Конвея для: а) трилистника; б) узла восьмёрка; в) зацепления Хопфа.*

Запишем полином Конвея в виде $\nabla_L(z) = a_0(L) + a_1(L)z + a_2(L)z^2 + \ldots$

Задача 6.1.6. *Пусть число компонент зацепления L равно $n(L)$. Докажите, что $a_i(L) = 0$ при $i \equiv n(L) \pmod 2$.*

Задача 6.1.7. *а) Докажите, что если K — узел, то $a_0(K) = 1$.*

б) Докажите, что если L — зацепление, содержащее более одной компоненты, то $a_0(L) = 0$.

Задача 6.1.8. *Пусть число компонент зацепления L равно $n(L)$. Докажите, что $a_i(L) = 0$ при $i < n(L) - 1$.*

Задача 6.1.9. *Докажите, что если L — зацепление, состоящее ровно из двух компонент L_1 и L_2, то $a_1(L) = \mathrm{lk}(L_1, L_2)$.*

Задача 6.1.10. *Предположим, что L_+ и L_- — узлы, а L_0 — зацепление, состоящее из компонент L_1 и L_2. Докажите, что тогда $a_2(L_+) - a_2(L_-) = \mathrm{lk}(L_1, L_2)$.*

6.2. Инвариант Арфа

6.2.1. Инвариант Арфа квадратичной формы

С каждой вещественной квадратичной формой $q(x)$ связана симметрическая билинейная форма $B(x,y)$, для которой $B(x,x) = q(x)$. Тождество $q(x+y) - q(x) - q(y) = 2B(x,y)$ позволяет восстановить B по q. Для поля $\mathbb{Z}_2$ определение квадратичной формы и связанной с ней билинейной формы изменяется следующим образом. Пусть V — конечномерное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$. Отображение $q : V \to \mathbb{Z}_2$ называют *квадратичной формой*, если существует билинейная форма $B(x,y)$, для которой $q(x+y) + q(x) + q(y) = B(x,y)$; знаки здесь, конечно, несущественны; существенно лишь то, что $2B(x,y)$ заменяется на $B(x,y)$, поскольку над полем $\mathbb{Z}_2$ нельзя делить на 2. Квадратичную форму q называют *невырожденной*, если билинейная форма B невырождена.

Непосредственно из определения видно, что $B(x,y) = B(y,x)$ и $B(x,x) = q(2x) + 2q(x) = 0$. Поэтому точно такие же рассуждения, как для вещественных кососимметрических матриц, показывают, что если q — невырожденная квадратичная форма, то в пространстве V можно выбрать базис $e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n$ так, что $B(e_i, e_j) = B(f_i, f_j) = 0$ и $B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$; такой базис называют *симплектическим*.

Для невырожденной квадратичной формы q элемент $c(q) = \sum_{i=1}^{n} q(e_i)q(f_i) \in \mathbb{Z}_2$, где $e_1, \ldots, f_n$ — симплектический базис, называют *инвариантом Арфа*.

Теорема 6.2.1 (Арф [Ar]). *а) Инвариант Арфа $c(q)$ не зависит от выбора симплектического базиса.*

б) Невырожденную квадратичную форму q можно привести к виду $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n + c(q)(x_n^2 + y_n^2)$, где $c(q)$ — инвариант Арфа.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Равенство $q(e_1) + q(f_1) + q(e_1 + f_1) = 1$ показывает, что либо один из элементов $q(e_1)$, $q(f_1)$, $q(e_1 + f_1)$ равен 1, а два других равны 0, либо все три элемента равны 1. Элементы e_1, f_1 и $e_1 + f_1$ равноправны в том смысле, что любые два из них можно взять в качестве симплектического базиса, поскольку $B(e_1 + f_1, e_1 + f_1) = 0$ и $B(e_1 + f_1, e_1) = 1$. Поэтому можно считать, что $q(e_1 + f_1) = 1$. Итак, в случае $n = 1$ мы получаем две невырожденные квадратичные формы: q_0 и q_1; здесь $q_0(e_1) = q_0(f_1) = 0$ и $q_1(e_1) = q_1(f_1) = 1$. В координатах эти формы можно записать так: $q_0 = x_1y_1$ и $q_1 = x_1y_1 + x_1^2 + y_1^2$. Ясно, что $c(q_0) = 0$ и $c(q_1) = 1$. Остаётся доказать, что формы q_0 и q_1 не эквивалентны, т.е. не получаются друг из друга заменой базиса. Для этого достаточно заметить, что форма q_0 принимает значение 1 ровно один раз, а форма q_1 — три раза.

Рассмотрим теперь произвольную невырожденную квадратичную форму q. Выберем симплектический базис $e_1, \ldots, f_n$. Пусть φ_i — ограничение формы q на подпространство, натянутое на векторы e_i и f_i. Тогда $q = \varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n$. Каждая форма φ_i эквивалентна q_0 или q_1.

Лемма 1. *Квадратичные формы $\psi_0 = q_0 \oplus q_0$ и $\psi_1 = q_1 \oplus q_1$ эквивалентны.*

Доказательство. Пусть e_1, f_1, e_2, f_2 — симплектический базис, для которого $\psi_0(e_i) = \psi_0(f_i) = 0$ и $\psi_1(e_i) = \psi_1(f_i) = 1$. Рассмотрим базис $e_1' = e_1 + e_2$, $f_1' = e_1 + f_2$, $e_2' = e_1 + f_1 + e_2 + f_2$, $f_2' = e_1 + f_1 + f_2$, Легко проверить, что этот базис симплектический. Проверим, что $\psi_1(e_i') = \psi_1(f_i') = 0$, т.е. $\psi_1(e_i') = \psi_0(e_i)$ и $\psi_1(f_i') = \psi_0(f_i)$. Действительно, $\psi_1(e_1 + e_2) = \psi_1(e_1) + \psi_1(e_2) + B(e_1, e_2) = 1 + 1 + 0 = 0$, $\psi_1(e_1 + f_2) = \psi_1(e_1) + \psi_1(f_2) + B(e_1, f_2) = 1 + 1 + 0 = 0$, $\psi_1(e_1 + f_1 + e_2 + f_2) = \psi_1(e_1 + e_2) + \psi_1(f_1 + f_2) + B(e_1 + e_2, f_1 + f_2) = 0 + 0 + 0 = 0$, $\psi_1(e_1 + f_1 + f_2) = \psi_1(e_1 + f_2) + \psi_1(f_1) + B(e_1 + f_2, f_1) = 0 + 1 + 1 = 0$. □

Из леммы 1 следует, что форма q эквивалентна либо форме nq_0, либо форме $(n-1)q_0 \oplus q_1$. В координатах эти формы записываются так: $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ и $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n + x_n^2 + y_n^2$. Ясно также, что $c(nq_0) = 0$ и $c\big((n-1)q_0 \oplus q_1\big) = 1$. Остаётся доказать, что формы nq_0 и $(n-1)q_0 \oplus q_1$ не эквивалентны.

Лемма 2. *Значение 1 форма nq_0 принимает ровно $2^{2n-1} - 2^{n-1}$ раз, а форма $(n-1)q_0 \oplus q_1$ — ровно $2^{2n-1} + 2^{n-1}$ раз.*

Доказательство. Применим индукцию по n. При $n = 1$ утверждение легко проверяется. Предположим, что мы уже доказали, что форма nq_0 принимает значение 1 ровно $2^{2n-1} - 2^{n-1}$ раз. Форма q_0 принимает значение 1 ровно 1 раз, а значение 0 ровно 3 раза. Поэтому форма $(n+1)q_0$ принимает значение 1 ровно $3(2^{2n-1} - 2^{n-1}) + 2^{2n-1} + 2^{n-1} = 2^{2n+1} - 2^n$ раз (мы воспользовались тем, что форма nq_0 принимает значение 0 ровно $2^{2n-1} + 2^{n-1}$ раз). Форма q_1 принимает значение 1 ровно 3 раза, а значение 0 ровно 1 раз. Поэтому форма $nq_0 \oplus q_1$ принимает значение 1 ровно $3(2^{2n-1} + 2^{n-1}) + 2^{2n-1} - 2^{n-1}$ раз. □

□

6.2.2. Инвариант Арфа ориентированного зацепления

Пусть $L \subset S^3$ — ориентированное зацепление, F — его поверхность Зейферта. Определим отображение $q : H_1(F; \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$, положив $q(x) = \alpha_2(x, x)$, где α_2 — это форма Зейферта α, приведённая по модулю 2. Например, если гомологический класс x представлен замкнутой несамопересекающейся кривой на поверхности F, то $q(x)$ — число полных оборотов (по модулю 2) полоски, которая получается, если взять на поверхности F ε-окрестность этой кривой. Ясно, что $q(x+y) = \alpha_2(x, x) + \alpha_2(x, y) + \alpha_2(y, x) + \alpha_2(y, y)$, поэтому

$$q(x+y) + q(x) + q(y) = \alpha_2(x, y) + \alpha_2(y, x) = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ — форма пересечения, приведённая по модулю 2. Действительно, $\alpha(x, y) + \alpha(y, x) = \mathrm{lk}(x^-, y) + \mathrm{lk}(y^-, x) = \mathrm{lk}(x^-, y) + \mathrm{lk}(y, x^+ +)$. Непосредственно из определения коэффициента зацепления видно, что чётность числа $\mathrm{lk}(x^-, y) + \mathrm{lk}(y, x^+)$ совпадает с чётностью числа точек пересечения кривых, представляющих y и x.

Итак, q — квадратичная форма, соответствующая билинейной форме f. Обратимся к рис. 6.1 на с. 337. Этот рисунок показывает, что форма пересечения невырождена тогда и только тогда, когда край поверхности Зейферта связен, т.е. мы имеем дело с узлом. В связи с этим определение инварианта Арфа для узла проще, чем для зацеплений с несколькими компонентами: *инвариант Арфа* узла — это инвариант Арфа квадратичной формы q. Для зацеплений с несколькими компонентами определение инварианта Арфа не столь просто; более того, инвариант Арфа определён не для всех зацеплений.

Чтобы из формы пересечения получить невырожденную форму, нужно профакторизовать пространство $H_1(F; \mathbb{Z}_2)$ по подпространству, порождённому циклами $f_{2g+1}, \ldots, f_{2g+n-1}$, соответствующими $n-1$ компонентам края. Цикл, соответствующий оставшейся компоненте края, гомологичен сумме этих циклов. Таким образом, нужно рассмотреть факторпространство $H_1(F; \mathbb{Z}_2)/i_* H_1(\partial F; \mathbb{Z}_2)$, где $i : \partial F \to F$ — естественное включение.

Форма q на этом факторпространстве должна быть корректно определена. Для этого нужно, чтобы для каждой компоненты L_i имело место равенство $q(L_i) = 0$, т.е. $\mathrm{lk}(L_i^-, L_i) = 0$. Поверхность Зейферта не пересекает L_i^-, поэтому по модулю 2 коэффициент зацепления L_i^- и L_i равен коэффициенту зацепления L_i^- и $L - L_i$, а он, в свою очередь, равен коэффициенту зацепления L_i и $L - L_i$. Поэтому мы будем предполагать,

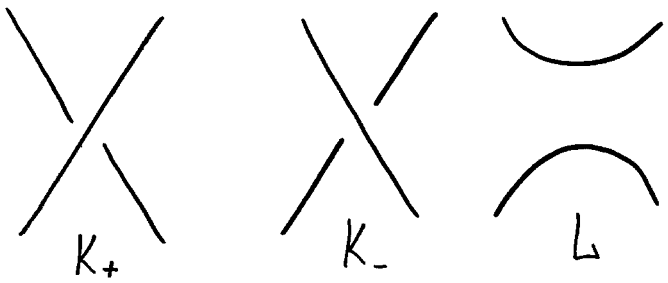

Рис. 6.13. Диаграммы двух узлов и зацепления

что зацепление L обладает следующим свойством:

$$\operatorname{lk}(L_i^-, L_i) \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{для всех } i. \tag{6.1}$$

Тогда форма q на факторпространстве корректно определена. *Инвариант Арфа* $\mathcal{A}(L)$ зацепления L, обладающего свойством (6.1), — это инвариант Арфа квадратичной формы q на факторпространстве $H_1(F;\mathbb{Z}_2)/i_*H_1(\partial F;\mathbb{Z}_2)$.

Теорема 6.2.2. *Инвариант Арфа $\mathcal{A}(L)$ ориентированного зацепления L определён корректно, т.е. он не зависит от выбора поверхности F.*

Доказательство. Согласно теореме 6.1.4 достаточно проверить, что инвариант Арфа не изменяется при приклеивании к F ручки. В качестве симплектического базиса e_1, f_1, …, e_g, f_g для формы q на пространстве $H_1(F)/i_*H_1(\partial F)$ возьмём первые $2g$ кривых на рис. 6.1. После приклеивания ручки к ним можно добавить e_{g+1} и f_{g+1}, которые выбираются так, как показано на рис. 6.10 на с. 350. Если e_{g+1} — это кривая f_{n+2} на этом рисунке, то $q(e_{g+1}) = 0$. Поэтому $\sum_{k=1}^{g} q(e_k)q(f_k) = \sum_{k=1}^{g+1} q(e_k)q(f_k)$. □

Ясно, что если K — тривиальный узел, то $\mathcal{A}(K) = 0$. Легко также проверить, что если K — трилистник, то $\mathcal{A}(K) = 1$. Действительно, при вычислении полинома Александера трилистника (см. с. 343) мы построили базис f_1, f_2. Непосредственно из определения формы $f(x, y)$ видно, что $f(x, x) = 0$. Кроме того, $f(f_1, f_2) = 1$, поскольку f_1 и f_2 пересекаются в одной точке. Следовательно, $\mathcal{A}(K) = q(f_1)q(f_2) = 1$.

Теорема 6.2.3. *Пусть K_+ и K_- — два узла, а L — двухкомпонентное зацепление, диаграммы которых совпадают всюду, кроме малого*

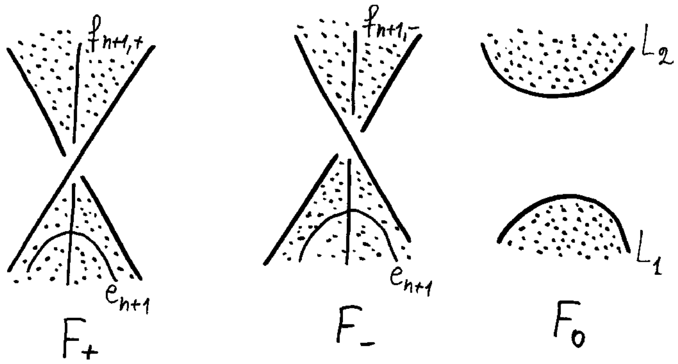

Рис. 6.14. Три поверхности Зейферта

диска, а в этом диске устроены так, как показано на рис. 6.13. Тогда

$$\mathcal{A}(K_+) \equiv \mathcal{A}(K_-) + \mathrm{lk}(L_1, L_2) \pmod 2,$$

где L_1 и L_2 — компоненты зацепления L.

Доказательство. Для K_+ и K_- можно построить поверхности Зейферта F_+ и F_-, которые над рассматриваемым малым диском устроены так, как показано на рис. 6.14, а в остальном совпадают. С их помощью можно построить поверхность F_0 для зацепления L. Если эта поверхность окажется несвязной, то мы, чтобы получить поверхность Зейферта для L, ко всем трём поверхностям приклеим ручку, которая сделает поверхность F_0 связной.

Пусть $e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n$ — симплектический базис для формы q на пространстве $H_1(F_0; \mathbb{Z}_2)$. Дополним его до симплектического базиса циклами e_{n+1} и $f_{n+1,\pm}$ (рис. 6.14); здесь цикл e_{n+1} представлен кривой L_1. Полоски, соответствующие кривым $f_{n+1,+}$ и $f_{n+1,-}$ отличаются ровно одним оборотом, поэтому $q(f_{n+1,+}) - q(f_{n+1,-}) = 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(K_+) - \mathcal{A}(K_-) &= q(e_{n+1})\big(q(f_{n+1,+}) - q(f_{n+1,-})\big) = \\ &= q(e_{n+1}) = \mathrm{lk}(L_1^-, L_1) = \mathrm{lk}(L_1, L - L_1) = \mathrm{lk}(L_1, L_2).\end{aligned}$$

□

Теорема 6.2.4. *Пусть K — узел. Тогда:*

а) $\mathcal{A}(K) \equiv a_2(K) \pmod 2$, где $a_2(K)$ — коэффициент при z^2 полинома Конвея $\nabla_K(z)$.

б)

$$\mathcal{A}(K) = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если} } \Delta_K(-1) \equiv \pm 1 \pmod 8; \\ 1, & \text{\textit{если} } \Delta_K(-1) \equiv \pm 3 \pmod 8, \end{cases}$$

где $\Delta_K(t)$ — полином Александера в нормализации Конвея.

Доказательство. а) Если L_+ и L_- — узлы, то L_0 — двухкомпонентное зацепление. Согласно задаче 6.1.10 $a_2(L_+) - a_2(L_-) = \mathrm{lk}(L_1, L_2)$, где L_1 и L_2 — компоненты зацепления L. Согласно теореме 6.2.3 $\mathcal{A}(L_+ +) \equiv \mathcal{A}(L_-) + \mathrm{lk}(L_1, L_2) \pmod 2$. Кроме того, если K — тривиальный узел, то $a_2(K) = 0 = \mathcal{A}(K)$. Следовательно, $\mathcal{A}(K) \equiv a_2(K) \pmod 2$ для любого узла K.

б) По определению $\Delta_K(t) = \nabla_K(t^{-1/2} - t^{1/2})$, поэтому $\Delta_K(-1) = = \nabla_K(-2i)$. Согласно задаче 6.1.6 $\nabla_K(z) = 1 + a_2(K)z^2 + a_4(K)z^4 + + \ldots$ Поэтому $\nabla_K(-2i) \equiv 1 - 4a_2(K) \pmod 8$. Если $a_2(K)$ чётно, то $\nabla_K(-2i) \equiv 1 \pmod 8$, а если $a_2(K)$ нечётно, то $\nabla_K(-2i) \equiv -3 \pmod 8$. □

6.3. Вложения и погружения

6.3.1. Сильная теорема Уитни о вложениях

В части I мы доказали слабые теоремы Уитни о вложениях и погружениях, а именно, любое n-мерное многообразие без края при $n \geqslant 2$ можно погрузить в $\mathbb{R}^{2n}$ и вложить в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Здесь мы докажем сильную теорему Уитни о вложениях: замкнутое многообразие M^n можно вложить в $\mathbb{R}^{2n}$.

Доказательство сильной теоремы Уитни основано на том, что сначала строится *регулярное* погружение $f : M^n \to \mathbb{R}^{2n}$, т.е. погружение, у которого нет тройных точек (иными словами, никакие три различные точки не отображаются в одну точку) и в каждой *двойной точке* (*точке самопересечения*) $a = f(x) = f(y)$, где $x \neq y$, выполняется равенство $df(T_xM^n) \oplus df(T_yM^n) = T_a\mathbb{R}^{2n}$. Затем двойные точки уничтожаются посредством так называемого трюка Уитни. При этом двойные точки уничтожаются парами. Более того, если M^n ориентируемо и n чётно, то уничтожаемая пара точек должна быть определённым образом согласованной. Поэтому иногда бывает нужно предварительно добавить несколько двойных точек.

Регулярные погружения

Теорема 6.3.1. *Пусть M^n — замкнутое многообразие, $f: M^n \to \mathbb{R}^{2n}$ — погружение. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует регулярное погружение $g: M^n \to \mathbb{R}^{2n}$, для которого $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ при всех $x \in M^n$.*

Доказательство. Мы воспользуемся той же самой конструкцией, что и при доказательстве существования погружений (теорема 17.5, часть I), но теперь вместо замены $f_i(y) = f_{i-1}(y) + Ay$ используется замена $f_i(y) = f_{i-1}(y) + v$, где v — достаточно малый постоянный вектор. Посмотрим сначала, что происходит в малой окрестности образа точки $x \in M^n$. Можно считать, что $f(x) = 0$ и образ в $\mathbb{R}^{2n}$ окрестности $U_{i,1} \ni x$ локально, т.е. в некоторой окрестности V, задаётся уравнениями $y_1 = 0$, $\dots$, $y_n = 0$. Для многообразия $f^{-1}(V)$ рассмотрим композицию отображений $f^{-1}(V) \xrightarrow{f} V \xrightarrow{p} \mathbb{R}^n$, где $p(y_1, \dots, y_{2n}) = (y_1, \dots, y_n)$. Пусть $v' = (v_1, \dots, v_n)$ — регулярное значение этой композиции отображений, отличное от образов двойных точек, лежащих в V. Тогда n-мерное подпространство Π^n, заданное уравнениями $y_1 = v_1$, $\dots$, $y_n = v_n$, не проходит через двойные точки образа M^n, лежащие в V, и в каждой точке $a \in \Pi^n \cap f(M^n) \cap V$ касательное пространство $df\left(T_{f^{-1}(a)} M^n\right)$ дополнительно к Π^n, т.е. их прямая сумма имеет размерность $2n$. Это, в частности, означает, что Π^n и $f(M^n) \cap V$ пересекаются в изолированных точках.

Таким образом, если добавить к каждой точке образа $U_{i,1}$ вектор $(v_1, \dots, v_n, 0, \dots, 0)$, а все остальные части $f(M^n) \cap V$ оставить на месте, то мы сможем распространить регулярное погружение на $U_{i,1}$.

Мы объяснили, что делается в $U_{i,1}$. Глобальное отображение, которое вне $U_{i,2}$ остаётся прежним, строится с помощью колоколообразной функции λ, как это делалось при доказательстве слабой теоремы Уитни. Нужно только выбрать вектор v' достаточно малым, чтобы полученное отображение было погружением. $\square$

Если замкнутое многообразие M^n регулярно погружено в $\mathbb{R}^{2n}$, то число двойных точек конечно. Действительно, предположим, что число двойных точек бесконечно. Пусть x_0 — предельная точка их прообразов. У точки x_0 есть окрестность U, образ которой несамопересекающийся. Пусть $\{x_i\}$ — сходящаяся к x_0 последовательность прообразов двойных точек, лежащих в U. Все соответствующие им точки y_i лежат вне U. Пусть y_0 — их предельная точка. Выбрав для точки y_0 окрестность, образ которой пересекает образ окрестности U не более чем в одной точке, приходим к противоречию.

Двойные точки

Пусть $f : M^n \to \mathbb{R}^{2n}$ — регулярное погружение, $a = f(x) = f(y)$ — двойная точка. Если многообразие M^n ориентируемо и n чётно, то точке a можно сопоставить *индекс самопересечения* следующим образом. Зададим на M^n ориентацию и выберем положительно ориентированные базисы $df(T_xM^n)$ и $df(T_yM^n)$. Из этих базисов составим базис пространства $\mathbb{R}^{2n}$, записав сначала первый базис, а потом второй. Если ориентация полученного базиса положительна (отрицательна), то индекс самопересечения равен 1 (-1). Индекс самопересечения не зависит от выбора ориентации M^n, потому что если одновременно изменить ориентации базисов $df(T_xM^n)$ и $df(T_yM^n)$, то ориентация составленного из них базиса $\mathbb{R}^{2n}$ не изменится. Не меняется индекс самопересечения и при перестановке точек x и y. Действительно, чтобы поменять местами первые n векторов и последние n векторов, нужно сделать n^2 транспозиций.

Индексом самопересечения регулярного погружения f будем называть сумму индексов самопересечения для всех двойных точек. Если n нечётно или многообразие M^n неориентируемо, то мы не можем определить знак индекса самопересечения для двойной точки, поэтому в этих случаях индексом самопересечения погружения f будем называть остаток от деления на 2 общего числа двойных точек. Индекс самопересечения регулярного погружения f будем обозначать I_f.

Теорема 6.3.2. *Пусть M^n — замкнутое многообразие. Тогда существует регулярное погружение $f : M^n \to \mathbb{R}^{2n}$, для которого I_f принимает любое заданное значение (предполагается, что если M^n ориентируемо и n чётно, то $I_f \in \mathbb{Z}$, а во всех остальных случаях $I_f \in \mathbb{Z}_2$.)*

Доказательство. Сначала построим регулярное погружение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ с одной точкой самопересечения. При $n = 1$ положим $y_1 = x - \frac{2x}{1+x^2}$, $y_2 = \frac{1}{1+x^2}$ (рис. 6.15). Точки $x = \pm 1$ переходят в точку $(0, 1/2)$; других точек самопересечения нет. Матрица Якоби рассматриваемого отображения имеет вид $\left(1 - 2\frac{1-x^2}{1+x^2}, -\frac{2x}{1+x^2}\right)$; она нигде не обращается в нуль.

Для $n \geqslant 2$ зададим отображение формулами $y_1 = x_1 - \frac{2x_1}{X}$, $y_i = x_i$ при $i = 2, \ldots, n$, где $X = (1 + x_1^2) \ldots (1 + x_n^2)$, $y_{n+1} = \frac{1}{X}$, $y_{n+i} = \frac{x_1 x_i}{X}$ при $i = 2, \ldots, n$, где $X = (1 + x_1^2) \ldots (1 + x_n^2)$. Проверим, что это отображение — регулярное погружение с единственной точкой самопересечения.

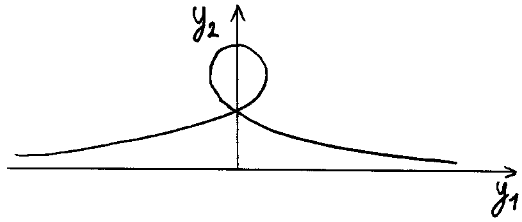

Рис. 6.15. Точка самопересечения

Матрица Якоби этого отображения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-2\frac{1-x_1^2}{X(1+x_1^2)} & \frac{4x_1x_2}{X(1+x_2^2)} & \ldots & \frac{4x_1x_n}{X(1+x_n^2)} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \frac{-2x_1}{X(1+x_1^2)} & \frac{-2x_2}{X(1+x_2^2)} & \ldots & \frac{-2x_n}{X(1+x_n^2)} \\ \frac{x_2(1-x_1^2)}{X(1+x_1^2)} & \frac{x_1(1-x_2^2)}{X(1+x_2^2)} & \ldots & \frac{-2x_1x_2x_n}{X(1+x_n^2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_n(1-x_1^2)}{X(1+x_1^2)} & \frac{-2x_1x_2x_n}{X(1+x_2^2)} & \ldots & \frac{x_1(1-x_n^2)}{X(1+x_n^2)} \end{pmatrix}.$$

Последние n элементов первого столбца равны 0 тогда и только тогда, когда $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Но в этом случае $1 - 2\frac{1-x_1^2}{X(1+x_1^2)} = -1 \neq 0$. Значит, матрица Якоби в любой точке имеет ранг n.

Найдём теперь все пары точек $(x_1', \ldots, x_n') = (x_1, \ldots, x_n)$, для которых $y_i' = y_i$. Равенства $y_i = x_i$, $i = 2, \ldots, n$, показывают, что $x_i' = x_i$ при $i = 2, \ldots, n$. Далее, $y_{n+1}' = y_{n+1}$, поэтому $X' = X$, а значит, $(x_1')^2 = x_1^2$, т.е. $x_1' = \pm x_1$. Таким образом, $x_1' = -x_1 \neq 0$. Теперь равенство $y_{n+i} = \frac{x_1 x_i}{X}$, $i = 2, \ldots, n$, показывает, что $x_2 = \ldots = x_n = 0$. Значит, $X = 1 + x_1^2$. Поэтому $y_1 = x_1 - \frac{2x_1}{1+x_1^2}$ и $y_1' = -y_1$. Значит, $y_1 = 0$ и $x_1^2 = 1$. В итоге получаем, что только точки $(\pm 1, 0, \ldots, 0)$ отображаются в одну и ту же точку.

Матрицы Якоби в точках $(\pm 1, 0, \ldots, 0)$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \mp 1/2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \pm 1/2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \pm 1/2 \end{pmatrix}.$$

Из этих двух матриц складывается матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -1/2 & 0 & \ldots & 0 & 1/2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/2 & \ldots & 0 & 0 & -1/2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1/2 & 0 & 0 & \ldots & -1/2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & 1 \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица невырожденная, поэтому погружение регулярное.

Непосредственно из определения индекса самопересечения (в случае чётного n и ориентируемого M^n) видно, что если изменить ориентацию $\mathbb{R}^{2n}$, то индекс самопересечения изменит знак. Поэтому, используя только что построенное регулярное погружение и его композицию с симметрией $\mathbb{R}^{2n}$ относительно гиперплоскости, можно построить два регулярных погружения с одной точкой самопересечения, которая для одного отображения имеет индекс $+1$, а для другого -1.

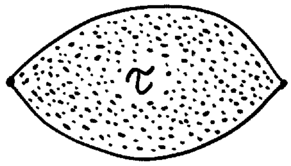

Рис. 6.16. Область τ

Пусть $f : M^n \to \mathbb{R}^{2n}$ — регулярное погружение, $U \subset M^n$ — достаточно малая окрестность, которая гомеоморфна $\mathbb{R}^n$ и ограничение f на которую является вложением. Легко строится регулярное погружение g, которое совпадает с f вне U, а образ $g(U)$ имеет единственную точку самопересечения, причём индекс самопересечения для этой точки имеет предписанный знак (для чётного n и ориентируемого M^n). При этом по сравнению с f погружение g имеет ровно одну дополнительную точку. Эта конструкция позволяет доказать требуемое утверждение. □

Трюк Уитни

Чтобы доказать сильную теорему Уитни о вложениях, остаётся научиться уничтожать пару точек самопересечения многообразия M^n в $\mathbb{R}^{2n}$ (если многообразие M^n ориентируемо и n чётно, то предполагается, что индексы самопересечения для этих двойных точек имеют противоположные знаки). Отметим, что трюк Уитни работает лишь при $n \geqslant 3$; случай $n = 2$ требует отдельного доказательства (см. с. 370). В дальнейшем мы будем предполагать, что $n \geqslant 3$.

Пусть p и q — две точки самопересечения для регулярного погружения $f : M^n \to \mathbb{R}^{2n}$. Рассмотрим $f^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$ и $f^{-1}(q) = \{q_1, q_2\}$. Соединим на многообразии M^n точку p_i с точкой q_i путём $\bar{\gamma}_i$ $(i = 1, 2)$. Пусть $\gamma_i = f(\bar{\gamma}_i)$. Можно считать, что кривые γ_1 и γ_2 несамопересекающиеся, причём они пересекаются друг с другом только в точках p и q.

Прежде всего покажем, что на γ_1 и γ_2 можно натянуть вложенный диск, трансверсальный $f(M^n)$. Точнее говоря, пусть τ — замкнутая область в $\mathbb{R}^2$ с двумя точками излома (рис. 6.16), τ' — её открытая ε-окрестность. Тогда существует вложение $\psi : \tau' \to \mathbb{R}^{2n}$, обладающее следующими свойствами:

1) точки излома переходят в p и q;

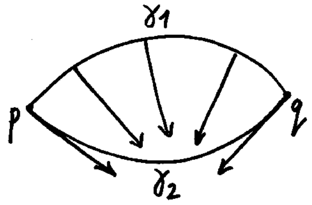

Рис. 6.17. Векторное поле на γ_1

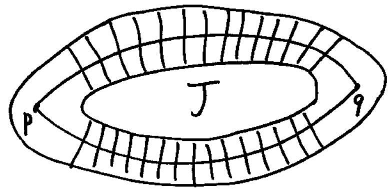

Рис. 6.18. Вложение окрестности края диска τ

2) $\psi(\tau) \cap f(M^n) = \gamma_1 \cup \gamma_2$;

3) для любой точки $\gamma_1 \cup \gamma_2$, отличной от p и q, касательное пространство $T_x\psi(\tau)$ не содержится целиком в $T_x f(M^n)$.

Построим на γ_1 векторное поле в $\mathbb{R}^{2n}$, трансверсальное $f(M_1^n)$, где M_1^n — малая окрестность кривой $\bar{\gamma}_1$ в M^n. В качестве векторов в точках p и q возьмём касательные векторы к кривой γ_2, направленные навстречу друг другу (рис. 6.17). Они трансверсальны $f(M_1^n)$, поскольку $f(M_2^n)$ трансверсально $f(M_1^n)$. Рассмотрим над кривой γ_1 следующее расслоение: слой над точкой x — это пространство $\mathbb{R}^{2n} \setminus T_x M^n \sim S^{n-1}$. Это расслоение тривиально, поскольку его база стягиваема. В концах кривой γ_1 задано сечение рассматриваемого расслоения. Пространство S^{n-1} линейно связно, поэтому заданное сечения можно продолжить на всю кривую γ_1. В результате получим требуемое векторное поле. Аналогично построим векторное поле на кривой γ_2.

Вне малых окрестностей точек p и q рассмотрим концы векторов вида $t\,v(x)$, где $x \in \gamma_1 \cup \gamma_2$, $v(x)$ — построенный вектор в точке x, $|t| \leqslant \varepsilon$ (ε — фиксированное достаточно малое положительное число). А в малых окрестностях точек p и q рассмотрим части плоскостей, натянутых на касательные векторы к кривым γ_1 и γ_2. При построении векторных полей в точках p и q мы брали как раз касательные векторы к кривым γ_1 и γ_2, поэтому, слегка пошевелив рассматриваемые поверхности, из них можно склеить поверхность, представляющую собой вложение малой окрестности края диска τ (рис. 6.18). Условие трансверсальности при этом выполняется.

К внутренней части полученной полоски (кривая J на рис. 6.18) можно приклеить диск D^2, поскольку любое непрерывное отображение $S^1 \to \mathbb{R}^{2n}$ можно продолжить до непрерывного отображения $D^2 \to \mathbb{R}^{2n}$. Пользуясь тем, что $2n > 5$, построенное отображение $D^2 \to \mathbb{R}^{2n}$ можно аппроксимировать вложением, не изменяя его вблизи $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Затем, пользуясь тем, что $2 + n < 2n$, можно устранить все возникшие при этом пересечения $f(M^n)$ с диском D^2.

Перейдём теперь к следующему шагу — построению ортонормированной системы векторных полей $w_3, \ldots, w_{2n}$ на диске $\psi(\tau)$, ортогональных $\psi(\tau)$. При этом для начала мы будем предполагать, что индексы самопересечения для точек p и q имеют противоположные знаки.

Рассмотрим ограничение на γ_1 касательного расслоения многообразия M^n и возьмём ортогональное дополнение к касательному расслоению γ_1. В результате получим $(n-1)$-мерное расслоение. Это расслоение тривиально, поскольку его база стягиваема. Поэтому можно выбрать линейно независимые сечения $w_3, \ldots, w_{n+1}$ полученного расслоение. Аналогично можно выбрать векторные поля $w_{n+2}, \ldots, w_{2n}$ на кривой γ_2. При этом в точках p и q есть все $2n-2$ векторов $w_3, \ldots, w_{2n}$, но в этих точках они задают противоположные ориентации нормального расслоения диска $\psi(\tau)$. Действительно, если мы перенесём вдоль кривых γ_1 и γ_2 касательные к ним векторы, то в точках p и q получим противоположно ориентированные базисы касательных пространств $T_p\psi(\tau)$ и $T_q\psi(\tau)$ (рис. 6.19).

Для удобства будем предполагать, что кривые γ_1 и γ_2 не просто трансверсальны TM_2^n и TM_1^n, а ортогональны. На кривой γ_1 заданы векторные поля $w_3, \ldots, w_{n+1}$. Рассмотрим расслоение над кривой γ_1, слоем которого над точкой x служит $(n-1)$-мерное подпространство, ортогональное векторам $w_3(x), \ldots, w_{n+1}(x)$ и касательному пространству $T_x\psi(\tau)$. В точках p и q заданы векторы $w_{n+2}, \ldots, w_{2n}$ — ортонормированные сечения этого расслоения. Эти сечения нужно продолжить на всю кривую γ_1. Распространим сначала одно сечение w_{n+2}. Это можно сделать, поскольку расслоение тривиально и слой $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\} \sim S^{n-2}$ связен. Затем будем распространять сечение ортогонального дополнения того, что получилось, и т.д. При распространении сечения w_{2n-1}

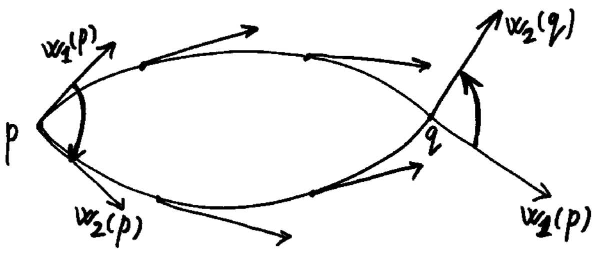

Рис. 6.19. Изменение ориентации

слоем будет $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \sim S^1$. Когда мы попытаемся распространить сечение w_{2n}, слоем будет несвязное множество $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$. Чтобы сечение можно было распространить, нужна согласованность ориентаций, но в нашем случае ориентации согласованы.

Теперь на кривой γ_1 есть векторы $w_3, \ldots, w_{2n}$, а на кривой γ_2 есть векторы $w_{n+2}, \ldots, w_{2n}$. Пользуясь тем, что $\pi_1\bigl(V(2n-2, n-1)\bigr) = 0$, векторные поля $w_{n+2}, \ldots, w_{2n}$ можно распространить на весь диск $\psi(\tau)$. В каждой точке $x \in \psi(\tau)$ рассмотрим ортогональное дополнение к векторам $w_{n+2}, \ldots, w_{2n}$ и к касательному пространству $T_x\psi(\tau)$. На кривой γ_1 заданы сечения $w_3, \ldots, w_{n+1}$ этого расслоения. Каждую точку диска $\psi(\tau)$ можно представить в виде $\gamma_t(s)$, где $1 \leqslant s, t \leqslant 2$. Распространим сечения $w_3, \ldots, w_{n+1}$, заданные в точке $\gamma_1(s)$, на кривую $\gamma_t(s)$, где s фиксировано, а t меняется, как постоянные сечения тривиального расслоения. В результате получим требуемые векторные поля $w_3, \ldots, w_{n+1}$ на диске $\psi(\tau)$.

Теперь уже можно непосредственно перейти к доказательству сильной теоремы Уитни о вложениях. Будем считать, что $\tau \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{2n}$. Продолжим вложение $\psi : \tau \to \mathbb{R}^{2n}$ до отображения малой окрестности τ в $\mathbb{R}^{2n}$ следующим образом. Для $x = (x_1, \ldots, x_{2n})$ положим

$$\psi(x) = \psi(\bar{x}) + \sum_{i=3}^{2n} x_i w_i\bigl(\psi(\bar{x})\bigr), \text{ где } \bar{x} = (x_1, x_2).$$

Из того, что в точке $x \in \psi(\tau)$ векторы $w_3, \ldots, w_{2n}$ образуют базис ортогонального дополнения к касательному пространству $T_x\psi(\tau)$, следует, что в точке x якобиан отображения ψ отличен от нуля. Поэтому ψ представляет собой диффеоморфизм некоторой окрестности U диска $\psi(\tau)$ на область в $\mathbb{R}^{2n}$. Положим $N_1^n = \psi^{-1}\bigl(f(M_1^n)\bigr)$ и $N_2^n = \psi^{-1}\bigl(f(M_2^n)\bigr)$.

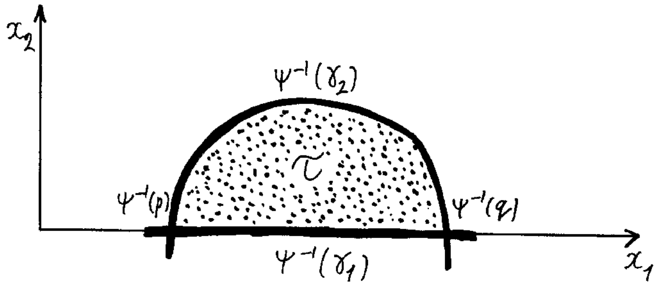

Рис. 6.20. Расположение диска τ

Наша цель — продеформировать N_2^n в области U так, чтобы уничтожились две точки пересечения с N_1^n и при этом не появилось бы никаких новых точек пересечения.

Чтобы описать требуемую деформацию, удобно считать, что прообраз кривой γ_1 при отображении ψ лежит на оси x_1 (рис. 6.20). Более того, мы будем считать, что кривые γ_1 и γ_2 естественным образом продолжены до выхода из малой окрестности диска $\psi(\tau)$ и на этих продолжениях векторные поля $w_3, \ldots, w_{2n}$ построены так же, как и на самих кривых.

В каждой точке $x \in \psi^{-1}(\gamma_1)$ касательное пространство $T_x N_1^n$ представляет собой плоскость $(x_1, x_3, \ldots, x_{n+1})$, поэтому N_1^n мало отличается от этой плоскости. После малого шевеления, тождественного вне малой окрестности кривой $\psi^{-1}(\gamma_1)$, можно считать, что N_1^n совпадает с частью этой плоскости (для этого, возможно, вместо U придётся взять некоторую меньшую окрестность кривой $\psi^{-1}(\gamma_1)$). Аналогично можно считать, что N_2^n совпадает с частью многообразия, которое получается при проведении из каждой точки кривой $\psi^{-1}(\gamma_2)$ и её продолжения всех векторов пространства $(x_{n+2}, \ldots, x_{2n})$. Рассмотрим проекцию

$$\pi : (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n}) \mapsto (x_1, 0, x_3, \ldots, x_{2n}).$$

Ясно, что $\pi(N_1^n) = N_1^n$ и $\pi(N_2^n)$ лежит в пространстве $(x_1, x_{n+2}, \ldots, x_{2n})$. Поэтому множество $N_1^n \cap \pi(N_2^n)$ лежит на оси x_1.

Применим к N_2^n следующую деформацию, тождественную вне ε-окрестности диска τ. Во-первых, все точки N_2^n сдвигаются параллельно оси x_2, поэтому множество $\pi(N_2^n)$ не изменяется. Кривая $\psi^{-1}(\gamma_2)$ и её продолжение сдвигаются в область $x_2 < 0$ (рис. 6.21). Для осталь-

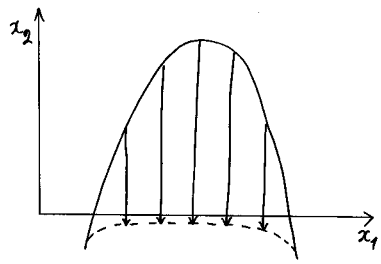

Рис. 6.21. Трюк Уитни

ных точек $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \in N_2^n$ вектор сдвига определяется так: вектор сдвига для точки $(x_1, x_2, 0, \ldots, 0)$ умножается на $\lambda(x_3^2 + \ldots + x_{2n}^2)$, где $\lambda(0) = 1$ и $\lambda(t) = 0$ при $t > \varepsilon^2$.

При проекции π точки пересечения N_1^n и N_2^n переходят в точки пересечения N_1^n и $\pi(N_2^n)$, поэтому если в плоскости (x_1, x_2) нет точек пересечения N_1^n и деформированного многообразия N_2^n, то у них вообще нет точек пересечения. Ясно также, что если ε достаточно мало, то образ ε-окрестности диска τ при отображении ψ не содержит других частей многообразия $f(M^n)$. Поэтому новых точек самопересечения не появляется.

В случае, когда индексы самопересечения для точек p и q имеют противоположные знаки, теорема Уитни полностью доказана. В случае, когда многообразие M^n неориентируемо, либо многообразие M^n ориентируемо и n нечётно, основная конструкция та же самая. Но чтобы её применить, возможно придётся изменить кривые γ_1 и γ_2. Нам нужно, чтобы при переносе пары нормальных пространств к M_1^n и M_2^n из точки p в точку q вдоль кривых γ_1 и γ_2 изменялась ориентация $\mathbb{R}^{2n}$, заданная ориентациями этой упорядоченной пары пространств. Если эта ориентация не изменяется, то в случае неориентируемого многообразия M^n к одной из кривых γ_1 и γ_2 можно добавить участок, при обходе вдоль которого изменяется ориентация (изменение ориентации касательного пространства влечёт изменение ориентации нормального пространства). В случае ориентируемого многообразия M^n нечётной размерности n кривые γ_1 и γ_2 надо заменить на кривые γ_1' и γ_2', где γ_1' выходит из точки p по кривой γ_1, а приходит в точку q по кривой γ_2 (γ_2' выходит по γ_2, а приходит по γ_1). В результате произойдёт перестановка пространств в упорядоченной паре, а это в случае нечётного n приводит к изменению ориентации.

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно доказать, что при $n > 2$ любое непрерывное отображение $S^n \to M^{2n}$, где M^{2n} — односвязное многообразие, гомотопно вложению. Но оказывается, что не любое отображение $S^2 \to M^4$ где M^4 — односвязное многообразие, гомотопно вложению. Соответствующий пример приведён в [Ke1].

Докажем теперь, что любое замкнутое двумерное многообразие можно вложить в $\mathbb{R}^4$. Ясно, что сферу с g ручками можно вложить даже в $\mathbb{R}^3$. Ясно также, что если M_2^1 и M_2^2 можно вложить в $\mathbb{R}^4$, то $M_2^1 \# M_2^1$ тоже можно вложить в $\mathbb{R}^4$. Поэтому достаточно доказать, что $\mathbb{R}P^2$ можно вложить в $\mathbb{R}^4$.

Вложение $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^4$ можно построить следующим образом. Рассмотрим отображение единичной сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^4$, заданное формулой $(x, y, z) \mapsto (xy, yz, zx, x^2 - y^2)$. Покажем, что это отображение индуцирует вложение $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^4$, т.е. это отображение является погружением и прообраз каждой точки состоит в точности из двух диаметрально противоположных точек сферы.

Докажем сначала утверждение о прообразе. Если $abc \neq 0$, то из равенств $xy = a$, $yz = b$, $zx = c$ следует, что $x = \pm\sqrt{ac/b}$, $y = a/x$, $z = c/x$. Если $a = b = c = 0$, то два из чисел x, y, z равны 0, а третье равно ± 1. Остаётся рассмотреть случай, когда два из чисел a, b, c равны 0, а третье число отлично от нуля. Этот случай соответствует тому, что одно из чисел x, y, z равно 0, а два других отличны от нуля. Теперь нам нужно привлечь равенство $x^2 - y^2 = d$ (или эквивалентное ему равенство $2x^2 + z^2 = 1 + d$). Если $x = 0$, то $y = \pm\sqrt{-d}$ и $z = b/y$. Если $y = 0$, то $x = \pm\sqrt{d}$ и $z = c/x$. Если $z = 0$, то $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + d}$ и $y = a/x$.

Докажем теперь, что построенное отображение $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ является погружением, т.е. в каждой точке $(x, y, z) \in S^2$ матрица Якоби этого отображения имеет ранг 2. Проективную плоскость можно покрыть тремя картами с координатами (x, y), (x, z) и (y, z); в этих картах, соответственно, $z \neq 0$, $y \neq 0$ и $x \neq 0$. В первой карте матрица Якоби отображения f имеет вид

$$\begin{pmatrix} y & -\frac{x}{z} & z - \frac{x^2}{z} & 2x \\ x & z - \frac{y^2}{z} & -\frac{y}{z} & -2y \end{pmatrix}.$$

Матрица, образованная первым и последним столбцом, вырожденная тогда и только тогда, когда $x^2 + y^2 = 0$, т.е. $x = y = 0$ и $z = \pm 1$. Но в таком случае матрица, образованная вторым и третьим столбцом, невырожденная. Во второй карте матрица Якоби отображения f имеет

вид
$$\begin{pmatrix} -\frac{x}{y} & y-\frac{x^2}{y} & z & 4x \\ y-\frac{z^2}{y} & -\frac{z}{y} & x & 2z \end{pmatrix}.$$
При этом нас интересуют лишь те точки, для которых $z=0$. В таком случае матрица, образованная двумя последними столбцами, невырожденная при $x \neq 0$. А если $z=0$ и $x=0$, то матрица, образованная двумя первыми столбцами, невырожденная. Для третьей карты невырожденность матрицы Якоби в точке $x=\pm 1$, $y=z=0$ доказывается аналогично.

6.3.2. Нормальная степень погружения

Пусть $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ — погружение замкнутого связного ориентированного многообразия. Из ориентированности M^n следует, что в каждой точке $x \in f(M^n)$ однозначно определён единичный нормальный вектор $N(x)$. Поэтому отображение f индуцирует отображение $N: M^n \to S^n$. Степень этого отображения называют *нормальной степенью* погружения f. Задачей о том, какой может быть нормальная степень погружения f, занимались, в частности, Хопф [Ho1], [Ho2] и Милнор [Mi1]. Здесь мы изложим некоторые из их результатов.

Прежде всего заметим, что если нормальная степень погружения $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ равна d, то степень погружения sf, где $s: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ — симметрия относительно гиперплоскости, равна $(-1)^n d$. Действительно, если $e_1, \ldots, e_n, N(x)$ — положительно ориентированный базис, то $se_1, \ldots, se_n, sN(x)$ — отрицательно ориентированный базис, поскольку отображение s изменяет ориентацию. Значит, для отображения sf новое отображение $M^n \to S^n$ представляет собой композицию старого отображения $N: M^n \to S^n$ и отображения $-s|_{S^n}$. Отображение $s|_{S^n}$ имеет степень -1, а антиподальное отображение $S^n \to S^n$ имеет степень $(-1)^{n-1}$.

Для двух ориентированных многообразий M_1^n и M_2^n можно построить ориентированное многообразие $M_1^n \# M_2^n$, называемое их *связной суммой*. Это делается следующим образом. Пусть $D_1^n \subset M_1^n$ и $D_2^n \subset M_2^n$ — единичные шары, вложенные в эти многообразия. Вырежем из этих шаров шары радиуса $1/2$, а оставшиеся цилиндры $I \times S_1^{n-1}$ и $I \times S_2^{n-1}$ склеим с сохранением ориентации (рис. 6.22). Опишем эту конструкцию более формально. Пусть $i_1: D^n \to M_1^n$ и $i_2: D^n \to M_2^n$ — вложения, причём i_1 сохраняет ориентацию, а i_2 изменяет ориентацию. Возьмём $M_1^n \setminus i_1(0)$ и $M_2^n \setminus i_2(0)$ и отождествим точку $i_1(tu)$ с точкой $i_2\big((1-t)u\big)$

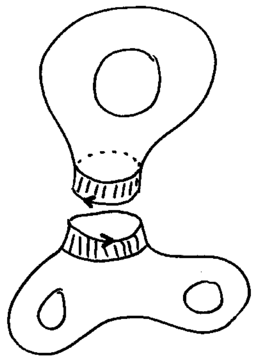

Рис. 6.22. Связная сумма

для каждого единичного вектора u и каждого t, где $0 < t < 1$. Отображение $i_1(tu) \mapsto i_2\big((1-t)u\big)$ сохраняет ориентацию, поэтому в полученном многообразии $M_1^n \# M_2^n$ можно выбрать ориентацию, согласованную с ориентациями многообразий M_1^n и M_2^n. Ясно, что $M^n \# S^n \approx M^n$; в частности, $S^n \# S^n \approx S^n$.

Теорема 6.3.3. *Если M_1^n и M_2^n можно погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$ с нормальными степенями d_1 и d_2, то $M_1^n \# M_2^n$ можно погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$ с нормальной степенью $d_1 + d_2 - 1$.*

Доказательство. Возьмём произвольные точки $x_1 \in M_1^n$ и $x_2 \in M_2^n$. Переместим многообразие M_2^n посредством собственного евклидова движения $\mathbb{R}^{n+1}$ так, чтобы нормальные векторы в точках x_1 и x_2 были направлены навстречу друг другу (рис. 6.23); это нужно для согласованности ориентаций. После этого можно сделать перестройку и получить погружение многообразия $M_1^n \# M_2^n$. Чтобы вычислить нормальную степень этого погружения, достаточно проследить, сколько раз принимается какое-то определённое значение при отображении $M_1^n \# M_2^n \to S^n$. Удобно проследить за значением $N(x_1)$. Если предварительно пошевелить многообразие M_1^n, то можно считать, что в точке x_1 значение $N(x_1)$ при отображении $M_1^n \to S^n$ даёт вклад $+1$. Это соответствует тому, что в окрестности точки x_1 многообразие M_1^n выглядит как сфера и $N(x_1)$ — внешняя нормаль к этой сфере. В такой ситуации при перестройке новых значений $N(x_1)$ не появляется. Таким образом, остаются все значения $N(x_1)$ отображений $M_1^n \to S^n$ и $M_2^n \to S^n$, кроме

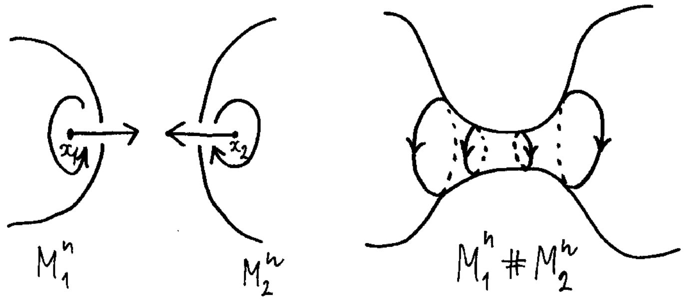

Рис. 6.23. Погружение связной суммы

значения в точке x_1. В результате получаем, что нормальная степень построенного погружения равна $d_1 + d_2 - 1$. $\square$

Теорема 6.3.4 (Хопф). *При нечётном n сферу S^n можно погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$ с произвольной нечётной нормальной степенью.*

Доказательство. Применив симметрию относительно гиперплоскости, построим погружение S^n в $\mathbb{R}^{n+1}$ с нормальной степенью -1. Возьмём два экземпляра так погружённой сферы и применим теорему 6.3.3. В результате получим погружение $S^n \# S^n \approx S^n$ с нормальной степенью $(-1) + (-1) - 1 = -3$. Затем построим погружение S^n с нормальной степенью $(-3) + (-1) - 1 = -5$ и т.д.

Мы построили погружения S^n в $\mathbb{R}^{n+1}$ со всеми отрицательными нечётными степенями. Применив симметрию относительно гиперплоскости, получим погружения со всеми положительными нечётными степенями. $\square$

Следствие. *Пусть n нечётно и многообразие M^n погружено в $\mathbb{R}^{n+1}$ с нормальной степенью d. Тогда M^n можно погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$ с любой нормальной степенью, имеющей ту же самую чётность, что и d.*

Доказательство. Возьмём погружение S^n в нормальной степенью $2k + 1$ и построим погружение $M^n \approx M^n \# S^n$ с нормальной степенью $d + 2k$. $\square$

Теорема 6.3.5. *Если замкнутое ориентированное многообразие M^n можно погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$ с нулевой нормальной степенью, то M^n параллелезуемо.*

Доказательство. Легко проверить, что $TM^n = N_*(TS^n)$, т.е. касательное расслоение M^n индуцировано из касательного расслоения S^n посредством отображения $N : M^n \to S^n$. Действительно, $N_*(TS^n)$ состоит из пар (x, v), где $x \in M^n$ и $v \perp N(x)$.

Если степень отображения $N : M^n \to S^n$ равна нулю, то согласно теореме Хопфа отображение N гомотопно постоянному отображению. Отображение, гомотопное постоянному отображению, индуцирует тривиальное расслоение. $\square$

Следствие. *Предположим, что многообразие M^n не параллелезуемо и n нечётно. Тогда если M^n можно погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$, то его можно погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$ с любой нечётной нормальной степенью, но нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$ ни с какой чётной нормальной степенью.*

Доказательство. Помимо теоремы 6.3.5 нужно воспользоваться следствием теоремы 6.3.4. $\square$

Задача 6.3.1. *Докажите, что если сфера S^n параллелезуема, то любое замкнутое ориентируемое многообразие M^n, которое можно погрузить в $\mathbb{R}^{n+1}$, тоже параллелезуемо.*

Вложение многообразия M^n в $\mathbb{R}^{n+1}$ является, в частности, погружением. Поэтому для вложения тоже можно рассмотреть нормальную степень. Нормальная степень вложения удовлетворяет довольно сильным условиям. Чтобы сформулировать эти условия, введём величину $\Sigma(M^n) = \sum_{i \geqslant 0} \dim H_i(M^n; F)$, где F – аддитивная группа произвольного поля.

Теорема 6.3.6 (Милнор [Mi1]). *Если d — нормальная степень вложения M^n в $\mathbb{R}^{n+1}$, то $d \equiv \frac{1}{2}\Sigma(M^n) \pmod 2$ и $|d| \leqslant \frac{1}{2}\Sigma(M^n)$.*

Доказательство. Множество $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M^n$ состоит из двух связных компонент, одна из которых ограниченная; обозначим её A. Можно считать, что M^n ориентировано так, что нормальный вектор направлен наружу по отношению к A. Нормальная степень d равна $\chi(\bar{A})$. Это доказывается точно так же, как и основная лемма из доказательства теоремы Пуанкаре–Хопфа (часть I, теорема 18.6). Непосредственно из определений видно, что $\chi(\bar{A}) \equiv \Sigma(\bar{A}) \pmod 2$ и $-\Sigma(\bar{A}) \leqslant \chi(\bar{A}) \leqslant \Sigma(\bar{A})$. Более того, $\dim H_0(\bar{A}; F) = 0$, поэтому $2 - \Sigma(\bar{A}) \leqslant \chi(\bar{A})$.

Докажем теперь, что $\Sigma(\bar{A}) = \frac{1}{2}\Sigma(M)$. Пусть S^{n+1} — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^{n+1}$. Положим $B = S^{n+1} \setminus A$. Согласно теореме двойственности Александера $\tilde{H}^k(M^n) \cong \tilde{H}_{n-k}(S^{n+1} \setminus M^n)$ при

$0 \leqslant k \leqslant n$. Если $1 \leqslant k \leqslant n-1$, то $\dim H_{n-k}(M^n) = \dim H^k(M^n) = \dim H_{n-k}(S^{n+1} \setminus M^n) = \dim H_{n-k}(A) + \dim H_{n-k}(B)$. Из равенства $\dim \tilde{H}^0(M^n) = 0$ следует, что $\dim H_n(A) = \dim H_n(B) = 0$. Следовательно, $\Sigma(M) = \Sigma(A) + \Sigma(B)$, поскольку $\dim H_0(M^n) + \dim H_n(M^n) = 2 = \dim H_0(A) + \dim H_0(B)$. Теорему двойственности Александера можно применить не только к M^n, но и к $\bar{A}$. В результате получим, что $\tilde{H}^k(\bar{A}) \cong \tilde{H}_{n-k}(S^{n+1} \setminus \bar{A}) = \tilde{H}_{n-k}(B)$ при $0 \leqslant k \leqslant n$, а значит, $\Sigma(\bar{A}) = \Sigma(B)$. Ясно также, что $\Sigma(\bar{A}) = \Sigma(A)$, поскольку пространства A и $\bar{A}$ гомотопически эквивалентны. В итоге получаем, что $2\Sigma(M^n) = \Sigma(A)$. □

6.4. Комплексные многообразия

6.4.1. Полные пересечения

Пусть Y — n-мерное комплексное многообразие, $X \subset Y$ — комплексное подмногообразие размерности $n-1$. Это означает, что X покрыто открытыми в Y множествами U_i так, что в U_i множество X задаётся уравнением $f_i = 0$, где f_i — голоморфная функция, причём $\operatorname{grad} f_i(x) \neq 0$ для всех $x \in U_i \cap X$. Можно считать, что множества U_i покрывают Y (если $U_i \cap X = \varnothing$, то можно положить $f_i = \mathrm{const} \neq 0$). Подмногообразию $X \subset Y$ можно сопоставить 1-мерное комплексное расслоение[1] $\xi(X)$ над Y с функциями перехода $g_{ij}(x) = f_i(x)/f_j(x)$. Если $x \in X$, то подразумевается, что $g_{ij}(x) = \lim\limits_{y \notin X,\, y \to x} f_i(x)/f_j(x)$; этот предел равен коэффициенту пропорциональности векторов $\operatorname{grad} f_i(x)$ и $\operatorname{grad} f_j(x)$.

Расслоение $\xi(X)$ не зависит от выбора функций f_i. Действительно, пусть в U_i множество X задаётся уравнениями $f_i = 0$ и $\tilde{f}_i = 0$. Тогда функции $h_i = f_i/\tilde{f}_i$ не обращаются в нуль на U_i и $\tilde{g}_{ij} = \frac{h_j}{h_i} g_{ij}$.

Расслоение $\xi(X)$ имеет голоморфное сечение, обращающееся в нуль в точности на множестве X. На множестве U_i это сечение задаётся функцией f_i. Действительно, так мы получаем корректно определённое сечение, поскольку $f_i = g_{ij} f_j$.

Пример 6.4.1. *Пусть X_d — неособая гиперповерхность степени d в $\mathbb{C}P^n$, заданная однородным уравнением $F(z_0, \ldots, z_n) = 0$ степени d.*

[1] В алгебраической геометрии это расслоение называют *линейным расслоением, ассоциированным с дивизором* X, и для него используют обозначение $[X]$. Мы не пользуемся этим обозначением, потому что в топологии $[X]$ обозначает фундаментальный класс многообразия X.

Тогда $\big(\xi(X_d)\big)^* \cong \underbrace{\gamma_n^1 \otimes \ldots \otimes \gamma_n^1}_{d}$.

Доказательство. В карте U_i гиперповерхность X_d задаётся уравнением $f_i(w_0, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, w_n) = 0$, где

$$f_i(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}) = \frac{F(z_0, \ldots, z_n)}{z_i^d}.$$

Значит, расслоение $\xi(X_d)$ задаётся функциями перехода $g_{ij} = \frac{f_i}{f_j} = \left(\frac{z_j}{z_i}\right)^d$. А каноническое расслоение γ_n^1 над $\mathbb{C}P^n$ задаётся функциями перехода $g_{ij} = \frac{z_i}{z_j}$ (пример 5.1.9 на с. 306). □

В частности, для гиперповерхности $\mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$, заданной линейным уравнением, расслоение $\xi(\mathbb{C}P^n)$ изоморфно расслоению, описанному в примере 5.1.11 на с. 307.

Несложно проверить, что ограничение расслоения $\xi(X)$ на X является нормальным (в смысле эрмитовой метрики) расслоением к X в Y. Действительно, рассмотрим расслоение $\bar{\nu}$ над X, слоями которого над U_i служат векторы, пропорциональные $\operatorname{grad} f_i$. Если $\lambda_i \operatorname{grad} f_i = \lambda_j \operatorname{grad} f_j$, то $\lambda_i = \frac{f_j}{f_i}\lambda_j$. Поэтому расслоение $\bar{\nu}$ задаётся функциями перехода $g_{ij} = f_j/f_i$. Расслоение $\bar{\nu}$ комплексно сопряжено нормальному расслоению ν, поэтому расслоение ν задаётся функциями перехода $g_{ij} = f_i/f_j$, которые совпадают с функциями перехода для расслоения $\xi(X)$.

Пример 6.4.2. *Пусть X_d — неособая гиперповерхность степени d в $\mathbb{C}P^n$. Тогда*

$$c(X_d) = (1+\tilde{\alpha})^{n+1}(1 - d\tilde{\alpha} + d^2\tilde{\alpha}^2 - d^3\tilde{\alpha}^3 + \ldots),$$

где $\tilde{\alpha}$ — ограничение канонической[1] *образующей группы $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ на X_d (сумма здесь конечная, поскольку $\tilde{\alpha}^n = 0$).*

Доказательство. Пусть $j : X_d \to \mathbb{C}P^n$ — естественное вложение. Тогда $\tilde{\alpha} = j^*\alpha$ и $j^*\big(\xi(X_d)\big) = \nu_{X_d}$ — нормальное расслоение к X_d в $\mathbb{C}P^n$. Поэтому $j^*(\tau_{\mathbb{C}P^n}) = \tau_{X_d} \oplus \nu_{X_d} = \tau_{X_d} \oplus j^*\big(\xi(X_d)\big)$. Учитывая, что $c\big(\xi(X_d)\big) = -dc(\gamma_n^1) = d\alpha$ и $c(\mathbb{C}P^n) = (1+\alpha)^{n+1}$, получаем $(1+\tilde{\alpha})^{n+1} = c(X_d)(1 + d\tilde{\alpha})$, а значит,

$$\begin{aligned} c(X_d) &= (1+\tilde{\alpha})^{n+1}(1+d\tilde{\alpha})^{-1} = \\ &= (1+\tilde{\alpha})^{n+1}(1 - d\tilde{\alpha} + d^2\tilde{\alpha}^2 - d^3\tilde{\alpha}^3 + \ldots). \end{aligned}$$

[1] То есть принимающей значение $+1$ на $\mathbb{C}P^2$ с канонической комплексной ориентацией.

□

Пример 6.4.3. *Пусть X_d — неособая гиперповерхность степени d в $\mathbb{C}P^n$. Тогда*

$$\chi(X_d) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k d^{k+1}\binom{n+1}{n-1-k}.$$

Доказательство. В примере 6.4.2 мы вычислили полный класс Чженя многообразия X_d. В частности,

$$c_{n-1}(X_d) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k d^k\binom{n+1}{n-1-k}\tilde{\alpha}^{n-1}.$$

Чтобы вычислить $\chi(X_d) = \langle c_{n-1}(X_d), [X_d]\rangle$, остаётся вычислить $\langle\tilde{\alpha}^{n-1}, [X_d]\rangle$.

Число $\langle\tilde{\alpha}^{n-1}, [X_d]\rangle$ равно числу точек пересечения в $\mathbb{C}P^n$ цикла, двойственного α^{n-1}, с X_d (с учётом знака). Цикл, двойственный α^{n-1}, — это комплексная прямая $\mathbb{C}P^1$. В общем положении прямая $\mathbb{C}P^1$ пересекает поверхность степени d в d точках, поскольку ограничение на прямую однородного многочлена F от $n+1$ переменных является однородным многочленом степени d от двух переменных, которому соответствует неоднородный многочлен степени d от одной переменной. Все знаки для точек пересечения здесь положительные, поскольку мы имеем дело с комплексными многообразиями. Таким образом, гомологический класс $[X_d]$ равен $d[\mathbb{C}P^{n-1}]$. □

В частности, для гладкой алгебраической кривой X_d степени d в $\mathbb{C}^2$ получаем $\chi(X_d) = \binom{3}{1}d - \binom{3}{0}d^2 = 3d - d^2$. Поэтому X_d — сфера с g ручками, где $2 - 2g = 3d - d^2$, т.е. $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Аналогично можно вычислить полный класс Чженя и эйлерову характеристику не только неособой гиперповерхности, но и пересечения неособых гиперповерхностей общего положения, как это сделано в [Ch]. *Полным пересечением* называют n-мерное комплексное многообразие $M = M_1 \cap \ldots \cap M_p \subset \mathbb{C}P^{n+p}$, где $M_1, \ldots, M_p$ — гиперповерхности, заданные однородными уравнениями $f_1 = 0, \ldots, f_p = 0$, для которых векторы $\operatorname{grad} f_1, \ldots, \operatorname{grad} f_p$ линейно независимы в каждой точке $x \in M$.

Пример 6.4.4. *Пусть $M = M_1 \cap \ldots \cap M_p \subset \mathbb{C}P^{n+p}$ — полное пересечение, причём степени гиперповерхностей $M_1, \ldots, M_p$ равны $d_1, \ldots, d_p$. Предположим, что гиперповерхности $M_1, \ldots, M_p$ неособые. Тогда*

$$\chi(M) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+p+1}{n-k}\sigma_k\right)\prod_{i=1}^{p} d_i,$$

где $\sigma_k = \sum_{a_1+\ldots+a_p=k} d_1^{a_1} \ldots d_p^{a_p}$.

Доказательство. Пусть $j : M \to \mathbb{C}P^{n+p}$ — естественное вложение, $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^{n+p}; \mathbb{Z})$ — каноническая образующая и $\tilde{\alpha} = j^*\alpha$. Тогда $c(\mathbb{C}P^{n+p}) = (1+\alpha)^{n+p+1}$ и $j^*\tau_{(\mathbb{C}P^{n+p})} \cong \tau_M \oplus \nu$, где ν — нормальное расслоение к M в $\mathbb{C}P^{n+p}$. Ясно, что ν — прямая сумма расслоений $\xi(M_i)$, поэтому $c(\nu) = (1 + d_1\tilde{\alpha}) \ldots (1 + d_p\tilde{\alpha})$. Следовательно,

$$c(M) = (1+\tilde{\alpha})^{n+p+1}(1+d_1\tilde{\alpha})^{-1} \ldots (1+d_p\tilde{\alpha})^{-1}.$$

В частности,

$$c_n(M) = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+p+1}{n-k} \sigma_k \right) \tilde{\alpha}^n.$$

Остаётся доказать, что $\langle \tilde{\alpha}^n, [M] \rangle = d_1 \ldots d_p$, т.е. p-мерное подпространство $\mathbb{C}^p$ общего положения пересекает M в $d_1 \ldots d_p$ точках. Это можно сделать разными способами. Во-первых, можно воспользоваться тем, что цикл M_i гомологичен $d_i[\mathbb{C}P^{n+p-1}]$. Действительно, рассмотрим пересечение p экземпляров $\mathbb{C}P^{n+p-1}$ общего положения в $\mathbb{C}P^{n+p}$ (это пересечение равно $\mathbb{C}P^n$). Индекс пересечения $[\mathbb{C}P^p]$ и $[M]$ равен индексу пересечения $[\mathbb{C}P^p]$ и $[\mathbb{C}P^n]$, умноженному на $d_1 \ldots d_p$. Во-вторых, можно воспользоваться методом исключения переменных, который основан на вычислении результанта двух многочленов. Применяя метод исключения переменных к ограничениям однородных формы степеней $d_1, \ldots, d_p$ на p-мерное подпространство, мы получим многочлен степени $d_1 \ldots d_p$. □

Замечание. Более аккуратные рассуждения показывают, что предположение о том, что гиперповерхности $M_1, \ldots, M_p$ неособые, можно отбросить: см. [Az].

6.4.2. Гомологии гиперповерхности $z^{a_0} + \ldots + z^{a_0} = 1$

Пусть $a_0, \ldots, a_n$ — натуральные числа, $a = (a_0, \ldots, a_n)$. Рассмотрим в $\mathbb{C}^{n+1}$ гиперповерхность V_a, заданную уравнением

$$z^{a_0} + \ldots + z^{a_0} = 1.$$

В [Фа] Фам вычислил группы гомологий пространства V_a. Для этого он указал в V_a деформационный ретракт U_a, гомологии которого легко вычисляются. В [Hi3] показано, что пространство U_a гомотопически

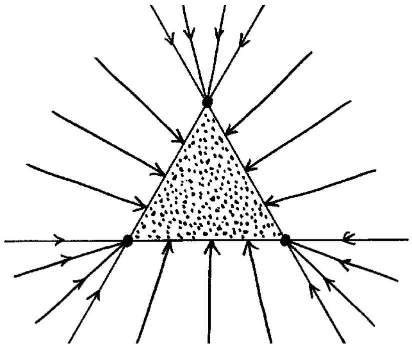

Рис. 6.24. Деформационная ретракция

эквивалентно букету $(a_0 - 1)\dots(a_n - 1)$ сфер размерности n. Таким образом,

$$\tilde{H}_k(V_a) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n; \\ \mathbb{Z}^{((a_0-1)\dots(a_n-1)} & \text{при } k = n. \end{cases}$$

Подпространство $U_a \subset V_a$ определяется так:

$$U_a = \{x \in V_a \cap \mathbb{R}^{n+1} |\, x_i^{a_i} \geqslant 0 \text{ для } i = 0, \dots, n\}.$$

Деформационная ретракция V_a на U_a строится следующим образом. Рассмотрим отображение $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$, заданное формулой

$$(z_0, \dots, z_n) \mapsto (z_0^{a_0}, \dots, z_n^{a_n}) = (u_0, \dots, u_n).$$

Образом V_a при этом отображении служит гиперплоскость X в $\mathbb{C}^{n+1}$, заданная уравнением $u_0 + \dots + u_n = 1$. Отображение $p: V_a \to X$ является разветвлённым $(a_0 \dots a_n)$-листным накрытием с ветвлением над пересечениями X с гиперплоскостями $u_i = 0$. Стандартный симплекс Δ^n в $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, заданный неравенствами $t_0 \geqslant 0, \dots, t_n \geqslant 0$ и уравнением $t_0 + \dots + t_n = 1$, является деформационным ретрактом гиперплоскости X. Действительно, сначала мы строим деформационную ретракцию $\mathbb{C}^{n+1}$ на $\mathbb{R}^{n+1}$, затем строим деформационную ретракцию $\mathbb{R}^{n+1}$ на гиперплоскость $X \cap \mathbb{R}^{n+1}$, а потом строим деформационную ретракцию гиперплоскости на симплекс Δ^n, как показано на рис. 6.24 (для $n = 2$)

При такой деформационной ретракции тип ветвления над каждой движущейся точкой остаётся неизменным, поэтому деформационную ретракцию X на Δ^n можно поднять до деформационной ретракции V_a

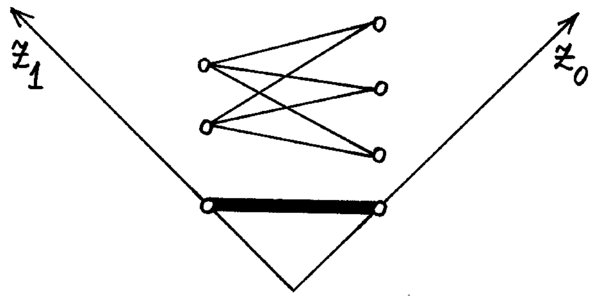

Рис. 6.25. Разветвлённое накрытие

на прообраз Δ^n при разветвлённом накрытии $p: V_a \to X$. Ясно, что этот прообраз совпадает с U_a.

Пример 6.4.5. *Для гиперповерхности $z_0^n + z_1^m = 1$ пространство U_a является графом $K_{n,m}$.*

Доказательство. Соответствующее разветвлённое накрытие над 1-мерным симплексом Δ^1 для $n = 2$, $m = 3$ изображено на рис. 6.25. □

Докажем теперь, что пространство U_a гомотопически эквивалентно букету $(a_0 - 1)\dots(a_n - 1)$ сфер размерности n. Пространство U_a можно отождествить с пространством наборов $(u_0t_0, \dots, u_nt_n)$, где u_i — корень из единицы степени a_i, $t_i \geqslant 0$ и $\sum t_i = 1$. Это означает, что U_a — джойн $\mathbb{Z}_{a_0} * \mathbb{Z}_{a_1} * \dots * \mathbb{Z}_{a_n}$, где $\mathbb{Z}_m$ — дискретное пространство, состоящее из m точек. Но $\mathbb{Z}_m = \underbrace{S^0 \vee \dots \vee S^0}_{m-1}$, поэтому

$$\mathbb{Z}_{a_0} * \mathbb{Z}_{a_1} * \dots * \mathbb{Z}_{a_n} \sim \underbrace{S^n \vee \dots \vee S^n}_{(a_0-1)\dots(a_n-1)},$$

поскольку $\underbrace{S^0 * \dots * S^0}_{n+1} = S^n$; здесь мы пользуемся также тем, что

$$(X_1 \vee X_2) * Y \sim (X_1 * Y) \vee (X_2 * Y).$$

Задача 6.4.1. *Будем рассматривать $\mathbb{Z}_m$ как группу корней степени m из единицы. Тогда $U_a = \mathbb{Z}_{a_0} * \dots * \mathbb{Z}_{a_n}$ — n-мерный симплициальный комплекс, причём его n-мерные симплексы находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с элементами группы $\mathbb{Z}_a = \mathbb{Z}_{a_0} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{a_n}$, т.е. каждый n-мерный симплекс получается под* *действием элемента группы $\mathbb{Z}_a$ на симплекс e, соответствующий единичному элементу группы $\mathbb{Z}_a$. Пусть $w_0, \ldots, w_n$ — элементы группы $\mathbb{Z}_a$, соответствующие образующим групп $\mathbb{Z}_{a_0}, \ldots, \mathbb{Z}_{a_n}$.*

а) Докажите, что $\varepsilon = (1 - w_0) \ldots (1 - w_n)e$ — цикл.

б) Докажите, что ядро I_a отображения групповой алгебры $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_a)$ в себя, заданного формулой $w \mapsto w(1 - w_0) \ldots (1 - w_n)$, порождено элементами

$$1 + w_i + w_i^2 + \ldots + w_i^{a_i - 1}, \text{ где } i = 0, 1, \ldots, n.$$

в) Докажите, что элементы

$$w_0^{k_0} w_1^{k_1} \ldots w_n^{k_n} \varepsilon, \text{ где } 0 \leqslant k_i \leqslant a_i - 2,$$

образуют базис целочисленных гомологий пространства U_a.

6.5. Группы Ли и H-пространства

6.5.1. Некоторые свойства групп Ли

Группой Ли называют многообразие G, которое одновременно является группой, причём отображения $G \times G \to G$ и $G \to G$, заданные формулами $(g, h) \mapsto gh$ и $g \mapsto g^{-1}$, являются гладкими. Чтобы не углубляться в тонкости теории групп Ли, не имеющие отношения к алгебраической топологии, мы ограничимся рассмотрением матричных групп Ли, которые являются подмногообразиями в пространстве квадратных матриц над полем $\mathbb{R}$, причём умножение в группе — это обычное умножение матриц, а единичный элемент группы — единичная матрица I.

Каждой квадратной матрице A можно сопоставить матрицу $\exp A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$ (доказательство сходимости этого ряда и доказательства основных свойств отображения $\exp A$ приведены в [Пр2]). Отображение $\exp A$ диффеоморфно отображает некоторую окрестность нулевой матрицы на окрестность единичной матрицы. Касательный вектор к кривой $\exp(tA)$ при $t = 0$ равен A. Поэтому касательное пространство к (матричной) группе Ли в единичном элементе — это линейное пространство, натянутое на прообраз единичного элемента при отображении exp; это линейное пространство называют *алгеброй Ли*, соответствующей данной группе Ли. Связная группа Ли полностью задаётся окрестностью единичного элемента, поэтому она задаётся своей алгеброй Ли (напомним ещё раз, что здесь речь идёт о матричных группах и алгебрах Ли).

Группа Ли коммутативна тогда и только тогда, все матрицы её алгебры Ли попарно коммутируют.

Задача 6.5.1. *Докажите, что образ при отображении* exp *линейного подпространства* V *в пространстве матриц является группой Ли тогда и только тогда, когда для любых двух матриц* $A, B \in V$ *матрица* $[A, B] = AB - BA$ *лежит в* V.

Группу Ли $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n} = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ называют *тором.*

Теорема 6.5.1. *Связная коммутативная группа Ли* G *изоморфна* $T^n \times \mathbb{R}^m$.

Доказательство. Для коммутативной группы Ли G отображение $\exp : T_eG \to G$ является гомоморфизмом групп, поскольку если $AB = BA$, то $e^A e^B = e^{A+B}$. Для связной группы Ли этот гомоморфизм является эпиморфизмом. Поэтому $G \cong T_eG/K$, где $K = \operatorname{Ker}\exp$. Группа K дискретна, поскольку exp — диффеоморфизм в окрестности нуля. Значит, эта группа является дискретной подгруппой в $T_eG \cong \mathbb{R}^{n+m}$. В $\mathbb{R}^{n+m}$ можно выбрать базис так, что элементы K будут иметь вид $(k_1, \ldots, k_n, 0, \ldots, 0)$, где $k_i \in \mathbb{Z}$. Поэтому $\mathbb{R}^{n+m}/K \cong T^n \times \mathbb{R}^m$. □

Следствие. *Связная компактная коммутативная группа Ли является тором.*

Теорема 6.5.2. *Замкнутая подгруппа* H *группы Ли* G *является подмногообразием.*

Доказательство. Зададим в пространстве матриц какую-нибудь норму, например, $\|A\| = \max|a_{ij}|$, где $A = (a_{ij})$. Предположим, что в пространстве T_eG задана последовательность матриц A_n так, что $\exp A_n \in H$, $\|A_n\| \to 0$ и $A_n/\|A_n\| \to A$. Покажем, что тогда $e^{tA} \in H$. Поскольку $\|A_n\| \to 0$, можно выбрать целые числа m_n так, что $m_n\|A_n\| \to t$. Тогда $m_nA_n \to tA$ и $e^{m_nA_n} \to e^{tA}$. Но $e^{m_nA_n} = (e^{A_n})^{m_n} \in H$, а группа H замкнута. Поэтому $e^{tA} \in H$.

Пусть W — пространство всех матриц вида tA, где матрица A получается указанным выше предельным переходом. Покажем, что W — линейное пространство. Для этого достаточно проверить, что если $A, B \in W$, то $A + B \in W$. В малой окрестности единичной матрицы отображение exp обратимо, поэтому для малых t имеет место равенство $e^{tA}e^{tB} = e^{F(t)}$, где $F(t)$ — гладкая кривая в T_eG, причём $F(0) = 0$. Учитывая, что $e^{tA}e^{tB} = I + t(A + B) + \ldots$, получаем, что $F(t)/t \to A + B$ при $t \to 0$. Рассмотрим последовательность матриц $C_n = F(1/n)$. Ясно, что $\|C_n\| \to 0$, $e^{C_n} \in H$, поскольку $e^{tA}e^{tB} \in H$ для всех t, и $C_n/\|C_n\| \to \lambda(A + B)$, где $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|F\left(\frac{1}{n}\right)\right|^{-1}$. Значит, $A + B \in W$.

Докажем, что множество $\exp W$ содержит окрестность единичного элемента в H. Представим пространство T_eG в виде прямой суммы $W \oplus W'$ и положим $\varphi(w, w') = e^w e^{w'}$. Отображение φ диффеоморфно отображает некоторую окрестность нулевой матрицы в T_eG на окрестность единичной матрицы в G. Это следует, из того, что $\varphi(T_eG) \subset G$ и в нуле дифференциал отображения φ совпадает с дифференциалом отображения exp, поскольку $e^w e^{w'} \approx e^{w+w'}$ при малых w и w'. Предположим, что существует последовательность точек (w_n, w_n'), для которой $\varphi(w_n, w_n') \in H$, $(w_n, w_n') \to 0$ и $w_n' \neq 0$. Тогда $e^{w_n'} \in H$, поскольку $e^{w_n} e^{w_n'} \in H$ и $e^{w_n} \in H$. Выберем подпоследовательность w_{n_k}' так, чтобы последовательность $w_{n_k}' / \|w_{n_k}'\|$ имела предел w'. С одной стороны, $w' \in W'$ и $w' \neq 0$. С другой стороны, $w' \in W$. Приходим к противоречию.

Итак, мы убедились, что в G есть окрестность $U \ni e$, пересечение которой с H является подмногообразием в U. Для любой точки $h \in H$ можно рассмотреть окрестность hU. □

Теорема 6.5.3. *Пусть тор T^n действует на векторном пространстве V. Тогда в V существует скалярное произведение, инвариантное относительно действия тора, т.е. $(u, v) = (tu, tv)$ для любого элемента $t \in T^n$ и любых векторов $u, v \in V$.*

Доказательство. Возьмём в V произвольное скалярное произведение $(u, v)_1$, рассмотрим функцию на торе $f(s) = (su, sv)_1$ и положим $(u, v) = \int_{T^n} f(s)\, d\mu$, где $d\mu = dx_1 \ldots dx_n$ — каноническая мера на торе T^n. Эта мера инвариантна относительное сдвигов тора, поэтому если $g(s) = f(s + t)$, то $\int_{T^n} g(s)\, d\mu = \int_{T^n} f(s)\, d\mu$. Таким образом, $(u, v) = \int_{T^n} (su, sv)_1\, d\mu = \int_{T^n} g(s)\, d\mu = \int_{T^n} f(s)\, d\mu = \int_{T^n} \big((t + s)u, (t + s)v\big)_1\, d\mu = (tu, tv)$. □

6.5.2. Максимальные торы

Пусть G — топологическая группа. Элемент $g \in G$ называют *топологической образующей* группы G, если замыкание подгруппы, порождённой элементом g, совпадает со всей группой G.

Теорема 6.5.4. *Тор T^n имеет топологическую образующую.*

Доказательство. Пусть U_1, U_1, …— счётная база открытых множеств T^n. Назовём *кубом* в T^n образ куба в $\mathbb{R}^n$, заданного неравенством $|x_i - a_i| \leqslant \varepsilon$, при канонической проекции. Ясно, что куб — компактное подмножество тора. Назовём число $\min(1, 2\varepsilon)$ длиной ребра куба. Если длина ребра куба равна 1, то он совпадает с T^n.

Возьмём произвольный куб C_0. Предположим, что мы уже построили последовательность кубов $C_0 \supset C_1 \ldots \supset C_{k-1}$. Построим куб C_k следующим образом. Пусть длина ребра куба C_{k-1} равна ε. Выберем число $N(k)$ так, что $2N(k)\varepsilon > 1$. Тогда образ куба C_{k-1} при возведении в степень $N(k)$ совпадает с T^n. Поэтому можно выбрать куб $C_k \subset C_{k-1}$ так, что $C_k^{N(k)} \subset U_k$.

Пусть $g \in \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$. Тогда $g^{N(k)} \in U_k$, поэтому g — топологическая образующая тора T^n. □

Пусть G — связная компактная группа Ли. *Максимальным тором* называют подгруппу $T \subset G$, которая является тором и при этом максимальна в следующем смысле: если $T \subset T' \subset G$, где T' — тор, то $T = T'$.

Любой тор $T \subset G$ содержится в некотором максимальном торе. Действительно, если последовательность торов $T \subset T_1 \subset T_2 \subset \ldots G$ строго возрастающая, то их размерности строго возрастают. Это следует из того, что если n-мерное замкнутое многообразие является подмногообразием в n-мерном подмногообразии, то оно является подмножеством, которое одновременно открыто и замкнуто. Поэтому любая строго возрастающая последовательность торов конечна.

Пусть $S \subset G$ — произвольное подмножество группы G. *Нормализатором* S называют группу

$$N(S) = \{g \in G \mid gS = Sg\},$$

а *централизатором* S называют группу

$$Z(S) = \{g \in G \mid gs = sg \quad \forall s \in S\}.$$

Если $S \subset G$ — подгруппа, то S — нормальная подгруппа $N(S)$. Если G — группа Ли, а S — её подгруппа, то $N(S)$ и $Z(S)$ — замкнутые подгруппы, поэтому согласно теореме 6.5.2 они являются группами Ли.

Для любого элемента $g \in N(S)$ внутренний автоморфизм $x \mapsto gxg^{-1}$ переводит S в S, поэтому $N(S)$ действует на S.

Теорема 6.5.5. *Пусть $T \subset G$ — максимальный тор. Тогда:*

а) факторгруппа $N(T)/T$ конечна;

б) размерность пространства $G/N(T)$ чётна, $\chi\big(G/N(T)\big) = 1$ и $\chi(G/T) = |N(T)/T|$.

Доказательство. а) Рассмотрим отображение $N(T) \to \mathrm{Aut}(T)$, которое сопоставляет элементу $g \in N(T)$ автоморфизм $x \mapsto gxg^{-1}$. Группа $\mathrm{Aut}(T)$ дискретна, поскольку любой автоморфизм тора задаётся целочисленной матрицей с определителем ± 1 (автоморфизм тора переводит в себя целочисленную решётку). Поэтому связная компонента единичного элемента $N(T)_e$ отображается в тождественный автоморфизм, т.е. $N(T)_e \subset Z(T)$.

Пусть A — касательный вектор к $Z(T)$ в точке e. Рассмотрим подгруппу H, порождённую T и элементами вида e^{At}, $t \in \mathbb{R}$. Подгруппа H замкнута, поэтому она является подгруппой Ли. Кроме того, группа H связна и коммутативна. Поэтому она является тором, содержащим T. Из максимальности тора T следует, что $H = T$; в частности, $e^{At} \in T$. Поэтому $Z(T)_e = T$. Но $T \subset N(T)_e \subset Z(T)_e$, поэтому $Z(T)_e = N(T)_e = T$. Следовательно, $N(T)/T = N(T)/N(T)_e$ — дискретная компактная группа, поэтому она конечна.

б) Рассмотрим действие T на факторпространстве $G/N(T)$ левыми сдвигами: под действием элемента $t \in T$ класс $gN(T)$ переходит в $tgN(T)$. Класс $N(T)$ остаётся неподвижным, поскольку $T \subset N(T)$.

Рассмотрим действие T на G левыми сдвигами. Это действие переносится в касательное пространство T_eG. Выберем в T_eG скалярное произведение, инвариантное относительно этого действия. Пусть $\big(T_eN(T)\big)^{\perp}$ — ортогональное дополнение к $T_eN(T)$ в T_eG. Тогда

$$T_{N(T)}\big(G/N(T)\big) \cong T_eG/T_eN(T) \cong \big(T_eN(T)\big)^{\perp};$$

каждый элемент T действует на $T_{N(T)}\big(G/N(T)\big)$ как ортогональное преобразование. Рассмотрев ограничение отображения exp на пространство $\big(T_eN(T)\big)^{\perp}$, можно построить в $G/N(T)$ шар D^m, где $m = \dim\big(G/N(T)\big)$, с центром в точке $N(T)$ так, что следующие три замкнутых множества будут инвариантны относительно действия T: D^m, $S^{m-1} = \partial D^m$ и $M = G/N(T) \setminus \operatorname{int} D^m$.

Покажем теперь, что класс $N(T)$ является единственной неподвижной точкой действия T на $G/N(T)$; более того, это верно не только для действия всего тора T, но и для действия его топологической образующей t. Действительно, $tgN(T) = gN(T) \Leftrightarrow g^{-1}tg \in N(T)$ $\Leftrightarrow g^{-1}t^ng \in N(T)$ для $n = 1, 2, \ldots$ Последнее условие эквивалентно тому, что $g^{-1}Tg \subset N(T)$, поскольку множество $\{t^n\}$ всюду плотно в T. Наконец, условие $g^{-1}Tg \subset N(T)$ эквивалентно тому, что $g^{-1}Tg = T$, т.е. $g \in N(T)$. Действительно, $N(T)_e = T$, а множество $g^{-1}Tg$ связно и содержит единичный элемент e.

В торе T есть путь из точки t в точку e, поэтому действие t на $G/N(T)$ и на G гомотопно тождественному отображению, причём в процессе гомотопии действие на T_eG сохраняет выбранное там скалярное произведение, поэтому мы получаем гомотопию в классе отображений, переводящих D^m, S^{m-1} и M в себя. Таким образом, есть отображения $S^{m-1} \to S^{m-1}$ и $M \to M$ без неподвижных точек, которые гомотопны тождественным отображениям. В таком случае из теоремы Лефшеца следует, что $\chi(M) = 0$ и $\chi(S^{m-1}) = 0$; значит, число m чётно.

Из формулы для эйлеровой характеристики объединения двух CW-комплексов получаем

$$\chi\big(G/N(T)\big) = \chi(D^m) + \chi(M) - \chi(S^{m-1}) = \chi(D^m) = 1.$$

Естественная проекция $G/T \to G/N(T)$ является $|N(T)/T|$-листным накрытием, поэтому $\chi(G/T) = |N(T)/T|\chi\big(G/N(T)\big) = |N(T)/T|$. □

Воспользовавшись теоремой 6.5.5 и теоремой Лефшеца, легко доказать следующее утверждение.

Теорема 6.5.6. *Пусть $T \subset G$ — максимальный тор. Тогда для любого элемента $g \in G$ можно выбрать элемент $x \in G$ так, что $g \in xTx^{-1}$.*

Доказательство. Рассмотрим пространство левых смежных классов $G/T = \{xT\}$. Положим $f(xT) = gxT$ (это определение корректно, поскольку при замене x на xt, где $t \in T$, класс gxT заменится на $gxtT = gxT$). Предположим, что класс xT — неподвижная точка отображения f, т.е. $gxT = xT$. Тогда $g \in xTx^{-1}$. Поэтому достаточно доказать, что отображение $f: G/T \to G/T$ имеет неподвижную точку. Для этого мы воспользуемся теоремой Лефшеца.

При вычислении числа Лефшеца $\Lambda(f)$ вместо отображения f можно использовать любое гомотопное ему отображение f_0. Поэтому элемент g можно заменить на любой другой элемент $g_0 \in G$, поскольку группа G связна. Выберем в качестве g_0 единичный элемент e. Тогда $f_0 = \mathrm{id}_{G/T}$ и $\Lambda(f_0) = \chi(G/T)$. Но согласно теореме 6.5.5 $\chi(G/T) = |N(T)/T| \neq 0$. Поэтому $\Lambda(f) = \Lambda(f_0) \neq 0$, а значит, отображение f имеет неподвижную точку. □

Следствие 1. *Максимальные торы сопряжены, т.е. если T и T' — максимальные торы компактной группы Ли G, то $T' = gTg^{-1}$ для некоторого элемента $g \in G$.*

Доказательство. Пусть t' — топологическая образующая тора T'. Выберем элемент $g \in G$, для которого $t' \in gTg^{-1}$. Тогда $T' \subset gTg^{-1}$. Ясно также, что gTg^{-1} — тор. Поэтому из максимальности T' следует, что $T' = gTg^{-1}$. □

Следствие 2. *Для компактной связной группы Ли G образ отображения $\exp: T_eG \to G$ совпадает со всей группой G.*

Доказательство. Пусть T — максимальный тор группы Ли G. Для любого элемента $x \in G$ можно выбрать элемент $y \in G$ так, что x принадлежит тору gTg^{-1}. При доказательстве теоремы 6.5.1 мы убедились, что для тора отображение exp является эпиморфизмом. □

6.5.3. H-пространства и алгебры Хопфа

Топологическое пространство X с отмеченной точкой $x_0 \in X$ называют *H-пространством*, если задано непрерывное отображение $\mu : X \times X \to X$, для которого отображения $x \mapsto \mu(x, x_0)$ и $x \mapsto \mu(x_0, x)$ гомотопны тождественному отображению (предполагается, что $\mu(x_0, x_0) = x_0$). Отображение μ называют при этом *умножением*.

Естественными примерами H-пространств служат группы Ли и топологические группы. Но есть и другие примеры.

Пример 6.5.1. *Пространства $\mathbb{C}P^\infty$ и $\mathbb{R}P^\infty$ являются H-пространствами.*

Доказательство. Отождествим $\mathbb{C}^\infty \setminus \{0\}$ с пространством многочленов, сопоставляя точке $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ многочлен $a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$. Умножение многочленов индуцирует умножение на пространстве $\mathbb{C}^\infty \setminus \{0\}$, которое имеет единичный элемент $(1, 0, 0, \ldots)$. Отождествляя пропорциональные многочлены, получаем умножение на пространстве $\mathbb{C}P^\infty$ с единичным элементом $(1 : 0 : 0 : \ldots)$. Для $\mathbb{R}P^\infty$ конструкция аналогична. □

Пример 6.5.2. *Сфера S^7 является H-пространством.*

Доказательство. Представим сферу S^7 как множество чисел Кэли с единичной нормой. Умножение чисел Кэли индуцирует умножение (неассоциативное) на сфере S^7. □

Теорема 6.5.7. *Если X — H-пространство с отмеченной точкой x_0, то группа $\pi_1(X, x_0)$ абелева.*

Доказательство. Гомотопию, связывающую петли $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$, можно построить следующим образом. Отобразим внутренний ромб на рис. 6.26 посредством отображения $(s, t) \mapsto \mu\big(\alpha(s), \beta(t)\big)$. Отображения оставшихся четырёх треугольников построим с помощью гомотопий, связывающих отображения $s \mapsto \alpha(s)$ и $s \mapsto \mu\big(\alpha(s), x_0\big)$ и отображения $t \mapsto \beta(t)$ и $t \mapsto \mu\big(x_0, \beta(t)\big)$. □

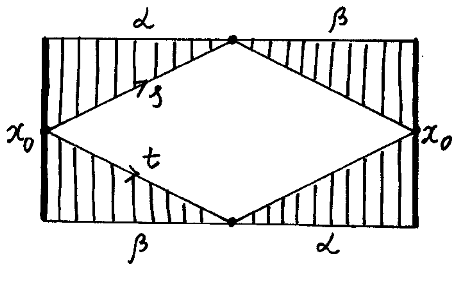

Рис. 6.26. Построение гомотопии

Теорема 6.5.7 допускает следующее обобщение.

Теорема 6.5.8. *Любое H-пространство X гомотопически просто.*

Доказательство. Ясно, что $\pi_n\big(X \times Y, (x_0, y_0)\big) \cong \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$ и при этом действие группы $\pi_1\big(X \times Y, (x_0, y_0)\big)$ переходит в произведение действий, т.е. $(\alpha, \beta)(u, v) = (\alpha u, \beta v)$.

Умножение $\mu : X \times X \to X$ индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X \times X) \times \pi_n(X \times X) & \longrightarrow & \pi_n(X \times X) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mu_* \times \mu_*} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mu_*} \\ \pi_1(X) \times \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(X), \end{array}$$

где горизонтальные стрелки — действие группы π_1 на π_n.

Пусть $\alpha \in \pi_1(X)$, $u \in \pi_n(X)$, e_1 и e_n — единичные элементы групп $\pi_1(X)$ и $\pi_n(X)$. Тогда $(\alpha, e_1)(e_n, u) = (\alpha e_n, e_1 u) = (e_n, u)$. Поэтому $\mu_*(\alpha, e_1)\mu_*(e_n, u) = \mu_*(e_n, u)$, а значит, $\alpha u = u$. □

Пусть F — аддитивная группа некоторого поля, а X — связное H-пространство, для которого все группы $H_i(X; F) \cong H^i(X; F)$ являются конечномерными пространствами над F. Пусть $A = \bigoplus_{i \geqslant 0} A^i$, где $A^i = H^i(X; F)$, — алгебра когомологий. Диагональное отображение $d : X \to X \times X$ задаёт умножение $A \otimes A \to A$ в алгебре когомологий. А умножение $\mu : X \times X \to X$ индуцирует отображение $\Delta = \mu^* : A \to A \otimes A$. Это отображение называют *коумножением*. Коумножение Δ обладает следующими свойствами.

1) Отображение $\Delta : A \to A \otimes A$ является гомоморфизмом алгебр, т.е.

$\Delta(1) = 1 \otimes 1$ и если $\Delta(a) = \sum a_{1i} \otimes a_{2i}$ и $\Delta(b) = \sum b_{1j} \otimes b_{2j}$, то

$$\Delta(a \smile b) = \sum_{i,j} (-1)^{\dim b_{ij} \dim a_{2i}} (a_{1i} \smile b_{1j}) \otimes (a_{2i} \smile b_{2j}).$$

Это следует из теоремы Кюннета для когомологий с коэффициентами в поле и из закона умножения в алгебре $H^*(X \times X)$.

2) Пусть $p_1 : A \otimes A \to A$ — отображение, заданное формулами $\alpha^p \otimes 1 \mapsto \alpha^p$ и $\alpha^p \otimes \alpha^q \mapsto 0$ при $q > 0$; отображение $p_2 : A \otimes A \to A$ переводит $1 \otimes \alpha^p$ в α^p. Тогда в диаграмме

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "p_1"] \\ A \otimes A \arrow[r, "p_2"] & A \end{tikzcd}$$

обе композиции являются тождественными отображениями. Иными словами, $\Delta(\alpha^p) = \alpha^p \otimes 1 + 1 \otimes \alpha^p + \sum \alpha^r \otimes \alpha^s$, где $r, s \geqslant 1$. Это свойство коумножения следует из того, что в диаграмме

$$\begin{tikzcd} X & X \times X \arrow[l, "\mu"'] \\ X \times X \arrow[u, "\mu"] & X \arrow[l, "\mu(x_0,\cdot)"'] \arrow[u, "\mu(\cdot,x_0)"'] \end{tikzcd}$$

обе композиции гомотопны тождественному отображению.

3) Имеет место включение $\Delta(A^p) \subset \bigoplus_{i+j=p} A^i \otimes A^j$. Это следует из того, что $H^p(X \times X) \cong \bigoplus_{i+j=p} H^i(X) \otimes H^j(X)$ для когомологий с коэффициентами в поле.

Градуированную[1] ассоциативную алгебру $A = \bigoplus_{i \geqslant 0} A^i$, для которой задано коумножение Δ, обладающее свойствами (1)-(3), называют *алгеброй Хопфа*. Если $A^0 = F$ (основное поле), то алгебру Хопфа называют *связной* (это условие соответствует линейной связности пространства X).

Теорема 6.5.9. *Пусть* $\operatorname{char} F = 0$ *и* A *— связная алгебра Хопфа, мультипликативно порождённая элементом* $x \in A^k$, $k \geqslant 1$. *Тогда если* k *чётно, то* $A = F[x]$ *— алгебра полиномов.*

[1]Предполагается, что $ab = (-1)^{pq} ba$, если $a \in A^p$ и $b \in A^q$.

Доказательство. Ясно, что $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$, поскольку нет элементов положительной размерности, строго меньшей k. Пусть k чётно. Тогда из того, что Δ — гомоморфизм алгебр, следует, что $\Delta(x^n) = \sum_{r=0}^{n} x^r \otimes x^{n-r}$. (Обратите внимание, что в случае нечётного k соответствующее равенство имеет совсем другой вид. Например, $\Delta(x^2) = 1 \otimes x^2 + x^2 \otimes 1$, поскольку в этом случае два слагаемых $x \otimes x$ входят с противоположными знаками.) Предположим, что $x^n = 0$ для некоторого $n \geqslant 2$, причём такое число n минимально. Тогда $0 = \sum_{r=1}^{n-1} x^r \otimes x^{n-r}$, чего не может быть. □

Замечание. Если k нечётно, то $x^2 = 0$. Поэтому $A = \Lambda(x)$ — внешняя алгебра; она состоит из элементов вида $a + bx$, где $a, b \in F$.

Пример 6.5.3. *Сфера S^{2n} не может быть H-пространством.*

Доказательство. Предположим, что сфера S^{2n} является H-пространством. Тогда алгебра $A = H^*(S^{2n}; \mathbb{R})$ является связной алгеброй Хопфа. Алгебра A мультипликативно порождена элементом $x \in H^{2n}(S^{2n}; \mathbb{R})$. Поэтому согласно теореме 6.5.9 $x^k \neq 0$ для всех k. С другой стороны, $x^2 = 0$. □

В случае, когда характеристика поля F равна $p \neq 0$, теорема 6.5.9 неверна, потому что равенство $x^n = 0$ может выполняться при $n = p^m$. Чтобы это доказать, нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $n = \sum n_i p^i$ и $k = \sum r_i p^i$, где $0 \leqslant n_i, r_i \leqslant p-1$. Тогда $\binom{n}{r} \equiv \prod_i \binom{n_i}{r_i} \pmod p$.*

Из этой леммы, в частности, следует, что $\binom{p^m}{k} \equiv 0 \pmod p$ для $0 < r < p^m$. Поэтому $\sum_{r=1}^{n-1} x^r \otimes x^{n-r} = 0$ для $n = p^m$. Более того, если $\sum_{r=1}^{n-1} x^r \otimes x^{n-r} = 0$ и $x^r \neq 0$ для $1 \leqslant r \leqslant n-1$, то $n = p^m$ для некоторого m. Действительно, пусть $n = n_0 + n_1 p + \ldots + n_s p^s$, причём $n_s \neq 0$ и либо $n_q \neq 0$ для $q < s$, либо $n_s \neq 1$. В первом случае положим $r = n_q p^q$. Тогда $\binom{n}{r} \equiv \binom{n_q}{r_q} \pmod p$ и $\binom{n_q}{r_q} = 1$. Во втором случае положим $r = p^s$. Тогда $r < n$, $\binom{n}{r} \equiv \binom{n_s}{1} \pmod p$ и $\binom{n_s}{1} = n_s$, причём $2 \leqslant n_s \leqslant p-1$.

Используя эти сравнения, получаем следующую версию теоремы 6.5.9.

Теорема 6.5.10. *Пусть $\operatorname{char} F = p$, где p — нечётное число, и A — связная алгебра Хопфа, мультипликативно порождённая элементом $x \in A^k$, $k \geqslant 1$. Тогда если k нечётно, то $A = \Lambda(x)$, а если k чётно, то либо $A = F[x]$, либо $A = F[x]/(x^{p^m})$.*

В случае $p=2$ теорема формулируется и доказывается во многом аналогично. Нужно лишь сделать два замечания. Во-первых, теперь для нечётного k равенство $x^2=0$ не обязано выполняться. Во-вторых, $\Lambda(x)=F[x]/(x^2)$. Поэтому для поля характеристики 2 аналог теоремы 6.5.9 выглядит следующим образом.

Теорема 6.5.11. *Пусть* $\operatorname{char} F=2$ *и* A *— связная алгебра Хопфа, мультипликативно порождённая элементом* $x\in A^k$, $k\geqslant 1$. *Тогда либо* $A=F[x]$, *либо* $A=F[x]/(x^{2^m})$.

Теорема 6.5.12 (Хопф [Ho7]). *Пусть A — связная алгебра Хопфа над полем F нулевой характеристики, причём пространство A^n конечномерно для любого n. Тогда алгебра A изоморфна (как алгебра Хопфа) тензорному произведению внешней алгебры от образующих нечётных размерностей и полиномиальной алгебры от образующих чётных размерностей.*

Доказательство. Из того, что пространство A^n конечномерно для любого n, следует, что можно выбрать образующие x_1, x_2, ... алгебры A так, что $\dim x_i\leqslant \dim x_{i+1}$ (подразумевается, что $x_i\in A^{\dim x_i}$). Пусть A_n — подалгебра в A, порождённая элементами x_1, ..., x_n. Она является подалгеброй Хопфа, т.е. $\Delta(A_n)\subset A_n\otimes A_n$. Действительно, $\Delta(x_i)=x_i\otimes 1+1\otimes x_i+\sum y_r\otimes y_s$, где $\dim y_r, \dim y_s<\dim x_i$. Поэтому $y_r, y_s\in A_{i-1}\subset A_i$. Будем также предполагать, что $x_n\notin A_{n-1}$ (иначе образующую x_n можно исключить).

Согласно теореме 6.5.9 алгебра, порождённая элементом x_n, является полиномиальной алгеброй $F[x_n]$ в случае, когда размерность x_n чётна, и внешней алгеброй $\Lambda(x_n)$ в случае, когда размерность x_n нечётна. Поэтому из того, что алгебра A коммутативна (в градуированном смысле) и ассоциативна, следует, что имеет место естественный эпиморфизм $A_{n-1}\otimes F[x_n]\to A_n$ (размерность x_n чётна) или $A_{n-1}\otimes\Lambda(x_n)\to A_n$ (размерность x_n нечётна). Достаточно доказать, что этот эпиморфизм является мономорфизмом (а затем воспользоваться индукцией по n).

Рассмотрим идеал I, порождённый элементом x_n^2 и элементами A_{n-1} положительной размерности. Иными словами, I состоит из выражений вида $\sum a_k x_n^k$, где $a_k\in A_{n-1}$, причём компоненты нулевой размерности элементов a_0 и a_1 равны 0. Ясно, что $x_n\notin I$, поскольку элементы идеала I, имеющие размерность $\dim x_n$, должны лежать в A_{n-1} (идеал I не содержит элементов вида λx_n, где $\lambda\in F$).

Рассмотрим композицию отображений

$$A_n\xrightarrow{\Delta}A_n\otimes A_n\xrightarrow{p}A_n\otimes(A_n/I),$$

где p — естественная проекция. Если $a \in A_{n-1}$ — элемент положительной размерности, то $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a + \sum a_i \otimes a_j$, где $a_j \in A_{n-1}$ — элемент положительной размерности. Поэтому $p\Delta(a) = a \otimes 1$ (для элемента $a \in F$ такое равенство тоже имеет место). Кроме того, $\Delta(x_n) = x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n + \sum y_r \otimes y_s$, где $y_s \in A_{n-1}$ — элемент положительной размерности. Поэтому $p\Delta(x_n) = x_n \otimes 1 + 1 \otimes \bar{x}_n$, где $\bar{x}_n$ — образ элемента x_n в A_n/I.

Рассмотрим сначала случай, когда размерность x_n чётна. Предположим, что есть некоторое нетривиальное соотношение $\sum a_k x_n^k = 0$. Применим к этому соотношению отображение $p\Delta$. Учитывая, что $\bar{x}_n^2 = 0$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \sum (a_k \otimes 1)(x_n \otimes 1 + 1 \otimes \bar{x}_n)^k = \\ &= \sum a_k x_n^k \otimes 1 + \sum k a_k x_n^{k-1} \otimes \bar{x}_n. \end{aligned}$$

Но по условию $\sum a_k x_n^k = 0$, поэтому $\sum k a_k x_n^{k-1} \otimes \bar{x}_n = 0$. Из этого следует, что $\sum k a_k x_n^{k-1} = 0$. Действительно, как мы уже упоминали, $x_n \in I$, поэтому $\bar{x}_n \neq 0$. Соотношение $\sum k a_k x_n^{k-1} = 0$ имеет меньшую степень, чем исходное соотношение $\sum a_k x_n^k = 0$. Ясно также, что это соотношение нетривиально, поскольку мы имеем дело с полем нулевой характеристики. Если мы выберем исходное соотношение минимально возможной степени, то немедленно придём к противоречию.

Рассмотрим теперь случай, когда размерность x_n нечётна. Предположим, что есть некоторое нетривиальное соотношение $a_0 + a_1 x_n = 0$. Применим к нему отображение $p\Delta$. В результате получим, что

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 \otimes 1 + a_1 \otimes 1(x_n \otimes 1 + 1 \otimes \bar{x}_n) = \\ &= (a_0 + a_1 x_n) \otimes 1 + a_1 \otimes \bar{x}_n. \end{aligned}$$

Но по условию $a_0 + a_1 x_n = 0$, поэтому $a_1 \otimes \bar{x}_n = 0$. Как и в предыдущем случае, $\bar{x}_n \neq 0$. Следовательно, $a_1 = 0$, а значит, $a_0 = 0$. □

Следствие 1. *Пусть G — группа Ли. Тогда алгебра когомологий $H^*(G; \mathbb{R})$ является внешней алгеброй от образующих нечётных размерностей.*

Доказательство. Полиномиальная алгебра бесконечномерна, поэтому конечномерная алгебра не может содержать полиномиальную подалгебру. □

Следствие 2. *Пусть G — односвязная группа Ли. Тогда $H^2(G; \mathbb{R}) = 0$.*

Доказательство. Из односвязности следует, что $H^1(G;\mathbb{R})=0$. Поэтому в алгебре когомологий $H^*(G;\mathbb{R})$ есть образующие только размерности $\geqslant 3$. $\square$

Решения и указания

1.3.1. Данную коммутативную диаграмму можно рассматривать как короткую точную последовательность цепных комплексов $0 \to C'_* \to C_* \to C''_* \to 0$, где C'_* — цепной комплекс $\ldots \to 0 \to 0 \to A \xrightarrow{\alpha} A' \to 0$; комплексы C_* и C''_* определяются аналогично. Нетривиальные гомологии комплекса C'_* — это как раз $\operatorname{Ker}\alpha$ и $\operatorname{Coker}\alpha$.

1.3.2. Доказательство теоремы 1.3.2 без каких-либо существенных изменений годится и в этом случае. Нужно лишь слово «изоморфизм» заменить на «мономорфизм» или «эпиморфизм».

1.3.3. Сначала докажем, что φ_2 индуцирует гомоморфизм такого вида. Пусть $x \in \operatorname{Ker}(\varphi_3\alpha_2)$. Ясно, что $\varphi_2 x \in \operatorname{Im}\varphi_2$, поэтому остаётся проверить, что $\varphi_2 x \in \operatorname{Im}\beta_1 = \operatorname{Ker}\beta_2$. Но $0 = \varphi_3\alpha_2 x = \beta_2\varphi_2 x$. Если $x \in \operatorname{Ker}\alpha_2$, то $x \in \operatorname{Im}\alpha_1$, поэтому $\varphi_2 x \in \operatorname{Im}\varphi_2\alpha_1$. Если $x \in \operatorname{Ker}\varphi_2$, то $\varphi_2 x = 0$. Таким образом, отображение Φ определено корректно. Ясно также, что Φ — гомоморфизм.

Докажем теперь, что Φ — эпиморфизм. Пусть $y \in \operatorname{Im}\varphi_2 \cap \operatorname{Im}\beta_1$. Тогда существует элемент $x \in A_2$, для которого $\varphi_2 x = y$. При этом $\varphi_3\alpha_2 x = \beta_2\varphi_2 x = \beta_2 y = 0$, поскольку $y \in \operatorname{Im}\beta_1 = \operatorname{Ker}\beta_2$. Значит, $x \in \operatorname{Ker}(\varphi_3\alpha_2)$.

Докажем, наконец, что Φ — мономорфизм. Пусть элемент $x \in \operatorname{Ker}(\varphi_3\alpha_2)$ таков, что $\varphi_2 x \in \operatorname{Im}(\varphi_2\alpha_1)$, т.е. $\varphi_2 x = \varphi_2\alpha_1 z$ для некоторого $z \in A_2$. Тогда $x = \alpha_1 z + w$, где $w \in \operatorname{Ker}\varphi_2$. Поэтому $x \in \operatorname{Ker}\alpha_1 + \operatorname{Ker}\varphi_2$.

1.3.4. Согласно задаче 10.1 из части I $S^p \times S^q / S^p \vee S^q \approx S^{p+q}$. Поэтому $H_k(S^p \times S^q, S^p \vee S^q) \cong H_k\bigl(S^p \times S^q \cup C(S^p \vee S^q)\bigr) \cong H_k(S^{p+q})$ при $k \geqslant 1$.

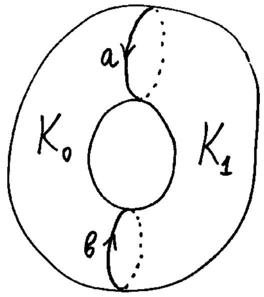

Рис. 6.27. Тор T^2

1.3.5. Запишем точную последовательность пары $(S^p \times S^q, S^p \vee S^q)$ и воспользуемся результатом задачи 1.3.4. Получим, что $H_k(S^p \times S^q) \cong \mathbb{Z}$ при $k = 0$, p, q, $p + q$ (если $p = q$, то $H_p(S^p \times S^q) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$); остальные группы нулевые.

1.3.6. Представим тор T^2 в виде объединения симплициальных комплексов K_0 и K_1 и выберем в $H_1(K_0 \cap K_1)$ образующие a и b (рис. 6.27). Из точной последовательности

$$H_1(K_0 \cap K_1) \xrightarrow{(j_0,-j_1)} H_1(K_0) \oplus H_1(K_1) \to H_1(T^2) \to \tilde{H}_0(K_0 \cap K_1) \to 0$$

получаем точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Im} \varphi \to H_1(T^2) \to \mathbb{Z} \to 0,$$

где $\varphi = (j_0, -j_1)$. Группа $H_1(K_0 \cap K_1)$ состоит из элементов вида $na + {}$ $+ mb$. При гомоморфизме φ такой элемент переходит в пару $\bigl(nj_0(a) + {}$ $+ mj_0(b), -nj_1(a) - mj_1(b)\bigr)$. Но $j_0(a) = j_0(b)$ и $j_1(a) = j_1(b)$. Поэтому φ имеет вид $(m, n) \mapsto (n + m, -n - m)$. Значит, $\operatorname{Ker} \varphi = \mathbb{Z}$ и $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{Z}$. Точная последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \to H_1(T^2) \to \mathbb{Z} \to 0$$

расщепляется, поэтому $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Из точной последовательности

$$0 \to H_2(T^2) \to H_1(K_0 \cap K_1) \xrightarrow{(j_0,-j_1)} H_1(K_0) \oplus H_1(K_1)$$

получаем точную последовательность

$$0 \to H_2(T^2) \to \operatorname{Ker} \varphi \to 0.$$

Значит, $H_2(T^2) \cong \operatorname{Ker}\varphi \cong \mathbb{Z}$.

1.3.7. а) Пусть K_0 — замкнутая ε-окрестность данного узла K, K_1 — замыкание $S^3 \setminus K_0$. Тогда $K_0 \cup K_1 = S^3$ и $K_0 \cap K_1 = T^2$ — двумерный тор. Нам нужно вычислить гомологии $S^3 \setminus K \sim K_1$. Мы предполагаем, что сфера S^3 триангулирована так, что её триангуляция даёт триангуляции K_0 и K_1. Прежде всего заметим, что пространство K_1 гомотопически эквивалентно симплициальному комплексу, не имеющему симплексов размерности $\geqslant 2$. Действительно, трёхмерные симплексы K_1 можно последовательно уничтожать начиная с границы. Таким образом, $H_i(K_1) = 0$ при $i \geqslant 2$. Ясно также, что $H_0(K_1) = \mathbb{Z}$.

Запишем последовательность Майера–Вьеториса

$$H_{i+1}(K_0) \oplus H_{i+1}(K_1) \xrightarrow{i_*} H_{i+1}(S^3) \xrightarrow{\partial_*}$$
$$\xrightarrow{\partial_*} H_i(T^2) \xrightarrow{j_*} H_i(K_0) \oplus H_i(K_1) \xrightarrow{i_*} H_i(S^3)$$

При $i = 2$ получаем

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \to H_2(K_1) \to 0.$$

Гомоморфизм ∂_* здесь устроен следующим образом. Образующая α группы $H_3(S^3)$ представлена суммой согласованно ориентированных симплексов, на которые разбита сфера S^3. Эти симплексы разбиваются на две части: те, которые принадлежат K_0, и те, которые принадлежат K_1. Граница у этих двух частей общая. Эта граница и есть $\partial_*\alpha$. Таким образом, ∂_* — изоморфизм. Поэтому $H_2(K_1) = 0$.

При $i = 1$ получаем

$$0 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j_*} \mathbb{Z} \oplus H_1(K_1) \to 0.$$

При отображении j_* параллель тора переходит в образующую группы $H_1(K_0) = \mathbb{Z}$, поэтому меридиан тора переходит в образующую группы $H_1(K_1)$. Значит, $H_1(K_1) = \mathbb{Z}$, причём образующая группы $H_1(K_1)$ представлена малой окружностью в плоскости, трансверсально пересекающей узел (рис. 6.28).

б) Как и при решении задачи а), получаем точные последовательности

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z}^n \to H_2(K_1) \to 0,$$
$$0 \to \mathbb{Z}^{2n} \xrightarrow{j_*} \mathbb{Z}^n \oplus H_1(K_1) \to 0.$$

Рис. 6.28. Образующая гомологий дополнения узла

При этом $\partial_*(1) = (1, \ldots, 1)$, поэтому $H_2(K_1) = \mathbb{Z}^{n-1}$. При отображении j_* параллели n торов переходят в образующие группы $H_1(K_0) = \mathbb{Z}^n$, поэтому меридианы этих n торов переходят в образующие группы $H_1(K_1)$. Значит, $H_1(K_1) = \mathbb{Z}^n$, причём образующие этой группы представлены малыми окружностями, надетыми на компоненты зацепления.

1.3.8. Пусть K' — барицентрическое подразделение симплициального комплекса K. Построим симплициальное отображение $f : K' \to N(\mathcal{L})$ следующим образом. Каждый симплекс Δ комплекса K покрыт одним из подкомплексов L_i. Сопоставим барицентру v симплекса Δ наименьший из таких индексов i. Нужно проверить, что если в K' есть симплекс с вершинами v_0, v_1, …, v_k, которым соответствуют подкомплексы L_{i_0}, L_{i_1}, …, L_{i_k}, то в $N(\mathcal{L})$ есть симплекс с вершинами L_{i_0}, …, L_{i_k}, т.е. $L_{i_0} \cap \ldots \cap L_{i_k} \neq \varnothing$. Можно считать, что в исходном симплициальном комплексе K точка v_0 — вершина, v_1 — середина ребра, v_2 — центр 2-мерной грани и т.д. Тогда если $v_m \in L_{i_m}$, то $v_0, \ldots, v_{m-1} \in L_{i_m}$. Поэтому $v_{i_0} \in L_{i_0} \cap \ldots \cap L_{i_k}$.

Докажем, что отображение f индуцирует изоморфизм гомологий. Применим для этого индукцию по n. При $n = 1$ комплекс $K = L_1$ ацикличен и $N(\mathcal{L}) = *$ — одна точка. Так что база индукции очевидна. Докажем теперь шаг индукции. Пусть $\mathcal{L}_1 = \{L_1, \ldots, L_n\}$, $K_1 = L_1 \cup \ldots \cup L_n$ и $K_2 = L_{n+1}$. Рассмотрим в $N(\mathcal{L})$ подкомплексы $N_1 = N(\mathcal{L}_1)$ и N_2 — замкнутая звезда вершины $(n+1)$. По построению f отображает K_1' в N_1, а по предположению индукции ограничение f на K_1' индуцирует изоморфизм гомологий. Ограничение f на K_2' тоже индуцирует изоморфизм гомологий, поскольку комплекс $K_2 = L_{n+1}$ ацикличен, а N_2 — конус с вершиной $(n+1)$.

Пусть $M_i = L_i \cup L_{n+1}$. Тогда $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ — покрытие

$K_1 \cap K_2$, которое обладает теми же свойствами. Поэтому f индуцирует изоморфизм гомологий $K_1 \cap K_2$ и $N(\mathcal{M}) = N_1 \cap N_2$. Запишем теперь точную последовательность Майера–Вьеториса:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_k(K_1 \cap K_2) & \to & H_k(K_1) \oplus H_k(K_2) & \to & H_k(K) & \to & H_{k-1}(K_1 \cap K_2) & \to & H_{k-1}(K_1) \oplus H_k(K_2) \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
H_k(N_1 \cap N_2) & \to & H_k(N_1) \oplus H_k(N_2) & \to & H_k(N) & \to & H_{k-1}(N_1 \cap N_2) & \to & H_{k-1}(N_1) \oplus H_k(N_2)
\end{array}$$

Пары крайних отображений — изоморфизмы, поэтому согласно 5-лемме среднее отображение тоже изоморфизм.

1.3.9. Запишем последовательность Майера–Вьеториса для $K_0 = M^n \setminus \operatorname{int} D^n$ и $K_1 = D^n$:

$$H_k(S^{n-1}) \to H_k(M^n \setminus \operatorname{int} D^n) \oplus H_k(D^n) \to H_k(M^n) \to H_{k-1}(S^{n-1})$$

Если $k \geqslant 1$, то $H_k(D^n) = 0$, а если $2 \leqslant k \leqslant n-2$, то $H_k(S^{n-1}) = 0$ и $H_{k-1}(S^{n-1}) = 0$; при $k = 1$ можно рассмотреть приведённые группы гомологий.

1.4.1. В случае б) построим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \mathrm{id}_A & & \downarrow \Phi\oplus\psi & & \downarrow \mathrm{id}_C & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus C & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

где $(\Phi \oplus \psi)(b) = \big(\Phi(b), \psi(b)\big)$. Легко проверить, что эта диаграмма коммутативна; для этого нужно воспользоваться тем, что $\psi\varphi = 0$ и $\Phi\varphi = \mathrm{id}_A$. Поэтому согласно 5-лемме $\Phi \oplus \psi$ — изоморфизм.

В случае в) построим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \mathrm{id}_A & & \uparrow \varphi+\Psi & & \uparrow \mathrm{id}_C & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus C & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

где $(\varphi + \Psi)(a, c) = \varphi(a) + \Psi(c)$. Эта диаграмма коммутативна, поскольку $\psi\varphi = 0$ и $\psi\Psi = \mathrm{id}_C$.

1.4.2. а) Отображение $\pi_k(B) \xrightarrow{s_*} \pi_k(E) \xrightarrow{p_*} \pi_k(B)$ тождественное, поэтому p_* — эпиморфизм. При $k = n + 1$ получаем, что отображение

$\partial_* : \pi_{n+1}(B) \to \pi_n(F)$ нулевое. В результате получаем точную последовательность $0 \to \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \to 0$, причём у гомоморфизма p_* есть правый обратный s_*.

б) Отображение $\pi_k(F) \xrightarrow{i_*} \pi_k(E) \xrightarrow{r_*} \pi_k(F)$ тождественное, поэтому i_* — мономорфизм. При $k = n - 1$ получим, что отображение $\partial_* : \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F)$ нулевое. В результате получаем точную последовательность $0 \to \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \to 0$, причём у гомоморфизма i_* есть левый обратный r_*.

1.4.3. Пространство F стягиваемо в E, поэтому любой сфероид в F стягиваем в E. Следовательно, отображение $\pi_n(F) \to \pi_n(E)$ нулевое. В результате мы получаем точную последовательность $0 \to \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(F) \to 0$. Докажем теперь, что гомоморфизм ∂_* имеет правый обратный.

Фиксируем гомотопию $f_t : E \to E$, для которой $f_0|_F = \mathrm{id}_F$ и $f_1(E) = e_0$ — одна точка; можно считать, что $e_0 \in F$. Пусть $\varphi : S^{n-1} \to F$ — сфероид в F. Тогда $f_t\varphi$ можно рассматривать как n-мерный сфероид в B. Гомотопным сфероидам в F соответствуют гомотопные сфероиды в B, поэтому мы получаем гомоморфизм $\pi_{n-1}(F) \to \pi_n(B)$. Ясно, что этот гомоморфизм является правым обратным для гомоморфизма ∂_*.

1.4.4. Каждому гомоморфизму $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})$ можно сопоставить гомоморфизм $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}(mA, \mathbb{Z})$ следующим образом: $\varphi(a) = \tilde{\varphi}(ma)$; та же самая формула задаёт и обратное соответствие. Нужно лишь проверить, что если $ma = 0$, то $\varphi(a) = 0$. Предположим, что $\varphi(a) = k$. Тогда $0 = \varphi(ma) = mk$, поэтому $k = 0$.

1.4.5. Построим последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ следующим образом. Элемент a_1 произвольный; элемент a_2 таков, что $2a_2 = a_1$; элемент a_3 таков, что $3a_3 = a_2$, и т.д. После того как выбран элемент a_{n-1}, есть n вариантов выбора элемента a_n. Поэтому множество таких последовательностей несчётно. Действительно, даже если на каждом шаге есть только два варианта выбора элемента, то уже получается несчётное множество последовательностей (множество всех двоичных дробей несчётно).

Любой последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ можно сопоставить гомоморфизм $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, положив $f\left(\frac{1}{n!}\right) = a_n$. Действительно, равенство $n!f\left(\frac{1}{n!}\right) = f(1)$ выполняется, поскольку $n!a_n = a_1$. Ясно также, что если задано $f\left(\frac{1}{n!}\right)$ и f — гомоморфизм, то задано $f\left(\frac{1}{n}\right) = (n-1)!f\left(\frac{1}{n!}\right)$, а значит, задано $f\left(\frac{m}{n}\right)$ для любого целого m.

1.4.6. Для группы T есть свободная резольвента вида $0 \to \mathbb{Z}^r \xrightarrow{i} \mathbb{Z}^r \to T \to 0$, где $i(e_k) = m_k e_k$ для стандартных образующих группы $\mathbb{Z}^r$. Группа $\operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z})$ — это факторгруппа $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$ по образу группы $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}^r, \mathbb{Z})$ при отображении, индуцированном отображением $(0, i)$, т.е. по образу группы $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z})$ при отображении i_*, индуцированном отображением i. Пусть $\varepsilon_k \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z})$ — элемент, двойственный e_k, т.е. $\varepsilon_k(e_j) = \delta_{kj}$. Тогда $i_*(\varepsilon_k) = m_k \varepsilon_k$. Поэтому фактор $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z})$ по образу отображения i_* изоморфен T.

1.4.7. Используя свободные резольвенты $0 \to R \to F \to A \to 0$ и $0 \to R' \to F' \to A' \to 0$ и канонический изоморфизм $A \otimes G \cong G \otimes A$, можно построить коммутативную диаграмму

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & \operatorname{Tor}(B, A) & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \to & R \otimes R' & \to & F \otimes R' & \to & A \otimes R' & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \to & R \otimes F' & \to & F \otimes F' & \to & A \otimes F' & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Tor}(A, B) & \to & R \otimes B & \to & F \otimes B & \to & A \otimes B & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

Требуется построить изоморфизм $\operatorname{Tor}(A, B) \to \operatorname{Tor}(B, A)$. Это делается точно так же, как строится связывающий гомоморфизм в точной последовательности пары. Для удобства введём единообразные обозначения для групп и гомоморфизмов:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & X_{11} & \xrightarrow{\beta_{11}} & X_{12} & \xrightarrow{\beta_{12}} & X_{13} & \to & 0 \\
 & & \downarrow \alpha_{11} & & \downarrow \alpha_{12} & & \downarrow \alpha_{13} & & \\
0 & \to & X_{21} & \xrightarrow{\beta_{21}} & X_{22} & \xrightarrow{\beta_{22}} & X_{23} & \to & 0 \\
 & & \downarrow \alpha_{21} & & \downarrow \alpha_{22} & & \downarrow \alpha_{23} & & \\
 & & X_{31} & \xrightarrow{\beta_{31}} & X_{32} & \xrightarrow{\beta_{32}} & X_{33} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

Требуется построить изоморфизм $\operatorname{Ker} \alpha_{13} \to \operatorname{Ker} \beta_{31}$.

Пусть $x_{13} \in \operatorname{Ker} \alpha_{13}$. Пользуясь эпиморфностью β_{12}, выберем элемент $x_{12} \in X_{12}$, для которого $\beta_{12}(x_{12}) = x_{13}$. Тогда $\beta_{22}\alpha_{12}(x_{12}) = \alpha_{13}\beta_{12}(x_{12}) = \alpha_{13}(x_{13}) = 0$, поэтому для выбранного элемента x_{12} существует единственный элемент x_{21}, для которого $\beta_{21}(x_{21}) = \alpha_{12}(x_{12})$. Сам элемент x_{12} не единствен. Но если x'_{12} — другой элемент, для которого $\beta_{12}(x_{12}) = x_{13}$, то $\beta_{12}(x_{12} - x'_{12}) = 0$, поэтому $x_{12} - x'_{12} = \beta_{11}(x_{11})$ для некоторого $x_{11} \in X_{11}$.

Перейдём от элемента x_{21} к элементу $x_{31} = \alpha_{21}(x_{21}) \in X_{31}$. Этот элемент определён однозначно. Действительно, $\beta_{21}(x_{21} - x'_{21}) = \alpha_{12}(x_{12} - x'_{12}) = \alpha_{12}\beta_{11}(x_{11}) = \beta_{21}\alpha_{11}(x_{11})$. Но β_{21} — мономорфизм, поэтому $x_{21} - x'_{21} = \alpha_{11}(x_{11})$, а значит, $\alpha_{21}(x_{21} - x'_{21}) = \alpha_{21}\alpha_{11}(x_{11}) = 0$.

Проверим теперь, что $x_{31} \in \operatorname{Ker} \beta_{31}$. По построению $\beta_{31}(x_{31}) = \beta_{31}\alpha_{21}(x_{21}) = \alpha_{22}\beta_{21}(x_{21}) = \alpha_{22}\alpha_{12}(x_{12}) = 0$.

Отображение $\operatorname{Ker} \beta_{31} \to \operatorname{Ker} \alpha_{13}$ строится аналогично. Ясно, что при этом элемент $x_{31} = \alpha_{21}(x_{21})$ переходит в x_{13}, т.е. построенные отображения взаимно обратны.

1.4.8. Для периодической группы T существует резольвента вида $0 \to F \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} T \to 0$, где F — свободная абелева группа. Действительно, пусть при эпиморфизме $p : F \to T$ образующая f_α переходит в элемент порядка n_α. Тогда мы полагаем $i(f_\alpha) = n_\alpha f_\alpha$. Предположим, что $\operatorname{Ext}(T, \mathbb{Z}) = 0$. Тогда отображение $\operatorname{Hom}(F, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\tilde{p}} \operatorname{Hom}(F, \mathbb{Z})$ является изоморфизмом. Пусть $\varphi \in \operatorname{Hom}(F, \mathbb{Z})$ и $\varphi(f_\alpha) = k_\alpha$. Тогда $\tilde{i}\varphi(f_\alpha) = n_\alpha k_\alpha$. Поэтому из того, что $\tilde{i}$ — изоморфизм, следует, что $n_\alpha = \pm 1$. Но в таком случае i — изоморфизм, а значит, $T = 0$.

1.4.9. Рассмотрим гомоморфизмы $\alpha : G \to A$ и $\beta : G \to B$. Если $\varphi\alpha = 0$, то $\alpha = 0$, поскольку φ — мономорфизм. Значит, $\tilde{\varphi}$ — мономорфизм. Докажем теперь, что $\operatorname{Im} \tilde{\varphi} = \operatorname{Ker} \tilde{\psi}$. т.е. $\beta = \varphi\alpha$ для некоторого α тогда и только тогда, когда $\psi\beta = 0$. Если $\beta = \varphi\alpha$, то $\psi\beta = \psi\varphi\alpha = 0$, поскольку $\psi\varphi = 0$. Если $\psi\beta(g) = 0$, то $\beta(g) \in \operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Im} \varphi$, т.е. $\beta(g) = \varphi(a)$, причём элемент $a \in A$ определён однозначно, поскольку φ — мономорфизм. Поэтому можно положить $\alpha(g) = \varphi^{-1}\beta(g)$.

1.4.10. а) Задача 1.4.9 показывает, что нужно лишь доказать, что $\tilde{\psi}$ — эпиморфизм. Другими словами, для любого гомоморфизма $\gamma : F \to C$ можно выбрать гомоморфизм $\beta : F \to B$ так, что $\gamma = \psi\beta$. Пусть $\{f_\alpha\}$ — базис F. Положим $\beta(f_\alpha) = b_\alpha$, где b_α — произвольный элемент группы B, для которого $\psi(b_\alpha) = \gamma(f_\alpha)$; такой элемент существует, поскольку ψ

— эпиморфизм. Гомоморфизм свободной группы достаточно задать на образующих.

б) Теорема 1.4.2 показывает, что нужно лишь доказать, что $\tilde{\varphi}$ — эпиморфизм. Другими словами, если $A \subset B$ — подгруппа, то любой гомоморфизм $\alpha : A \to G$ можно продолжить до гомоморфизма $\beta : B \to G$. Пусть $x \in B \setminus A$. Продолжим гомоморфизм α на группу, порождённую x и A следующим образом:

- если $mx \notin A$ для всех $m \in \mathbb{N}$, то положим $\beta(x) = 0$;

- $mx \in A$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то выберем минимальное число $n \in \mathbb{N}$, обладающее этим свойством, и положим $\beta(x) = g$, где g — элемент группы G, для которого $ng = \alpha(nx)$.

Требуемый гомоморфизм теперь можно построить по индукции (если группа B/A не конечно порождённая, то индукция трансфинитная).

1.4.11. Мы будем неоднократно пользоваться результатом задачи 1.3.3, поэтому введём для краткости следующие обозначения. Пусть Σ — коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} \\ B_1 & \xrightarrow{\beta} & B_2. \end{array}$$

Положим $\operatorname{Im}\Sigma = (\operatorname{Im}\varphi_2 \cap \operatorname{Im}\beta)/\operatorname{Im}(\varphi_2\alpha)$ и $\operatorname{Ker}\Sigma = \operatorname{Ker}(\varphi_2\alpha)/(\operatorname{Ker}\alpha + \operatorname{Ker}\varphi_1)$. При таких обозначениях задача 1.3.3 формулируется так: $\operatorname{Ker}\Sigma_1 \cong \operatorname{Im}\Sigma_2$, где Σ_1 — левый квадрат, а Σ_2 — правый квадрат. Обратите внимание, что если мы запишем ту же самую коммутативную диаграмму по-другому:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & B_2, \end{array}$$

то получим те же самые $\operatorname{Im}\Sigma$ и $\operatorname{Ker}\Sigma$, поскольку $\beta\varphi_1 = \varphi_2\alpha$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}(A,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A,G) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A,H) & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Ext}}(A,B) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & \Sigma_2 & \big\downarrow & \Sigma_1 & \big\downarrow \\
\mathrm{Hom}(F,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(F,G) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(F,H) & \longrightarrow & 0 \\
\big\downarrow & \Sigma_4 & \big\downarrow & \Sigma_3 & \big\downarrow & & \\
\mathrm{Hom}(R,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(R,G) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(R,H) & & \\
\big\downarrow & \Sigma_5 & \big\downarrow & & & & \\
\mathrm{Ext}(A,B) & \longrightarrow & 0 & & & &
\end{array}$$

Два нуля в этой диаграмме появились из-за того, что группа F свободная, а группа G делимая.

Легко проверить, что $\mathrm{Ker}\,\Sigma_1 = \widetilde{\mathrm{Ext}}(A,B)$ и $\mathrm{Ker}\,\Sigma_5 = \mathrm{Ext}(A,B)$. Действительно, в обоих случаях мы имеем дело с диаграммой вида

$$\begin{array}{ccc}
A_1 & \xrightarrow{\ \alpha\ } & A_2 \\
\big\downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_2} \\
B_1 & \xrightarrow{\ \beta\ } & 0,
\end{array}$$

где φ_1 — мономорфизм (здесь A_2 — это $\widetilde{\mathrm{Ext}}(A,B)$ или $\mathrm{Ext}(A,B)$). Но для такой диаграммы $\mathrm{Ker}\,\Sigma = A_1 / \mathrm{Ker}\,\alpha$, поскольку $\varphi_2\alpha = 0$ и $\mathrm{Ker}\,\varphi_1 = 0$.

Теперь, используя задачу 1.3.3, получаем: $\widetilde{\mathrm{Ext}}(A,B) \cong \mathrm{Ker}\,\Sigma_1 \cong \mathrm{Im}\,\Sigma_2 \cong \mathrm{Ker}\,\Sigma_3 \cong \mathrm{Im}\,\Sigma_4 \cong \mathrm{Ker}\,\Sigma_5 \cong \mathrm{Ext}(A,B)$.

Отметим, что попутно мы получили ещё одну интерпретацию группы $\mathrm{Ext}(A,B)$, а именно, $\mathrm{Ext}(A,B) = \mathrm{Ker}\,\Sigma_3$.

1.4.12. Возьмём для группы X проективную резольвенту $0 \to R \to F \to X \to 0$ и инъективную резольвенту $0 \to X \to G \to H \to 0$. С помощью этих резольвент можно построить коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(F,A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(F,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(F,C) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(R,A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(R,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(R,C) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(A,G) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(B,G) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(C,G) & \longleftarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
0 & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(A,H) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(B,H) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(C,H) & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

с точными строками.

Точные последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}(X,A) \to \mathrm{Hom}(F,A) \to \mathrm{Hom}(R,A) \to \mathrm{Ext}(X,A) \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Hom}(A,X) \to \mathrm{Hom}(A,G) \to \mathrm{Hom}(A,H) \to \mathrm{Ext}(A,X) \to 0$$

показывают, что ядро и коядро отображения $\mathrm{Hom}(F,A) \to \mathrm{Hom}(R,A)$ — это $\mathrm{Hom}(X,A)$ и $\mathrm{Ext}(X,A)$, а ядро и коядро отображения $\mathrm{Hom}(A,G) \to \mathrm{Hom}(A,H)$ — это $\mathrm{Hom}(A,X)$ и $\mathrm{Ext}(A,X)$. Поэтому, воспользовавшись задачей 1.3.1, получаем требуемое.

1.4.13. Согласно формуле универсальных коэффициентов

$$H^1(K;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}\big(H_1(K),\mathbb{Z})\big) \oplus \mathrm{Ext}\big(H_0(K),\mathbb{Z})\big).$$

Но $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, поэтому $\mathrm{Ext}\big(H_0(K),\mathbb{Z})\big) = 0$. Ясно также, что если T_1 — конечная группа, то $\mathrm{Hom}(T_1,\mathbb{Z}) = 0$ и $\mathrm{Hom}(T_1 \oplus \mathbb{Z}^r,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$.

1.4.13. Согласно формуле универсальных коэффициентов

$$\begin{aligned} H^i(K;\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^{n_i} \oplus T_i,\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}^{n_{i-1}} \oplus T_{i-1},\mathbb{Z}) \cong \\ &\cong \mathbb{Z}^{n_i} \oplus T_{i-1}, \end{aligned}$$

поскольку $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}^{n_{i-1}} \oplus T_{i-1},\mathbb{Z}) \cong T_{i-1}$ согласно задаче 1.4.6.

1.5.1. Рассмотрим ту же самую последовательность Майера–Вьеториса, что и при решении задачи 1.3.9. Если M^n — замкнутое ориентируемое многообразие, то связывающий гомоморфизм $H_n(M^n) \to H_{n-1}(S^{n-1})$ переводит фундаментальный класс $[M^n]$ в фундаментальный класс $[S^{n-1}]$, поэтому он является изоморфизмом. Из этого следует, что отображение $H_{n-1}(M^n \setminus \operatorname{int} D^n) \to H_{n-1}(M^n)$ является изоморфизмом.

Замкнутость M^n существенна. Пусть, например, $M^n = D_1^n$ — n-мерный шар, содержащий меньший шар D^n. Тогда $M^n \setminus \operatorname{int} D^n \sim S^{n-1}$, поэтому $H_{n-1}(M^n \setminus \operatorname{int} D^n) = \mathbb{Z} \neq 0 = H_{n-1}(M^n)$.

Ориентируемость M^n тоже существенна. Пусть, например, $M^n = \mathbb{R}P^2$. Тогда $\mathbb{R}P^2 \setminus \operatorname{int} D^2 \sim S^1$, поэтому $H_1(\mathbb{R}P^2 \setminus \operatorname{int} D^2) = H_1(S^1) = \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}_2 = H_1(\mathbb{R}P^2)$.

1.5.2. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(\Sigma S^n) & \xrightarrow{\cong} & H_n(S^n) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (\Sigma f)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} \\ H_{n+1}(\Sigma S^n) & \xrightarrow{\cong} & H_n(S^n), \end{array}$$

где горизонтальные стрелки — изоморфизмы надстройки. Поэтому если f_* — умножение на d, то $(\Sigma f)_*$ — тоже умножение на d.

1.5.3. Ясно, что $H_0 = \mathbb{Z}_p$, $H_2 = \mathbb{Z}_p$ в ориентируемом случае и $H_2 = 0$ в неориентируемом случае. Далее,

$$H_1(K;\mathbb{Z}_p) \cong \big(H_1(K) \otimes \mathbb{Z}_p\big) \oplus \operatorname{Tor}\big(H_1(K), \mathbb{Z}_p\big) \cong H_0(K) \otimes \mathbb{Z}_p,$$

поскольку $H_0(K) = \mathbb{Z}$. Поэтому $H_1(nT^2;\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{2n}$ и $H_1(mP^2;\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{m-1}$.

1.5.4. Ясно, что $H^0 = \mathbb{Z}$. Далее,

$$H^1(K;\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}\big(H_1(K), \mathbb{Z}\big) \oplus \operatorname{Ext}\big(H_0(K), \mathbb{Z}\big) \cong \operatorname{Hom}\big(H_1(K), \mathbb{Z}\big),$$

поскольку $H_0(K) = \mathbb{Z}$. Таким образом, $H^1(nT^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2n}$ и $H^1(mP^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{m-1}$. Наконец,

$$H^2(K;\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}\big(H_2(K), \mathbb{Z}\big) \oplus \operatorname{Ext}\big(H_1(K), \mathbb{Z}\big).$$

Поэтому $H^2(nT^2;\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ и $H^2(mP^2;\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Ext}\big(H_1(mP^2), \mathbb{Z}\big) \cong \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$.

1.5.5. Ясно, что $H \cup X = S^3$ и $H \cap X = \partial H$ — сфера с g ручками. Поэтому последовательность Майера–Вьеториса для X и H выглядит следующим образом:

$$\ldots \to H_2(S^3) \to H_1(\partial H) \to H_1(X) \oplus H_1(H) \to H_1(S^3) \to \ldots$$

Здесь $H_2(S^3) = H_1(S^3) = 0$, поэтому $H_1(\partial H) \cong H_1(X) \oplus H_1(H)$, т.е. $\mathbb{Z}^{2g} \cong H_1(X) \oplus \mathbb{Z}^g$. Значит, $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^g$.

Группы $H_1(H)$ и $H_1(X)$ изоморфны, соответственно, ядру и образу гомоморфизма $i_* : H_1(\partial H) \to H_1(H)$. Ядро i_* порождено меридианами края тела с ручками, а образ — параллелями. Поэтому образующими $H_1(H)$ служат окружности, надетые на ручки тела H.

1.5.6. Тор T^n можно представить как n-мерный куб, у которого отождествлены соответственные точки противоположных граней. Для

n-мерного тора k-мерная грань задаётся $n-k$ уравнениями вида $x_i = \pm 1$. Поэтому количество k-мерных граней равно $2^{n-k}\binom{n}{k}$. После отождествлений для тора получаем $\binom{n}{k}$ клеток размерности k. Как и в случае двумерного тора, все граничные гомоморфизмы нулевые. Поэтому гомологии n-мерного тора — это гомологии цепного комплекса

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}} \to \ldots \to \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}} \to \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$$

с нулевыми гомоморфизмами. Следовательно, $H_k(T^n) = \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}}$.

1.5.7. Группы когомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}$ легко вычисляются, если известны группы гомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}$ (задача 1.4.13). Поэтому пример 1.5.4 показывает, что

$$H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{для } k=0 \text{ и } k=n, \text{ где } n \text{ нечётно;} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{для чётных } k,\ \ 0<k\leqslant n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

1.5.8. Пусть a и b — 1-мерные клетки. Приклеим к ним две 2-мерные клетки по словам a^5b^{-3} и $b^3(ab)^{-2}$. В результате получим CW-комплекс X. Цепной комплекс для вычисления клеточных гомологий X имеет вид $\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}^2 \to 0$, где гомоморфизм ∂ задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы равен -1, поэтому ∂ — изоморфизм. Следовательно, CW-комплекс X ацикличен.

Чтобы доказать, что X нестягиваем, достаточно доказать, что группа $\pi_1(X)$ нетривиальна. Группа $\pi_1(X)$ задаётся образующими a и b и соотношениями $a^5 = b^3 = (ab)^2$. Существует нетривиальный гомоморфизм этой группы в группу собственных движений додекаэдра. А именно, пусть A — поворот додекаэдра на угол $2\pi/5$ вокруг оси, проходящей через центр грани, B — поворот додекаэдра на угол $2\pi/3$ вокруг оси, проходящей через вершину (конкретные оси и направления поворотов указаны на рис. 6.29). Тогда AB — поворот на π вокруг оси, проходящей через точку C (середину ребра). Таким образом, $A^5 = B^3 = (AB)^2$ — тождественное преобразование. Поэтому отображение образующих $a \mapsto A$, $b \mapsto B$ можно продолжить до гомоморфизма групп.

1.5.9. Из формулы универсальных коэффициентов следует, что $\mathbb{Z}^{b_k} \oplus T^k \cong \mathbb{Z}^{a_k} \oplus T_{k-1}$, т.е. $b_k = a_k$ и $T^k \cong T_{k-1}$. В частности, $T^1 \cong T_0 = 0$. Согласно двойственности Пуанкаре $a_k = b_{n-k}$ и $T_k \cong T^{n-k}$. Поэтому $T_k \cong T^{n-k} \cong T_{n-k-1}$ и $T^k \cong T_{n-k} \cong T^{n-k+1}$.

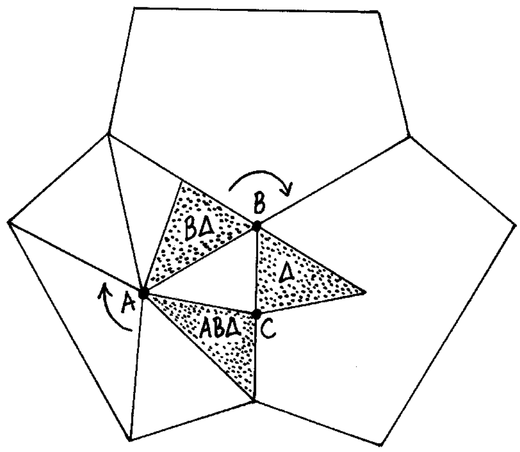

Рис. 6.29. Повороты додекаэдра

1.5.10. Пусть $H_k(M^n) = H_k \oplus T_k$, где H_k — свободная абелева группа, T_k — подгруппа кручения. Применив задачу 1.5.9 для многообразия M^n, получим $H_k = H_{n-k}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$ и $T_k = T_{n-k-1}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-2$. Применив задачу 1.5.9 и изоморфизм надстройки для многообразия ΣM^n, получим $H_{n-1} = 0$, $H_{k-1} = H_{n-k}$ при $k = 2, \ldots, n-1$, $T_{n-2} = 0$, $T_{k-1} = T_{n-k-1}$ при $k = 2, \ldots, n-2$. Следовательно, $H_1 = \ldots = H_{n-1} = 0$ и $T_1 = \ldots = T_{n-2} = 0$. Кроме того, $T_{n-1} = 0$ для любого замкнутого ориентируемого многообразия M^n.

1.5.11. Рассмотрим единичный вектор, перпендикулярный плоскости диаграммы и направленный вверх, как точку сферы S^2. Точки тора, отображающиеся в эту точку, находятся во взаимно однозначном соответствии с теми перекрёстками, на которых кривая J проходит под K. Рис. 6.30 показывает, что разным типам перекрёстков соответствуют разные знаки якобиана отображения f.

Чтобы выполнялось равенство $\deg f = \mathrm{lk}(J, K)$, ориентации можно выбрать, например, следующим образом. Базис e_1, e_2, где e_1 и e_2 — касательные векторы к J и K, задаёт положительную ориентацию тора. Базис $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ задаёт положительную ориентацию сферы, если базис $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, где ε_3 — вектор внешней нормали, положительно ориентирован.

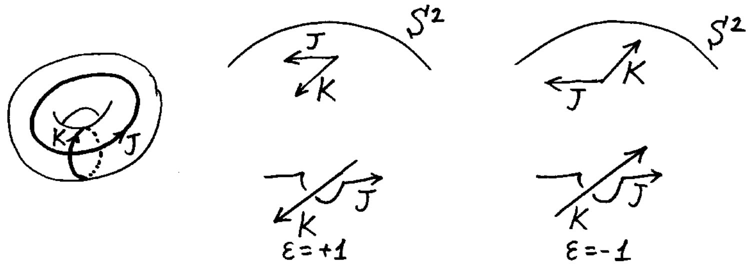

Рис. 6.30. Отображение f

1.6.1. Измельчив при необходимости триангуляцию L, можно считать, что каждый симплекс L полностью покрыт окрестностью U, входящей в определение накрытия. Тогда в качестве триангуляции K можно взять прообразы симплексов L. Пусть $a_i(K)$ и $a_i(L)$ — количества i-мерных симплексов в K и в L для таких триангуляций. Тогда $a_i(K) = na_i(L)$, поэтому $\chi(K) = n\chi(L)$.

1.6.2. Если $f^n = \mathrm{id}_K$ и отображение f не имеет неподвижных точек, то можно построить n-листное накрытие $p : K \to K/\sim$, где $x \sim f(x) \sim f^2(x) \sim \ldots \sim f^n(x) = x$. Если триангуляция K достаточно мелкая, то симплексы Δ и $f(\Delta)$ не пересекаются. Такая триангуляция индуцирует триангуляцию пространства $K/\sim$. Поэтому согласно задаче 1.6.1 $\chi(K/\sim) = n\chi(K) \equiv 0 \pmod n$.

1.6.3. Ясно, что $\operatorname{Im} f_i \cong V_i/\operatorname{Ker} f_i$, поэтому

$$\dim V_i = \dim \operatorname{Im} f_i + \dim \operatorname{Ker} f_i.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum(-1)^i \dim V_i &= \sum(-1)^i \dim \operatorname{Im} f_i + \sum(-1)^i \dim \operatorname{Ker} f_i = \\ &= \sum(-1)^i \dim \operatorname{Im} f_i + \sum(-1)^i \dim \operatorname{Im} f_{i+1} = 0.\end{aligned}$$

1.6.4. Запишем точную последовательность пары для гомологий с коэффициентами в некотором поле:

$$\ldots \to H_i(B) \to H_i(A) \to H_i(A, B) \to H_{i-1}(B) \to \ldots$$

В этой последовательности есть лишь конечное число ненулевых членов, поэтому можно воспользоваться задачей 1.6.3. В результате получим

$$\sum(-1)^i \dim H_i(B) + \sum(-1)^{i+1} \dim H_i(A) + \sum(-1)^i \dim H_i(A, B) = 0.$$

1.6.5. Занумеруем i-мерные грани K числами $1, 2, \ldots, f_i$, где f_i — количество i-мерных граней, а затем для i-мерной грани F_k^i с номером k рассмотрим число $p_{ij}(k)$, равное количеству j-мерных граней, пересекающих грань F_k^i. Количество j-мерных граней, её не пересекающих, равно $f_j - p_{ij}(k)$, поэтому

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{f_i}(f_j - p_{ij}(k)) = f_i f_j - \sum_{k=1}^{f_i} p_{ij}(k). \tag{1}$$

Лемма. *Для каждой i-мерной грани F_k^i выполняется равенство* $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j p_{ij}(k) = (-1)^n$.

Доказательство. Введём на многообразии M^n риманову метрику и рассмотрим множество Q_ε, состоящее из точек M^n, удалённых от F_k^i не более чем на ε. Если ε достаточно мало, то Q_ε гомеоморфно n-мерному шару и Q_ε не содержит вершин K, отличных от вершин грани F_k^i.

Пересечения граней K с $\partial Q_\varepsilon \approx S^{n-1}$ задают на S^{n-1} структуру CW-комплекса. Количество $(j-1)$-мерных клеток этого CW-комплекса равно количеству j-мерных граней K, пересекающих грань F_k^i и при этом не содержащихся в F_k^i. Поэтому

$$p_{ij}(k) = q_{j-1} + r_j, \tag{2}$$

где q_{j-1} — количество $(j-1)$-мерных клеток CW-комплекса ∂Q_ε (предполагается, что $q_{-1} = 0$), r_j — количество j-мерных граней выпуклого многогранника F_k^i (предполагается, что $r_i = 1$ и $r_j = 0$ при $j > i$).

Ясно, что $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j r_j = \chi(D^k) = 1$ и $\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j q_j = \chi(S^{n-1}) = 1 + {} + (-1)^{n-1}$. Воспользовавшись формулой (2), получаем

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j p_{ij}(k) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j q_{j-1} + \sum_{j=0}^{n}(-1)^j r_j = -1 - (-1)^{n-1} + 1 = (-1)^n,$$

что и требовалось. □

Из формулы (1) следует, что

$$\begin{aligned}\Psi(K) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij} = \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{i+j}f_i f_j - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{f_i}(-1)^{i+j}p_{ij}(k).\end{aligned}$$

Первая сумма вычисляется непосредственно:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{i+j}f_i f_j = \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_i\right)^2 = \chi^2(M^n).$$

При вычислении второй суммы воспользуемся леммой:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{f_i}(-1)^{i+j}p_{ij}(k) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sum_{k=1}^{f_i}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j p_{ij}(k) = \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sum_{k=1}^{f_i}(-1)^n = \\ &= (-1)^n\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_i = (-1)^n\chi(M^n).\end{aligned}$$

В итоге получаем $\Psi(K) = \chi^2(M^n) - (-1)^n\chi(M^n)$. Но если n нечётно, то $\chi(M^n) = 0$. Поэтому $\Psi(K) = \chi^2(M^n) - \chi(M^n)$.

1.6.6. Рассмотрим на M^k следующее отношение эквивалентности: $x \sim y$, если нормальные подпространства в точках x и y совпадают (т.е. эти точки лежат в одном нормальном подпространстве). Отображение $M^k \to N^k/\sim$ является накрытием, поскольку каждая нормальная плоскость пересекает M^k трансверсально.

1.6.7. Достаточно доказать, что для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ индекс пересечения M^k и нормального подпространства равен 0. Любое $(n-k)$-мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$ можно переместить в любое другое $(n-k)$-мерное подпространство, поэтому индекс пересечения M^k с $(n-k)$-мерным подпространством не зависит от выбора подпространства. Но для компактного многообразия существует подпространство, с которым оно не пересекается.

1.6.8. Выберем точку $a \in M^k$ так, чтобы функция $f(x) = \|x - a\|^2$, $x \in M^k$, не имела вырожденных критических точек. Критические точки этой функции — это точки пересечения M^k с нормальным подпространством в точке a. Пусть r_i — число критических точек индекса i. Тогда $\sum_{i=0}^{k} r_i = r$ и $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i r_i = \chi(M^k)$. Ясно также, что $r_0 > 0$. Поэтому $-r < \chi(M^k) \leqslant r$. Но $\chi(M^k) = r\chi(N^k)$, где N^k — многообразие, введённое при решении задачи 1.6.6. Значит, $-1 < \chi(N^k) \leqslant 1$. Таким образом, $\chi(N^k) = 0$ или 1, т.е. $\chi(M^k) = 0$ или r.

1.6.9. При решении задачи 1.6.8 мы получили, что если M^k — замкнутое многообразие, для которого существует транснормальное вложение, причём $\chi(M^k) \neq 0$, то $r_i = 0$ для всех нечётных i. Поэтому M^k гомотопически эквивалентно CW-комплексу, у которого нет клеток нечётной размерности.

1.6.10. Требуемое утверждение достаточно доказать в случае, когда f — симплициальное отображение. В этом случае цепное отображение $f_k : C_k(K; \mathbb{R}) \to C_k(K; \mathbb{R})$ задаётся матрицей A с целочисленными элементами, а цепное отображение f_k^p задаётся матрицей A^p.

Лемма. *Пусть A — квадратная матрица с целочисленными элементами, p — простое число. Тогда* $\operatorname{tr}(A^p) \equiv \operatorname{tr} A \pmod p$.

Доказательство. Пусть $f(x) = \det(xI - A)$, где I — единичная матрица. Любому многочлену f с целыми коэффициентами соответствует многочлен $\bar{f}$ над полем $\mathbb{F}_p$ (конечное поле из p элементов). Присоединим к $\mathbb{F}_p$ корни $x_1, \ldots, x_n$ многочлена $\bar{f}$. В результате получим поле $\mathbb{F}_{p^k}$.

Для любых элементов $x, y \in \mathbb{F}_{p^k}$ выполняется равенство $(x+y)^p = x^p + y^p$, поскольку $\binom{p}{m} \equiv 0 \pmod p$ при $m = 1, 2, \ldots, p-1$. Поэтому

$$x_1^p + \ldots + x_n^p = (x_1 + \ldots + x_n)^p = x_1 + \ldots + x_n$$

(второе равенство следует из того, что $x_1 + \ldots + x_n \in \mathbb{F}_p$). Но $x_1 + \ldots + x_n = \operatorname{tr} A \pmod p$ и $x_1^p + \ldots + x_n^p = \operatorname{tr}(A^p) \pmod p$. Первое равенство очевидно, а второе следует из того, что если $f(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$, то $\lambda_1^p + \ldots + \lambda_n^p$ выражается как многочлен с целыми коэффициентами через коэффициенты многочлена f, причём $x_1^p + \ldots + x_n^p$ выражается через коэффициенты многочлена $\bar{f}$ точно так же. □

Из леммы требуемое утверждение следует очевидным образом.

2.1.1. Это следует из того, что для относительных когомологий cup-умножение определяется точно так же, как и для абсолютных. Нужно лишь заметить, что $L \cup \varnothing = L \cup L$.

2.1.2. а) Из точной когомологической последовательности

$$H^{p_i}(K, L_i) \to H^{p_i}(K) \to H^{p_i}(L_i) = 0$$

следует, что отображение $H^{p_i}(K, L_i) \to H^{p_i}(K)$ — эпиморфизм, т.е. в $H^{p_i}(K, L_i)$ есть элемент β_i, отображающийся в α_i. При этом элемент $\beta_1 \smile \ldots \smile \beta_n$ отображается в $\alpha_1 \smile \ldots \smile \alpha_n$. Но $\beta_1 \smile \ldots \smile \beta_n \in H^*(K, \bigcup_{i=1}^n L_i) = 0$.

б) Очевидным образом следует из а), поскольку надстройка представляется в виде объединения двух стягиваемых пространств — цилиндров.

2.1.3. Пусть $\alpha|_{S^n}$ — образ элемента α при естественном гомоморфизме $H^*(S^n, M^k) \to H^*(S^n)$. Тогда $\alpha \smile \beta = (\alpha|_{S^n}) \smile \beta = \alpha \smile (\beta|_{S^n})$. Если $0 < \dim \alpha < n$, то $\alpha|_{S^n} = 0$, а если $0 < \dim \beta < n$, то $\beta|_{S^n} = 0$. Остаётся рассмотреть лишь случай, когда $\dim \alpha = \dim \beta = n$. Но в этом случае $\alpha \smile \beta \in H^{2n}(S^n, M^k) = 0$.

2.1.4. а) Пусть G и H — абелевы группы, а $\varphi : G \to H$ и $\psi : H \to G$ — гомоморфизмы, для которых $\psi\varphi = \mathrm{id}_G$. Тогда $H = \operatorname{Im} \varphi \oplus \operatorname{Ker} \psi$. Действительно, любой элемент $h \in H$ можно представить в виде $h = \varphi\psi h + (h - \varphi\psi h)$, где $\varphi\psi h \in \operatorname{Im} \varphi$ и $h - \varphi\psi h \in \operatorname{Ker} \psi$. Кроме того, если $x = \varphi g$ и $\psi x = 0$, то $g = \psi\varphi g = \psi x = 0$, поэтому $g = 0$, а значит, $x = 0$.

Применив это утверждение к гомоморфизмам $i_* : H_*(A) \to H_*(X)$, $r_* : H_*(X) \to H_*(A)$ и к гомоморфизмам $r^* : H^*(A) \to H^*(X)$, $i^* : H^*(X) \to H^*(A)$, получаем требуемое.

б) Равенство $r^*\alpha \smile r^*\beta = r^*(\alpha \smile \beta)$ показывает, что $\operatorname{Im} r^*$ — подкольцо. Равенство $i^*(\alpha \smile \beta) = i^*\alpha \smile i^*\beta$ показывает, что если $i^*\alpha = 0$ или $i^*\beta = 0$, то $i^*(\alpha \smile \beta) = 0$.

2.1.5. Прежде всего заметим, что $H^p(X \vee Y) = H^p(X) \oplus H^p(Y)$ при $p \geqslant 1$. Ретракции $X \vee Y \to X$ и $X \vee Y \to Y$ показывают, что $H^*(X)$ и $H^*(Y)$ — идеалы в $H^*(X \vee Y)$ (задача 2.1.4). Поэтому $(x + y) \smile (x' + y') = x \smile x' + y \smile y'$ для любых когомологических классов $x, x' \in H^*(X)$ и $y, y' \in H^*(Y)$, имеющих положительную размерность. Действительно, $x \smile y' \in H_*(X) \cap H_*(Y)$, поэтому $x \smile y' = 0$.

2.1.6. Предположим, что существует ретракция $r: S^p \times S^q \to S^p \vee S^q$. Тогда согласно задаче 2.1.4 $H^*(S^p \times S^q) = \operatorname{Ker} i^* \oplus \operatorname{Im} r^*$. Пусть 1, α^p, β^q и $\alpha^p \smile \beta^q$ — образующие нетривиальных групп когомологий $S^p \times S^q$. Легко видеть, что $\operatorname{Ker} i^* = H^{p+q}(S^p \times S^q)$. Поэтому $\operatorname{Im} r^*$ состоит из линейных комбинаций элементов 1, α^p и β^q. Но тогда $\alpha^p \smile \beta^q \notin \operatorname{Im} r^*$, поэтому $\operatorname{Im} r^*$ — не подкольцо. Получено противоречие.

2.1.7. а) Пусть $\alpha_{(n)}$ и $\alpha_{(m)}$ — образующие групп $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ и $H^1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$. Предположим, что существует ретракция $r: \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^m$. Тогда согласно задаче 2.1.4 $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ является прямой суммой $\operatorname{Ker} i^*$ и $\operatorname{Im} r^*$. Ясно, что $i^*(\alpha_{(n)}) = \alpha_{(m)}$, поэтому $\operatorname{Ker} i^*$ состоит из элементов 0, $\alpha_{(n)}^{m+1}$, …, $\alpha_{(n)}^n$. Следовательно, $\operatorname{Im} r^*$ состоит из элементов 0, 1, $\alpha_{(n)}$, $\alpha_{(n)}^2$, …, $\alpha_{(n)}^m$. Но это — не подкольцо, а согласно задаче 2.1.4 $\operatorname{Im} r^*$ — подкольцо.

б) Решается аналогично.

2.1.8. а) Выберем в $H^1(M_2^2)$ и в $H^1(M_1^2)$ базисы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ и $\alpha_1', \ldots, \alpha_m', \beta_1', \ldots, \beta_m'$, как в теореме 2.1.3. Пусть $\Lambda = \alpha_1 \smile \beta_1$ и $\Lambda' = \alpha_1' \smile \beta_1'$ — образующие групп $H^1(M_2^2)$ и $H^1(M_1^2)$. Тогда если

$$f_1^*(\alpha_1) = a_1\alpha_1' + \ldots + a_m\alpha_m' + b_1\beta_1' + \ldots + b_m\beta_m',$$
$$f_1^*(\beta_1) = c_1\alpha_1' + \ldots + c_m\alpha_m' + d_1\beta_1' + \ldots + d_m\beta_m',$$

то

$$f^*(\Lambda) = f^*(\alpha_1 \smile \beta_1) = \\ = (a_1d_1 + \ldots + a_md_m - b_1c_1 - \ldots - b_mc_m)\Lambda'.$$

б) Гомоморфизм h, переводящий α_1 в α_1', а β_2 в β_1', не может быть индуцирован непрерывным отображением $f: M_1^2 \to M_2^2$, поскольку $f^*(\alpha_1) \smile f^*(\beta_2) = f^*(\alpha_1 \smile \beta_2) = 0$.

2.2.1. а) Ясно, что $H^0(S^k \times S^k) \cong H^{2k}(S^k \times S^k) \cong \mathbb{Z}$ и $H^k(S^k \times S^k) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, а все остальные группы когомологий нулевые. Пусть $\alpha, \beta \in H^k(S^k \times S^k)$ — классы когомологий, двойственные (в смысле линейной алгебры) гомологическим классам циклов $S^k \times \{x_0\}$ и $\{y_0\} \times S^k$. Тогда $\alpha \smile \beta = \Lambda$, где Λ — образующая группы $H^{2k}(S^k \times S^k)$; это следует из того, что указанные циклы трансверсально пересекаются в одной точке (y_0, x_0). Проверим теперь что $\alpha \smile \alpha = 0$ и $\beta \smile \beta = 0$. Цикл $S^k \times \{x_0\}$ гомологичен циклу $S^k \times \{x_0'\}$; чтобы это доказать, достаточно рассмотреть цепь $S^k \times I$, где I — путь с концами x_0 и

x'_0. Циклы $S^k \times \{x_0\}$ и $S^k \times \{x'_0\}$ не пересекаются, поэтому $\alpha \smile \alpha = 0$. Аналогично доказывается, что $\beta \smile \beta = 0$.

б) Прежде всего заметим, что коцикл $\alpha + \beta$ двойствен диагонали и $(\alpha + \beta) \smile (\alpha + \beta) = \alpha \smile \beta + \beta \smile \alpha$. Если k нечётно, то $\alpha \smile \beta = -\beta \smile \alpha$; в этом случае индекс самопересечения диагонали равен 0. Если же k чётно, то $\alpha \smile \beta + \beta \smile \alpha = 2\alpha \smile \beta = 2\Lambda$, поэтому индекс самопересечения диагонали равен ± 2. Знак зависит от того, как выбраны ориентации диагонали и $S^k \times S^k$. Если задана ориентация S^k, то ориентация диагонали задаётся естественным образом. При чётном k ориентация $S^k \times S^k$ тоже задаётся канонически, потому что базисы $e_1, \ldots, e_k, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, e_1, \ldots, e_k$ при чётном k ориентированы одинаково. При таком выборе ориентаций получается знак плюс.

2.2.2. Пусть α и β — когомологические классы, двойственные (в смысле линейной алгебры) гомологическим классам циклов $S^m \times \{x_0\}$ и $\{y_0\} \times S^n$. Тогда $\alpha \smile \beta$ — образующая группы $H^{n+m}(S^n \times S^m)$. Поэтому достаточно доказать, что $f^*(\alpha) = 0$ и $f^*(\beta) = 0$. Но $f^*(\alpha) \in H^m(S^{n+m}) = 0$ и $f^*(\beta) \in H^n(S^{n+m}) = 0$.

2.2.3. Согласно теореме двойственности Александера

$$\tilde{H}_{n-k-1}(X) \cong \tilde{H}^k(\underbrace{S^{n-2} \sqcup \ldots \sqcup S^{n-2}}_{m}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^m & \text{при } k = n-2; \\ \mathbb{Z}^{m-1} & \text{при } k = 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поэтому

$$H_i(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = 0; \\ \mathbb{Z}^m & \text{при } i = 1; \\ \mathbb{Z}^{m-1} & \text{при } i = n-1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

2.2.4. Согласно двойственности Александера $\tilde{H}_i(X) \cong \tilde{H}^{n-i}(S^p)$ при $0 \leqslant i \leqslant n$. Кроме того, $H_{n+1}(X) = 0$, поскольку пространство X гомотопически эквивалентно $(n+1)$-мерному многообразию с краем. Таким образом, $\tilde{H}_i(X) = \mathbb{Z}$ при $i = n - p$, а все остальные группы приведённых гомологий X нулевые.

2.2.5. Согласно двойственности Александера $\tilde{H}_i(X) \cong \tilde{H}^{n-i}(S^p \sqcup S^q)$ при $0 \leqslant i \leqslant n$. Кроме того, $H_i(X) = 0$ при $i \geqslant n + 1$.

2.2.6. Пусть $\alpha_{(n)}$ и $\alpha_{(m)}$ — образующие групп $H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$ и $H^1(\mathbb{R}P^m;\mathbb{Z}_2)$. Если $f^*(\alpha_{(n)}) = 0$, то $f^*(\alpha^k_{(n)}) = 0$, где $\alpha^k_{(n)} = \alpha_{(n)} \smile \ldots \smile \alpha_{(n)}$ — образующая группы $H^k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$. Предположим, что $f^*(\alpha_{(n)}) \neq 0$, т.е. $f^*(\alpha_{(n)}) = \alpha_{(m)}$. Тогда $f^*(\alpha^{n+1}_{(n)}) = \alpha^{n+1}_{(m)} \neq 0$, поскольку $n+1 \leqslant m$. С другой стороны, $\alpha^{n+1}_{(n)} = 0$. Получено противоречие.

2.2.7. Отображение f_* двойственно отображению f^*.

2.2.8. а) Для решения этой задачи нужно воспользоваться теоремами 2.2.10 и 2.2.11, которые описывают умножение в кольцах когомологий пространств $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$. Кроме того, нужно воспользоваться результатом задачи 2.1.2.

б) Множества $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$, $x_i \neq 0$, стягиваемы (они гомеоморфны открытым шарам) и покрывают $\mathbb{R}P^n$ ($\mathbb{C}P^n$).

2.2.9. Пусть α — образующая группы $H^1(\mathbb{C}P^n)$. Тогда $f^*(\alpha) = \lambda\alpha$, где $\lambda \in \mathbb{Z}$. Поэтому $f^*(\alpha^k) = (f^*\alpha)^k = \lambda^k\alpha^k$. Для вычисления $\Lambda(f)$ можно воспользоваться не только отображением гомологий, но и отображением когомологий. Поэтому $\Lambda(f) = 1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^n$.

2.2.10. Согласно задаче 2.2.9 $\Lambda(f) = 1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^n = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}$. Поэтому если $\Lambda(f) = 0$, то $\lambda^{n+1} = 1$ и $\lambda \neq 1$. Значит, $\lambda = -1$ и число n нечётно.

2.2.11. Как и в задаче 2.2.9, получаем, что $f^*\alpha^n = \lambda^n\alpha^n$. Следовательно, $f_*[\mathbb{C}P^n] = \lambda^n[\mathbb{C}P^n]$.

2.2.12. а) Если n чётно, то согласно задаче 2.2.11 $\deg f = \lambda^n \geqslant 0$.

б) Покажем, что диффеоморфизм $\mathbb{C}P^m \to \mathbb{C}P^m$, заданный в однородных координатах формулой $(z_0 : \ldots : z_m) \mapsto (\bar{z}_0 : \ldots : \bar{z}_m)$, в случае нечётного m обращает ориентацию. Действительно, в окрестности неподвижной точки $(1 : 0 : \ldots : 0)$ этот диффеоморфизм устроен как отображение $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$, заданное формулой $(z_1, \ldots, z_m) \mapsto (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m)$. Если мы рассмотрим это отображение как отображение $\mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$, то его определитель равен $(-1)^m$.

2.2.13. Группы когомологий (с коэффициентами $\mathbb{Z}$) указанных пространств изоморфны, но кольца когомологий у них разные: умножение в кольце $H^*(\mathbb{C}P^2)$ нетривиально, а умножение в кольце $H^*(S^2 \vee S^4)$ тривиально.

Пространство $\mathbb{C}P^2$ получается приклеиванием D^4 к S^2 по отображению $\partial D^4 \to S^2$, которое является расслоением Хопфа. Если бы это отображение было гомотопно постоянному, то полученное в результате такой склейки пространство было бы гомотопически эквивалентно $S^2 \vee S^4$.

2.2.14. Указанные пространства имеют группы когомологий $\mathbb{Z}$ в размерностях $0, m, n$ и $m+n$ (если $m = n$, то в размерности $m = n$ группа когомологий равна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$); остальные группы когомологий у них нулевые. Для пространства $S^m \times S^n$ произведение образующих групп когомологий размерностей m и n равно образующей группы когомологий размерности $m+n$. Для пространства $S^m \vee S^n \vee S^{n+m}$ умножение в когомологиях тривиально.

2.2.15. Запишем последовательность Майера–Вьеториса для $K_1 = M_1^{4n} \setminus \operatorname{int} D^{4n}$ и $K_2 = M_2^{4n} \setminus \operatorname{int} D^{4n}$:

$$H_{2n}(S^{4n-1}) \to H_{2n}(K_1) \oplus H_{2n}(K_1) \to H_{2n}(M_1^{4n} \# M_2^{4n}) \to H_{2n-1}(S^{4n-1})$$

Здесь $H_{2n}(S^{4n-1}) = 0$ и $H_{2n-1}(S^{4n-1}) = 0$, поэтому $H_{2n}(K_1) \oplus H_{2n}(K_1) \cong H_{2n}(M_1^{4n} \# M_2^{4n})$. Кроме того, согласно задаче 1.3.9 $H_{2n}(K_i) \cong H_{2n}(M_i^{4n})$. Ясно также, что $2n$-мерные циклы, порождающие $H_{2n}(M_i^{4n})$, можно выбрать так, чтобы они не пересекали D^{4n} (шар D^{4n} можно выбрать сколь угодно малым). Поэтому форма пересечения многообразия $M_1^{4n} \# M_2^{4n}$ является прямой суммой форм пересечения многообразий M_1^{4n} и M_2^{4n}.

2.2.16. Пусть z^p и w^q — коцепи со значениями в G, представляющие когомологические классы a^p и b^q. Тогда $\delta(z^p \smile w^q)$, $\delta(z^p) \smile w^q$ и $z^p \smile \delta(w^q)$ — коцепи, представляющие классы $\beta^*(a^p \smile b^q)$, $\beta^*(a^p) \smile b^q$ и $a^p \smile \beta^*(b^q)$. Ясно также, что $\delta(z^p \smile w^q) = \delta(z^p) \smile w^q + (-1)^p z^p \smile \delta(w^q)$.

2.3.1. Ясно, что $\operatorname{Tor}\big(H_p(M^p), H_{q-1}(N^q)\big) = 0$, поскольку $H_p(M^p) = 0$ или $\mathbb{Z}$. Поэтому согласно теореме Кюннета $H_{p+q}(M^p \times N^q) \cong H_p(M^p) \otimes H_q(N^q)$. Эта группа изоморфна $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $H_p(M^p) = \mathbb{Z}$ и $H_q(N^q) = \mathbb{Z}$.

2.3.2. Предположим, что $S^n = M^p \times N^q$, где M^p и N^q — многообразия размерностей $p, q \geqslant 1$. Ясно, что эти многообразия должны быть замкнутыми. Кроме того, согласно задаче 2.3.1 они должны быть ориентируемыми. Поэтому согласно теореме Кюннета группа $H_p(S^n)$ содержит подгруппу $\mathbb{Z} = H_p(M^p) \otimes H_0(N^q)$, причём $0 < p < n$. Этого не может быть.

2.3.3. Достаточно доказать, что разными будут группы гомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$. Согласно теореме Кюннета размерность пространства $\bigoplus_{i\geqslant 0} H_i(X \times Y; \mathbb{Z}_2)$ равна произведению размерностей пространств $\bigoplus_{i\geqslant 0} H_i(X; \mathbb{Z}_2)$ и $\bigoplus_{i\geqslant 0} H_i(Y; \mathbb{Z}_2)$. Поэтому размерности пространств $\bigoplus_{i\geqslant 0} H_i(S^n \times \mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ и $\bigoplus_{i\geqslant 0} H_i(S^m \times \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ равны $2m + {} + 2$ и $2n + 2$ соответственно.

2.3.4. Ясно, что $\pi_1(S^2 \times \mathbb{R}P^\infty) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2)$ и $\pi_k(S^2 \times \mathbb{R}P^\infty) \cong \pi_k(\mathbb{R}P^2)$ при $k \geqslant 2$, поскольку $\pi_k(P^\infty) = 0$ и $\pi_k(S^2) \cong \pi_k(\mathbb{R}P^2)$ при $k \geqslant 2$.

Согласно теореме Кюннета группа $H_i(S^2 \times \mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ содержит подгруппу, изоморфную $H_0(S^2; \mathbb{Z}_2) \otimes H_i(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$; в частности, эта группа нетривиальна для всех i. С другой стороны, $H_i(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) = 0$ при $i \geqslant 3$.

2.3.5. Напомним, что $A * B \sim \Sigma(A \wedge B)$, где $A \wedge B = {} = A \times B / A \vee B$ (часть I, задача 14.4). Поэтому $H_{r+1}(A * B) \cong \tilde{H}_r(A \wedge B) \cong H_r(A \times B, A \vee B)$. Запишем точную последовательность пары $(A \times B, A \vee B)$:

$$\ldots \to H_r(A \vee B) \to H_r(A \times B) \to H_r(A \times B, A \vee B) \to H_{r-1}(A \vee B) \to \ldots$$

Здесь

$$H_r(A \times B) = \bigoplus_{i+j=r} (H_i(A) \otimes H_j(B)) \oplus \bigoplus_{i+j=r-1} \operatorname{Tor}\bigl(H_i(A), H_j(B)\bigr)$$

и отображение $H_r(A \vee B) \to H_r(A \times B)$ является изоморфизмом на прямое слагаемое

$$(H_r(A) \otimes H_0(B)) \oplus (H_0(A) \otimes H_r(B)).$$

В частности, это отображение (и аналогичное отображение $(r-1)$-мерных гомологий) является мономорфизмом. Поэтому группа $H_r(A \times B, A \vee B)$ изоморфна факторгруппе $H_r(A \times B)/H_r(A \vee B)$. Факторизация по подгруппе $H_r(A \vee B)$ эквивалентна переходу к приведённым гомологиям.

2.3.6. Из теоремы Кюннета следует, что градуированные группы когомологий этих пространств изоморфны аддитивным группам колец многочленов $\mathbb{Z}_2[x_1, \ldots, x_k]$ и $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$, профакторизованным по соотношениям $x_1^{n_1+1} = \ldots = x_k^{n_k+1} = 0$. Эти группы порождены элементами вида $\alpha_1^{m_1} \times \ldots \times \alpha_k^{m_k}$, $0 \leqslant m_i \leqslant n_i$. Здесь α_i — образующая 1-мерных когомологий в вещественном случае и 2-мерных когомологий в комплексном случае. Из теоремы 2.3.5 следует, что изоморфны не только группы, но и кольца. В комплексном случае следует отметить, что знак $(-1)^{q_1 p_2}$ учитывать не нужно, поскольку все ненулевые элементы имеют чётную размерность.

2.3.7. Теорема 2.3.5 выражает умножение в образе естественного мономорфизма $H^*(K) \otimes H^*(L) \to H^*(K \times L)$ через умножения в кольцах $H^*(K)$ и $H^*(L)$. Но если одна из групп $H^*(K)$ и $H^*(L)$ не имеет кручения, то этот мономорфизм является изоморфизмом.

2.3.9. Если существует указанное невырожденное билинейное отображение, то число $\binom{n}{k}$ чётно для всех k, удовлетворяющих неравенствам $0 < k < n$. Поэтому $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod 2$ для всех целых a и b.

Ясно, что $(a+b)^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod 2$. Поэтому $(a+b)^{2^k} \equiv a^{2^k} + b^{2^k} \pmod 2$. Предположим, что $n = 2^k m$, где m — нечётное число, $m > 1$. Тогда

$$(a+b)^n \equiv (a^{2^k} + b^{2^k})^m \equiv$$
$$\equiv a^n + m a^{(m-1)2^k} b^{2^k} + \frac{m(m-1)}{2} a^{(m-2)2^k} b^{2\cdot 2^k} + \ldots \pmod 2.$$

Здесь $m \not\equiv 0 \pmod 2$.

2.3.10. Положим $f(x, y) = (z_1, \ldots, z_{r+s-1})$, где

$$\sum_{k=1}^{r+s-1} z_k t^{k-1} = \left(\sum_{i=1}^{r} x_i t^{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{s} y_j t^{j-1} \right).$$

Если произведение двух многочленов является нулевым многочленом, то один из этих многочленов должен быть нулевым. Поэтому билинейное отображение f невырожденное.

Мы построили невырожденное билинейное отображение $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^{r+s-1}$. Аналогично можно простроить невырожденное билинейное отображение $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s \to \mathbb{C}^{r+s-1}$, которое является невырожденным билинейным отображением $\mathbb{R}^{2r} \times \mathbb{R}^{2s} \to \mathbb{R}^{2r+2s-2}$. Кроме того, можно использовать не только комплексные числа $\mathbb{C}$, но и кватернионы $\mathbb{H}$, а также октонионы (числа Кэли) $\mathbb{O}$.

3.1.1. Из односвязности многообразия M^3 следует, что оно ориентируемо. Поэтому для M^3 имеет место двойственность Пуанкаре с коэффициентами $\mathbb{Z}$. Согласно теореме Гуревича $H_1(M^3) \cong \pi_1(M^3) = 0$. Поэтому, воспользовавшись ещё раз двойственностью Пуанкаре, получим $H_2(M^3) = 0$. Ещё раз применив теорему Гуревича, получим, что $\pi_2(M^3) \cong H_2(M^3) = 0$. Таким образом, M^3 — 2-связный CW-комплекс. Он гомотопически эквивалентен 3-мерному CW-комплексу с одной 0-мерной клеткой и без клеток размерностей 1 и 2, т.е. $M^3 \sim S^3 \vee \ldots \vee S^3$. Учитывая, что $H_3(M^3) = \mathbb{Z}$, получаем, что $M^3 \sim S^3$.

3.1.2. Как и в задаче 3.1.1, получаем, что $\pi_k(M^n) = 0$ при $k \leqslant n-1$. Поэтому M^n гомотопически эквивалентно n-мерному CW-комплексу с одной 0-мерной клеткой и без клеток размерностей 1, 2, …, $n-1$. Следовательно, M^n гомотопически эквивалентно букету сфер S^n. Учитывая, что $H_n(M^n) = \mathbb{Z}$, получаем требуемое.

3.1.3. а) Пусть X — ацикличный CW-комплекс. Тогда пространство X линейно связно. Поэтому согласно задаче 14.5 из части I пространство ΣX односвязно, а значит, $H_1(\Sigma X) = 0$. Далее, $H_{i+1}(\Sigma X) = H_i(X) = 0$ при $i \geqslant 1$. Согласно теореме Гуревича все гомотопические группы пространства ΣX тривиальны. В таком случае согласно теореме Уайтхеда пространство ΣX стягиваемо.

б) Пример нестягиваемого ацикличного CW-комплекса приведён в задаче 1.5.8.

3.1.4. Пространство $S^p \times S^q$ можно представить в виде CW-комплекса с клетками размерностей 0, p, q и $p+q$. Поэтому $S^p \vee S^q$ является k-мерным остовом $S^p \times S^q$ при $\max\{p, q\} \leqslant k \leqslant p + q - 1$. Отображение f соответствует приклейке клетки D^{p+q} к $(p+q-1)$-мерному остову. Гомотопический класс отображения $S^{p+q-1} \xrightarrow{f} S^p \vee S^q$ является препятствием к продолжению тождественного отображения $S^p \vee S^q \to S^p \vee S^q$ с $(p+q-1)$-мерного остова $S^p \times S^q$ на $(p+q)$-мерный остов. Предположим, что такое продолжение $g\colon S^p \times S^q \to S^p \vee S^q$ существует. Пусть α^p, β^q и $\bar{\alpha}^p$, $\bar{\beta}^q$ — когомологические классы в $H^*(S^p \vee S^q)$ и $H^*(S^p \times S^q)$, соответствующие S^p, S^q. Тогда $\bar{\alpha}^p = g^*\alpha^p$ и $\bar{\beta}^q = g^*\beta^q$. Поэтому $\bar{\alpha}^p \smile \bar{\beta}^q = g^*(\alpha^p \smile \beta^q)$. Но $\bar{\alpha}^p \smile \bar{\beta}^q \neq 0$, а $\alpha^p \smile \beta^q = 0$.

3.1.5. Рассмотрим следующее клеточное разбиение S^∞, содержащее по m клеток каждой размерности:

$$\begin{aligned}
&(e^{2\pi ik/m}, 0, 0, \ldots);\\
&(e^{2\pi i\theta}, 0, 0, \ldots), \quad \frac{k}{m}<\theta<\frac{k+1}{m};\\
&(w_1, \rho e^{2\pi ik/m}, 0, 0, \ldots), \quad 0<\rho\leqslant 1,\ |w_1|^2=1-\rho^2;\\
&(w_1, \rho e^{2\pi i\theta}, 0, 0, \ldots), \quad 0<\rho\leqslant 1,\ |w_1|^2=1-\rho^2, \quad \frac{k}{m}<\theta<\frac{k+1}{m};\\
&(w_1, w_2, \rho e^{2\pi ik/m}, 0, 0, \ldots), \quad 0<\rho\leqslant 1,\ |w_1|^2+|w_2|^2=1-\rho^2;\\
&(w_1, w_2, \rho e^{2\pi i\theta}, 0, 0, \ldots), \quad 0<\rho\leqslant 1,\ |w_1|^2+|w_2|^2=1-\rho^2, \quad \frac{k}{m}<\theta<\frac{k+1}{m};\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Это клеточное разбиение согласовано с отношением эквивалентности на S^∞, поэтому из него мы получаем клеточное разбиение L_m^∞, содержащее по одной клетке каждой размерности. Граничные гомоморфизмы вычисляются точно так же, как для трёхмерных линз. В результате получаем цепной комплекс

$$\ldots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}.$$

Гомологии этого комплекса имеют указанный вид.

3.1.6. Пусть $\tilde{M}^3$ — универсальная накрывающая M^3. Тогда $\pi_1(\tilde{M}^3) = 0$ и $\pi_2(\tilde{M}^3) = \pi_2(M) = 0$. Группа $\pi_1(M^3)$ бесконечна, поэтому многообразие $\tilde{M}^3$ некомпактно. Значит, $H_3(\tilde{M}^3) = 0$. Ясно также, что $H_k(\tilde{M}^3) = 0$ при $k \geqslant 3$. Применив теорему Гуревича, получим, что $\pi_i(\tilde{M}^3) = 0$ для всех i. Согласно теореме Уайтхеда многообразие $\tilde{M}^3$ стягиваемо, а значит, $\pi_i(M^3) = \pi_i(\tilde{M}^3) = 0$ при $i \geqslant 2$.

3.1.7. Предположим, что группа π содержит элемент конечного порядка. Тогда она содержит и порождённую этим элементом циклическую подгруппу $\mathbb{Z}_m$. Рассмотрим накрытие $\tilde{X} \to X$, соответствующее подгруппе $\mathbb{Z}_m \subset \pi$. Тогда $\tilde{X}$ — пространство типа $K(\mathbb{Z}_m, 1)$, поэтому оно гомотопически эквивалентно L_m^∞. Приходим к противоречию, поскольку, с одной стороны, $\tilde{X}$ — конечномерный симплициальный комплекс, а с другой стороны, согласно задаче 3.1.5 пространство $\tilde{X}$ имеет ненулевые гомологии сколь угодно больших размерностей.

3.2.1. Для тривиального расслоения требуемое отображение π, очевидно, существует. Предположим теперь, что такое отображение π существует. Рассмотрим отображение $f: E \to B \times \mathbb{R}^n$, заданное формулой $f(e) = \big(p(e), \pi(e)\big)$. Согласно теореме 3.2.1 это отображение задаёт изоморфизм расслоения E на тривиальное расслоение $B \times \mathbb{R}^n$.

3.2.2. Введя риманову метрику, тривиализации можно считать ортонормированными. Фиксируем одну тривиализацию TS^3. Тогда любая тривиализация TS^3 однозначно задаётся отображением $S^3 \to \mathrm{SO}(3)$. Гомотопия тривиализаций — это гомотопия таких отображений. Ясно также, что $\mathrm{SO}(3) \approx \mathbb{R}P^3$ и $\pi_3(\mathbb{R}P^3) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$.

3.2.3. Фиксируем тривиализацию расслоения TS^3. Тогда любое векторное поле на S^3 без особых точек однозначно задаётся отображением $S^3 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \sim S^2$. Гомотопия векторных полей без особых точек — это гомотопия таких отображений. Ясно также, что $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

3.2.4. Применим индукцию по k. При $k = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для произведений $S^{n_1} \times \ldots \times S^{n_{k-1}}$. Вложим сферу S^{n_k} в $\mathbb{R}^{n_k+1}$. Нормальное расслоение S^{n_k} в $\mathbb{R}^{n_k+1}$ тривиально, поэтому нормальное расслоение S^{n_k} в $\mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_k+1}$ тоже тривиально. Слоем этого тривиального расслоения является $\mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_{k-1}+1}$; в это пространство по предположению можно вложить $S^{n_1} \times \ldots \times S^{n_{k-1}}$. В результате получаем требуемое вложение.

3.2.5.[St1] Мы будем пользоваться примерами 3.2.5 и 3.2.6.

Если все числа n_i чётны, то

$$\chi(S^{n_1} \times \ldots \times S^{n_k}) = \chi(S^{n_1}) \ldots \chi(S^{n_k}) = 2^k \neq 0.$$

Поэтому на многообразии $S^{n_1} \times \ldots \times S^{n_k}$ любое векторное поле имеет особую точку, а значит, это многообразие не параллелезуемо.

Займёмся теперь доказательством параллелезуемости многообразия $S^{n_1} \times \ldots \times S^{n_k}$, $k \geqslant 2$, в случае, когда одно из чисел n_i нечётно. При $k = 2$ требуемое утверждение очевидным образом вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Пусть замкнутые многообразия M_1 и M_2 таковы, что сумма Уитни касательного расслоения τ_{M_i} и 1-мерного тривиального расслоения тривиальна и при этом $\chi(M_1) = 0$. Тогда многообразие $M_1 \times M_2$ параллелезуемо.*

Доказательство. Пусть η_B^n — тривиальное n-мерное расслоение над B. По условию $\chi(M_1) = 0$, поэтому на M_1 существует векторное поле без особых точек. Оно задаёт над M_1 два расслоения: тривиальное 1-мерное расслоение $\eta^1_{M_1}$ и ортогональное дополнение к нему, которое мы обозначим α. При этом $\dim\alpha = \dim M_1 - 1 = m_1 - 1$ и $\tau_{M_1} = \alpha \oplus \eta^1_{M_1}$.

Для любых векторных расслоений ξ_1 и ξ_2 над B и любого непрерывного отображения $f : B_1 \to B$ расслоение $f_*(\xi_1 \oplus \xi_2)$ изоморфно $(f_*\xi_1) \oplus (f_*\xi_2)$. Кроме того, $f_*\eta^n_B = \eta^n_{B_1}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\tau_{M_1\times M_2} &\cong \pi_1^*(\tau_{M_1}) \oplus \pi_2^*(\tau_{M_2}) \cong \pi_1^*(\alpha \oplus \eta^1_{M_1}) \oplus \pi_2^*(\tau_{M_2}) \cong \\
&\cong \pi_1^*(\alpha) \oplus \eta^1_{M_1\times M_2} \oplus \pi_2^*(\tau_{M_2}) \cong \pi_1^*(\alpha) \oplus \pi_2^*(\eta^1_{M_1} \oplus \tau_{M_2}) \cong \\
&\cong \pi_1^*(\alpha) \oplus \eta^{m_2+1}_{M_1\times M_2} \cong \pi_1^*(\alpha \oplus \eta^1_{M_1})\eta^{m_2}_{M_1\times M_2} \cong \\
&\cong \pi_1^*(\tau_{M_1}) \oplus \eta^{m_2}_{M_1\times M_2} \cong \pi_1^*(\tau_{M_1} \oplus \eta^1_{M_1}) \oplus \eta^{m_2-1}_{M_1\times M_2} \cong \\
&\cong \eta^{m_1+1}_{M_1\times M_2} \oplus \eta^{m_2-1}_{M_1\times M_2} \cong \eta^{m_1+m_2}_{M_1\times M_2}.
\end{aligned}$$

□

При $k > 2$ можно воспользоваться индукцией по k. Будем считать, что n_1 нечётно. Тогда можно положить $M_1 = S^{n_1} \times S^{n_{k-1}}$ и $M_2 = S^{n_k}$. По предположению индукции M_1 параллелезуемо, поэтому $\tau_{M_1} \oplus \eta^1_{M_1}$ — тривиальное расслоение.

3.2.7. Многообразие $V(n+2,2)$ имеет размерность $2n+1$. Согласно теореме 3.2.3 оно $(n-1)$-связно и

$$\pi_n\bigl(V(n+2,2)\bigr) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } n \text{ чётно;} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Согласно теореме Гуревича $H_n\bigl(V(n+2,2)\bigr) \cong \pi_n\bigl(V(n+2,2)\bigr)$ и $H_k\bigl(V(n+2,2)\bigr) = 0$ при $0 < k < n$. Половину групп гомологий мы вычислили. Другую половину можно найти с помощью двойственности Пуанкаре. В результате получим, что если n чётно, то

$$H_k\bigl(V(n+2,2)\bigr) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{для } k = 0,\ n,\ n+1,\ 2n+1; \\ 0 & \text{для остальных } k, \end{cases}$$

а если n нечётно, то

$$H_k\bigl(V(n+2,2)\bigr) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{для } k = 0,\ 2n+1; \\ \mathbb{Z}_2 & \text{для } k = n; \\ 0 & \text{для остальных } k. \end{cases}$$

3.2.8. Представим M^4 в виде CW-комплекса и будем строить 3 независимых сечения касательного расслоения индукцией по остовам. Первое нетривиальное препятствие возникает при продолжении их на 2-мерный остов. Это препятствие — класс w_2. Значит, продолжение на 2-мерный остов существует тогда и только тогда, когда $w_2 = 0$. Препятствие к продолжению на 3-мерный остов лежит в когомологиях с коэффициентами $\pi_2\big(V(4,3)\big)$. Но $V(4,3) \approx \mathrm{SO}(4)$ и $\pi_2\big(\mathrm{SO}(4)\big) = 0$. Поэтому это препятствие отсутствует.

Очевидным образом 3 независимых сечения можно продолжить с края 4-мерного шара на шар с выколотым центром.

Если у нас есть независимые сечения над M^n с несколькими выколотыми точками $x_1, \ldots, x_n$, то можно построить независимые сечения над M^n с одной выколотой точкой x_0. Для этого нужно соединить точку x_0 с точками $x_1, \ldots, x_n$ непересекающимися путями, а затем стянуть эти пути в точку x_0.

3.2.11. Пусть $\xi_1 = (u_1, v_1)$ и $\xi_2 = (u_2, v_2)$ — векторы пространства $T_xM \times T_xM \cong T_{(x,x)}(M \times M)$. Положим $(\xi_1, \xi_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2)$.

Пусть $u, v \in T_xM$. Вектор $\xi = (u, v) \in T_{(x,x)}(M \times M)$ является касательным вектором к $d(M)$ тогда и только тогда, когда $u = v$, т.е. $\xi = (u, u)$. Вектор $\eta = (v, w)$ ортогонален всем векторам (u, u) тогда и только тогда, когда $v = -w$, т.е. $\eta = (v, -v)$. Отображение $\tau_M \to \nu_{d(M)}$, которое сопоставляет вектору $v \in T_xM$ вектор $(v, -v) \in T_{(x,x)}(M \times M)$, является изоморфизмом векторных расслоений.

3.2.12. Сфера с g ручками ориентируема, поэтому $w_1 = 0$. Её эйлерова характеристика чётна, поэтому $w_2 = 0$.

По-другому равенства $w_1 = 0$ и $w_2 = 0$ можно доказать, воспользовавшись тем, что для стандартного вложения сферы с g ручками в $\mathbb{R}^3$ нормальное расслоение тривиально.

3.2.13. Для сферы с m листами Мёбиуса чётность эйлеровой характеристики совпадает с чётностью числа m. Поэтому $w_2 = m\Lambda$, где Λ — образующая 2-мерных когомологий, т.е. $w_2 = 0$ при чётном m и $w_2 = \Lambda$ при нечётном m.

Для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ 1-мерные когомологии сферы с m листами Мёбиуса имеют базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, где когомологические классы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ двойственны циклам, обходы вдоль которых изменяют ориентацию, поэтому $w_1 = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$.

Наконец, $\alpha_i \alpha_j = \delta_{ij}\Lambda$, поэтому $w_1^2 = m\Lambda = w_2$.

3.2.14. Пусть ν_{M^n} — нормальное расслоение, $\alpha = w_1(\nu_{M^n})$. Тогда $w(M^n)(1+\alpha) = 1$, поэтому $w_1 + \alpha = 1$, $w_2 + w_1\alpha = 0, \ldots, w_n + w_{n-1}\alpha = 0$. Следовательно, $w_1 = \alpha$, $w_2 = \alpha^2, \ldots, w_n = \alpha^n$.

3.2.15. Пусть $w_k = w_k(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{k}\alpha^k$ для $k = 1, \ldots, n$. Согласно задаче 3.2.14 $w_k = w_1^k$. Поэтому все числа $\binom{n+1}{k}$, где $k = 1, \ldots, n$, либо одновременно чётные, либо одновременно нечётные.

Над полем $\mathbb{Z}_2$ имеет место равенство $(1+x)^{2^m} = 1 + x^{2^m}$. Пусть $a_0 + a_1 \cdot 2 + \ldots + a_m \cdot 2^m$ — двоичная запись числа $n+1$. Тогда $(1+x)^m = (1+x)^{a_0}(1+x^2)^{a_1} \ldots (1+x^{2^m})^{a_m}$. Если все указанные числа $\binom{n+1}{k}$ чётны, то $a_0 = \ldots = a_{m-1} = 0$ и $a_m = 1$; это означает, что $n+1 = 2^m$. Если все указанные числа нечётны, то $a_0 = \ldots = a_m = 1$; это означает, что $n + 1 = 2^{m+1} - 1$.

3.2.16. Если n чётно, то когомологический класс $w_n(\mathbb{R}P^n) = (n+1)\alpha^n$, где α — образующая группы $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$, ненулевой. Поэтому число Штифеля–Уитни $w_n[\mathbb{R}P^n]$ тоже ненулевое. Когомологический класс $w_1(\mathbb{R}P^n) = (n+1)\alpha = \alpha$ тоже ненулевой и $\alpha^n \neq 0$. Поэтому число Штифеля–Уитни $w_1^n[\mathbb{R}P^n]$ ненулевое.

3.2.17. Если $n = 2k - 1$, то $w(\mathbb{R}P^n) = (1+a)^{2k} = (1+a^2)^k$, поэтому $w_i(\mathbb{R}P^n) = 0$ для любого нечётного i. Но в любой моном $w_1^{r_1} \ldots w_n^{r_n}$, где $r_1 + 2r_2 + \ldots + nr_n = 2k - 1$, входит множитель w_i, где i нечётно.

3.2.18. В одну сторону утверждение очевидно, поэтому нужно лишь доказать, что если расслоение $\xi^k \oplus \theta^1$ тривиально, то расслоение ξ^k тоже тривиально. Оба расслоения $\xi^k \oplus \theta^1$ и θ^1 ориентируемы, поэтому расслоение ξ^k тоже ориентируемо. Будем считать, что во всех слоях расслоений $\xi^k \oplus \theta^1$ и ξ^k фиксирована некоторая ориентация. Каждый слой расслоения $\xi^k \oplus \theta^1$ отождествлён с $\mathbb{R}^{k+1}$; при этом каждый слой расслоения ξ^k — это ориентированное k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^{k+1}$. Пространство ориентированных k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^{k+1}$ гомеоморфно сфере S^k. Рассмотрим расслоение ${\gamma_+}^k$ над S^k, слоем которого над точкой $x \in S^k$ служит соответствующее этой точке ориентированное k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^{k+1}$. Пусть $f : B \to S^k$ — отображение, сопоставляющее точке $b \in B$ слой расслоения ξ^k над этой точкой. Ясно, что $\xi^k = f^*{\gamma_+}^k$. Из того, что размерность B меньше k, следует, что отображение f гомотопно постоянному. Поэтому расслоение ξ^k тривиально.

3.2.19. а) Очевидным образом следует из задачи 3.2.18.

б) Пусть ν^k — нормальное расслоение для вложения $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Тогда $\tau_{M^n} \oplus \nu^k \cong \theta^{n+k}$, поэтому $\theta^1 \oplus \tau_{M^n} \oplus \nu^k \cong \theta^{n+k+1}$. Мы рассматриваем ситуацию, когда $k \geqslant n+1$. Предположим, что многообразие M^n стабильно параллелезуемо. Тогда расслоение $\theta^1 \oplus \tau_{M^n}$ тривиально, поэтому согласно задаче 3.2.18 расслоение ν^k тоже тривиально. Наоборот, если расслоение ν^k тривиально, то расслоение $\theta^1 \oplus \tau_{M^n}$ тоже тривиально.

3.2.20. Пространство $E(P\gamma_n^k)$ состоит из пар (l, Π^k), где $l \subset \Pi^k$. Пространство $E(P\bar{\gamma}_n^{k-1})$ состоит из пар (l, Π^{k-1}), где $l \perp \Pi^{k-1}$. Отображение $E(P\gamma_n^k) \to E(P\bar{\gamma}_n^{k-1})$ сопоставляет паре (l, Π^k) пару (l, Π^{k-1}), где Π^{k-1} — ортогональное дополнение к l в Π^k. Обратное отображение сопоставляет паре (l, Π^{k-1}) пару (l, Π^k), где Π^k — пространство, натянутое на l и Π^{k-1}.

3.3.1. Предположим, что некоторая конечная группа свободно действует на $\mathbb{R}^n$. Любая конечная группа содержит подгруппу $G = \mathbb{Z}_p$, где p — простое число. Группа G тоже свободно действует на $\mathbb{R}^n$. Это действие индуцирует действие G на S^n с единственной неподвижной точкой ∞, т.е. $(S^n)^G = \{\infty\}$. С другой стороны, согласно теореме 3.3.9 пространство $(S^n)^G$ является гомологической сферой, а топологическое пространство, состоящее из одной точки, не является гомологической сферой.

3.4.1. Согласно теореме 3.4.6 $\operatorname{Sq}\alpha^{2^m} = (\alpha + \alpha^2)^{2^m} = \alpha^{2^m} + \alpha^{2^{m+1}}$, поскольку $\binom{2^m}{i} \equiv 0 \pmod 2$ при $1 \leqslant i \leqslant 2^m - 1$. Поэтому $\operatorname{Sq}(\alpha + \alpha^2 + {} + \alpha^4 + \ldots) = (\alpha + \alpha^2) + (\alpha^2 + \alpha^4) + (\alpha^4 + \alpha^8) + \ldots = \alpha$.

3.4.2. Для расслоения γ^1 над $\mathbb{R}P^\infty$ требуемая формула легко проверяется. Действительно, $w_1(\gamma^1) = \alpha$ — образующая группы $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$. Поэтому всё сводится к очевидному равенству $\operatorname{Sq}^1 \alpha = \alpha^2$. Предположим, что требуемая формула верна для расслоения ξ и $w_i = w_i(\xi)$. Согласно формуле Уитни $w_m(\xi \times \gamma^1) = {} = w_m \times 1 + w_{m-1} \times \alpha$. Согласно формуле Картана $\operatorname{Sq}(w_{m-1} \times \alpha) =$

$= (\mathrm{Sq}^k\, w_{m-1}) \times \alpha + (\mathrm{Sq}^{k-1}\, w_{m-1}) \times \alpha^2$. Поэтому

$$\mathrm{Sq}^k\big(w_m(\xi \times \gamma^1)\big) =$$
$$= w_k w_m \times 1 + \binom{m-k}{1} w_{k-1} w_{m+1} \times 1 + \ldots + \binom{m-1}{k} w_0 w_{m+k} \times 1 +$$
$$+ w_k w_{m-1} \times \alpha + \binom{m-k-1}{1} w_{k-1} w_m \times \alpha + \ldots + \binom{m-2}{k} w_0 w_{m+k-1} \times \alpha +$$
$$+ w_{k-1} w_{m-1} \times \alpha^2 + \binom{m-k}{1} w_{k-2} w_m \times \alpha^2 + \ldots + \binom{m-2}{k-1} w_0 w_{m+k-2} \times \alpha^2.$$

С другой стороны, $w_i(\xi \times \gamma^1) w_j(\xi \times \gamma^1) = (w_i \times 1 + w_{i-1} \times \alpha)(w_j \times 1 + w_{j-1} \times \alpha) = w_i w_j \times 1 + (w_{i-1} w_j + w_i w_{j-1}) \times \alpha + w_{i-1} w_{j-1} \times \alpha^2$. Теперь уже легко проверить, что требуемая формула верна для расслоения $\xi \times \gamma^1$. Для слагаемых вида $\ldots \times 1$ и $\ldots \times \alpha^2$ это видно непосредственно. Для слагаемых вида $\ldots \times \alpha$ нужно проверить, что по модулю 2 имеют место равенства $1 + \binom{m-k}{1} = \binom{m-k-1}{1}$, $\binom{m-k}{1} + \binom{m-k+1}{2} = \binom{m-k}{2}$, и т.д. Эти равенства следуют из равенств $-1 + \binom{m-k}{1} = \binom{m-k-1}{1}$, $-\binom{m-k}{1} + \binom{m-k+1}{2} = \binom{m-k}{2}$, и т.д., поскольку для остатков по модулю 2 знак несуществен.

Итак, требуемая формула верна для расслоения $\gamma^1 \times \ldots \times \gamma^1$. Из этого следует, что она верна для расслоения γ^n, поскольку естественное отображение $H^*\big(G(n,k); \mathbb{Z}_2\big) \to H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ — мономорфизм. Любое n-мерное расслоение ξ индуцировано расслоением γ^n, поэтому для ξ требуемая формула тоже верна.

4.1.1. Вырежем из конуса CY конус с вдвое меньшей боковой стороной. Тогда можно применить теорему о вырезании. После этого можно воспользоваться гомотопической инвариантностью сингулярных гомологий пары (см. теорему 1.3.3 на с. 27; для сингулярных гомологий доказательство в точности то же самое).

4.1.2. Запишем точную последовательность пары $(X \cup CY, CY)$:

$$H_i(CY) \to H_i(X \cup CY) \to H_i(X \cup CY, CY) \to \tilde{H}_{i-1}(CY)$$

Здесь $H_i(CY) = \tilde{H}_{i-1}(CY) = 0$, поскольку конус CY стягиваем. Значит, $H_i(X \cup CY) \cong H_i(X \cup CY, CY)$ при $i \geqslant 1$. Остаётся воспользоваться задачей 4.1.1.

4.1.3. При $i = 0$ утверждение очевидно, поэтому будем считать, что $i \geqslant 1$. Тогда $H_i(X, Y) \cong H_i(X \cup CY)$ согласно задаче 4.1.2. А поскольку комплекс CY стягиваем $X \cup CY \sim (X \cup CY)/CY = X/Y$.

4.1.4. Нет, не верно. Множество $U \subset \mathbb{R}^n$, заданное уравнением $x_n = 0$, замкнуто. Это множество гомеоморфно множеству $V \subset \mathbb{R}^n$, заданному уравнением $x_n = 0$ и неравенством $x_1^2 + \ldots + x_{n-1} < 1$. Это множество не является замкнутым.

4.2.2. Представим S^n как $\partial\Delta^{n+1}$, где $\Delta^{n+1} = [v_0, v_1, \ldots, v_{n+1}]$, и рассмотрим множества $\operatorname{st} v_i$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$. На любые $r \leqslant n+1$ вершин $v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}$ натянут симплекс $[v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}]$. При этом $\bigcup_{k=1}^{r} \operatorname{st} v_{i_k}$ — звезда этого симплекса; она является стягиваемым множеством.

4.3.1. Группы когомологий многообразия $V(2n+2, 2)$ вычислены в задаче 3.2.7. Запишем последовательность Гизина для расслоения $V(2n+2, 2) \xrightarrow{S^1} G_+(2n+2, 2)$ и будем идти с конца. Последовательно получим $H^{4n} = \mathbb{Z}$, $H^{4n-1} = 0$, $H^{4n-2} = \mathbb{Z}$, $H^{4n-3} = 0$, $\ldots$, $H^{2n+1} = 0$, $H^{2n} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. После этого можно воспользоваться двойственностью Пуанкаре. В итоге получим, что для $0 \leqslant k \leqslant 4n$

$$H^k\big(G_+(2n+2, 2)\big) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } k \text{ чётно, } k \neq 2n; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{если } k = 2n; \\ 0, & \text{если } k \text{ нечётно.} \end{cases}$$

4.3.2. а) Согласно теореме Ву $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2 + \operatorname{Sq} v_1$, $\ldots$, $w_{k+1} = v_{k+1} + \operatorname{Sq}^1 v_k + \operatorname{Sq}^2 v_{k-1} + \ldots$. Поэтому если $w_1 = \ldots = w_k = 0$, то $v_1 = \ldots = v_k = 0$ и $v_{k+1} = w_{k+1}$.

б) Если $w_1 = \ldots = w_k = 0$, то $v_1 = \ldots = v_k = 0$. А если $n = 2k$ или $2k+1$, то $v_i = 0$ при $i > k$. Поэтому $w_i = 0$ при $i > k$.

4.3.3. Помимо размерностей 0 и $4k$ многообразие M^{4k} имеет ненулевые гомологии и когомологии лишь в размерности $2k$; кручения многообразие M^{4k} не имеет.

Класс Ву имеет единственную компоненту положительной размерности, а именно, v_{2k}. При этом согласно задаче 4.3.2 $w_{2k} = v_{2k}$. Ясно, что $\langle \operatorname{Sq} \alpha^{2k}, [M^{4k}] \rangle = \langle \alpha^{2k} \smile \alpha^{2k}, [M^{4k}] \rangle$ и $\langle \alpha^{2k} \smile v, [M^{4k}] \rangle = \langle \alpha^{2k} \smile v_{2k}, [M^{4k}] \rangle$. Поэтому класс v_{2k} полностью определяется равенством $\alpha^{2k} \smile \alpha^{2k} = \alpha^{2k} \smile v_{2k}$ (для всех α^{2k}). В частности, $v_{2k} = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha^{2k} \smile \alpha^{2k} = 0$ для всех $\alpha^{2k} \in H^{2k}(M^{4k}; \mathbb{Z}_2)$.

Рассмотрим теперь класс когомологий a^{2k} над $\mathbb{Z}$. Ему естественным образом можно сопоставить класс когомологий α^{2k} над $\mathbb{Z}_2$ (значение на каждой цепи приводится по модулю 2). Число $\langle a^{2k} \smile a^{2k}, [M^{4k}] \rangle$ чётно тогда и только тогда, когда $\alpha^{2k} \smile \alpha^{2k} = 0$.

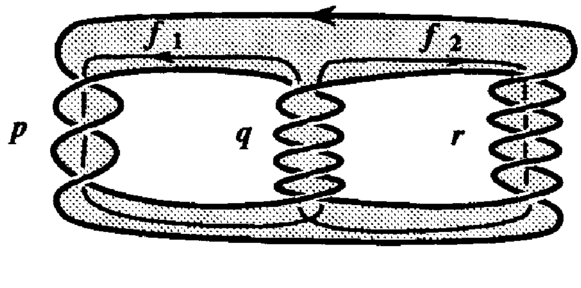

Рис. 6.31. Выбор f_1 и f_2

6.1.1. Пусть $G = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$. В качестве матрицы представления этого модуля можно взять диагональную матрицу $A = \operatorname{diag}(n_1, \ldots, n_k)$. Идеал $\mathcal{E}_1$ порождён определителем этой матрицы, который равен $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = |G|$.

6.1.2. Для рассматриваемого узла можно выбрать f_1 и f_2 точно так же, как на рис. 6.3. (Нужно только заменить самый нижний перекрёсток на этом рисунке на три перекрёстка, как теперь у нас.) Изменяется лишь коэффициент зацепления $\operatorname{lk}(f_2, f_2^+)$; теперь он равен 2. Поэтому $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и полином Александера равен $2(t^2 - 2t + 1) + t = 2t^2 - 3t + 2$.

6.1.3. а) Выберем f_1 и f_2, как показано на рис. 6.31. Несложно проверить, что тогда матрица Зейферта равна $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p+q & q+1 \\ q-1 & q+r \end{pmatrix}$. Поэтому полином Александера равен

$$\frac{1}{4}\big((pq + qr + rp)(t^2 - 2t + 1) + t^2 + 2t + 1\big).$$

б) Если $p = -3$, $q = 5$ и $r = 7$, то $pq + qr + rp = -1$. Значит, в этом случае полином Александера равен t.

6.1.4. Диаграмму зацепления L можно представить так, как показано на рис. 6.32. Тогда зацепления L_+ и L_- изотопны, поэтому $\nabla_{L_+} = \nabla_{L_-}$, а значит, $z\nabla_L = \nabla_{L_+} - \nabla_{L_-} = 0$.

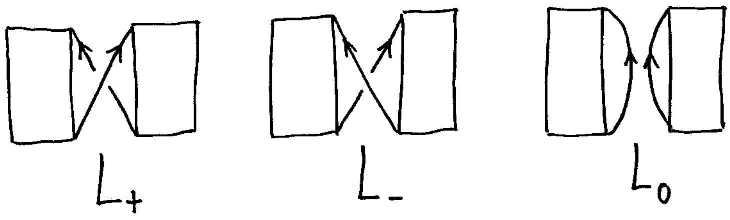

Рис. 6.32. Диаграммы трёх зацеплений

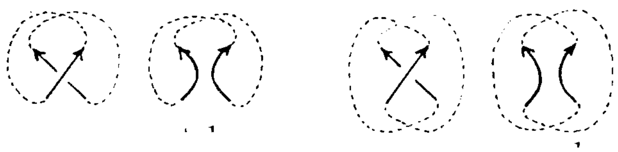

Рис. 6.33. Проверка равенства $n(L_+) = n(L_-) = n(L_0) \pm 1$

6.1.6. Легко проверить, что $n(L_+) = n(L_-) = n(L_0) \pm 1$ (рис. 6.33). Поэтому если утверждение задачи верно для двух из трёх зацеплений L_+, L_- и L_0, то оно верно и для третьего зацепления. Для тривиального m-компонентного зацепления утверждение верно (если $m > 1$, то полином Конвея нулевой), поэтому оно верно и для любого зацепления.

6.1.7. Ясно, что $a_0(L) = \nabla_L(0)$, поэтому из соотношения $\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$ следует, что $a_0(L_+) = a_0(L_-)$. Меняя типы перекрёстков, любое зацепление можно превратить в тривиальное зацепление (с тем же самым числом компонент). Поэтому $a_0(L) = a_0(L')$, где L' — тривиальное зацепление, имеющее столько же компонент, сколько у L. Для тривиального узла $a_0 = 1$, а при $m > 1$ для тривиального m-компонентного зацепления $a_0 = 0$.

6.1.8. Применим индукцию по $n(L)$. При $n(L) = 1$ доказывать нечего. Ясно, что $n(L_0) \geqslant n(L_\pm) - 1$, поэтому согласно предположению индукции $a_i(L_0) = 0$ при $i < n(L_\pm) - 2$. Следовательно, $a_i(L_+) = a_i(L_-)$, при $i < n(L_\pm) - 1$. Изменяя типы перекрёстков, любое зацепление можно превратить в тривиальное зацепление с тем же числом компонент. При таких изменениях мы не меняем $a_i(L)$ при $i < n(L) - 1$, поэтому $a_i(L) = 0$ при $i < n(L) - 1$.

6.1.9. Пусть L_+ и L_- — двухкомпонентные зацепления, причём на выделенном перекрёстке присутствуют обе компоненты. Тогда L_0 — узел, поэтому $a_0(L_0) = 1$ согласно задаче 6.1.7 а). Следовательно, $a_1(L_+) - a_1(L_-) = a_0(L_0) = 1$. Ясно также, что $\mathrm{lk}(L_{1+}, L_{2+}) - \mathrm{lk}(L_{1-}, L_{2-}) = 1$. Меняя типы перекрёстков, любое двухкомпонентное зацепление можно превратить в двухкомпонентное зацепление с незацепленными компонентами. Для него равенство $a_1(L) = \mathrm{lk}(L_1, L_2)$ верно, поскольку в этом случае $a_1(L) = 0$ и $\mathrm{lk}(L_1, L_2) = 0$ Значит, это равенство верно для любого двухкомпонентного зацепления.

6.1.10. Из соотношения $\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$ следует, что $a_2(L_+) - a_2(L_-) = a_1(L_0)$. Если L_0 — двухкомпонентное зацепление, то $a_1(L_0) = \mathrm{lk}(L_1, L_2)$ согласно задаче 6.1.9.

6.3.1. При доказательстве теоремы 6.3.5 было показано, что $TM^n = N_*(TS^n)$. Если расслоение TS^n тривиально, то любое расслоение, индуцированное из него, тоже тривиально.

6.4.1. а) Действие элемента w_i на U_a задаётся формулой

$$(u_0t_0, \dots, u_nt_n) \mapsto (u_0t_0, \dots, w_iu_it_i, \dots, u_nt_n).$$

При таком действии i-я грань $\partial_i e$, которая задаётся уравнением $t_i = 0$, неподвижна. Поэтому $(1 - w_i)\partial_i e = 0$, а значит,

$$\partial\varepsilon = \prod(1 - w_i)\sum(-1)^i\partial_i e = 0.$$

б) Рассмотрим сначала случай $n = 0$. Пусть $w = n_0 + n_1w_0 + \dots + n_{a_0}w^{a_0-1}$, где $n_0, \dots, n_{a_0}$ — целые числа. Тогда

$$w(1 - w_0) = (n_0 - n_{a_0}) + (n_1 - n_0)w_0 + \dots + (n_{a_0} - n_{a_0-1})w^{a_0-1},$$

поэтому элемент w лежит в ядре указанного отображения тогда и только тогда, когда $n_0 = n_1 = \dots = n_{a_0-1} = n_{a_0}$.

Рассмотрим теперь случай $n = 1$. Пусть снова $w = n_0 + n_1w_0 + \dots + n_{a_0}w^{a_0-1}$, но теперь n_i не целое число, а линейная комбинация элементов $1, w_1, \dots, w_1^{a_1-1}$ с целыми коэффициентами. Пусть, далее, $w' = w(1 - w_1) = n_0' + n_1'w_0 + \dots + n_{a_0}'w^{a_0-1}$, где $n_i' = n_i - n_iw$. Равенство $w'(1 - w_0) = 0$ снова эквивалентно тому, что $n_0' = n_1' = \dots = n_{a_0}'$, т.е.

$$w(1 - w_1) = n'(1 + w_0 + w_0^2 + \dots + w_0^{a_0-1}).$$

Значит, $w = a(1 + w_0 + w_0^2 + \dots + w_0^{a_0-1}) + b$, где $b(1 - w_1) = 0$, т.е. $b = c(1 + w_1 + w_1^2 + \dots + w_1^{a_1-1})$. Дальнейшие рассуждения аналогичны.

в) Симплициальный комплекс U_a не имеет клеток размерности $n + 1$, поэтому n-мерные гомологии U_a совпадают с n-мерными циклами. Значит, в $H_n(U_a)$ есть подгруппа $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_a)\varepsilon \cong \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_a)/I_a$. Указанные в условии задачи элементы как раз и образуют базис этой подгруппы. Ясно, что её ранг равен $(a_0 - 1) \ldots (a_n - 1)$, т.е. он совпадает с рангом всей группы $H_n(U_a)$. Поэтому $H_n(U_a) \cong \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_a)\varepsilon$.

Литература

[А] Адамс Дж., *Лекции по группам Ли*, М.: Наука, 1979.

[Бо] Ботт Р., Ту Л. В., *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*, М.: Наука, 1989.

[Бр] Бредон Г., *Введение в теорию компактных групп преобразований*, М.: Наука, 1980.

[Ва] Васильев В. А., *Введение в топологию*, М.: Фазис, 1997.

[Го1] Годеман Р., *Алгебраическая топология и теория пучков*, М.: ИИЛ, 1961.

[Го2] *Гомотопическая теория дифференциальных форм*, сборник статей, М.: Мир, 1981.

[Гр] Гриффитс Ф. А., Морган Д. В., *Рациональная теория гомотопий и дифференциальные формы*, М.: Наука, 1990.

[Ка] Кан Д., Уайтхед Дж., *О реализуемости групп сингулярных когомологий*, Математика **7:2** (1963), 27–28.

[Ма] Маклейн С., *Гомология*, М.: Мир, 1966.

[Ми1] Милнор Дж., *Теория Морса*, М.: Мир, 1965.

[Ми2] Милнор Дж., Сташеф Дж., *Характеристические классы*, М.: Мир, 1979.

[Мо] Мошер Р., Тангора М., *Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий*, М.: Мир, 1970.

[Пр1] Прасолов В. В., *Наглядная топология*, М.: МЦНМО, 1995.

[Пр2] Прасолов В. В., *Задачи и теоремы линейной алгебры*, М.: Наука, 1996.

[Пр3] Прасолов В. В., Сосинский А. Б., *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*, М.: МЦНМО, 1997.

[Пр4] Прасолов В. В., *Поверхность Зейферта*, Матем. просв. **3** (1999), 116–126.

[Р] Рохлин В. А., *Гомотопические группы*, УМН **1**, вып. 5–6, (1946), 175–223.

[Се1] Серр Ж.-П., *Сингулярные гомологии расслоенных пространств.* В кн.: Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958, 9–114.

[Се2] Серр Ж.-П., *Гомотопические группы и классы абелевых групп.* В кн.: Расслоенные пространства. М.: ИЛ, 1958, 124–162.

[Св] Свитцер Р. М., *Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии*, М.: Наука, 1985.

[Сп] Спеньер Э., *Алгебраическая топологий*, М.: Мир, 1971.

[Ст1] Стинрод Н., *Топология косых произведений*, М.: ИЛ, 1953.

[Ст2] Стинрод Н., Эпштейн Д., *Когомологические операции*, М.: Наука, 1983.

[Ст3] Стонг Р., *Заметки по теории кобордизмов*, М.: Мир, 1973.

[Уи] Уитни Х., *Геометрическая теория интегрирования*, М.: ИЛ, 1960.

[Уэ] Уэллс Р., *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях*, М.: Мир, 1976.

[Фа] Фам Ф., *Обобщённые формулы Пикара–Лефшеца и ветвление интегралов*, Математика **13:4** (1969), 61–93.

[Фо] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б., *Курс гомотопической топологии*, М.: Наука, 1989.

[Хи] Хирцебрух Ф., *Топологические методы в алгебраической геометрии*, М.: Мир, 1973.

[Хь] Хьюзмоллер Д., *Расслоенные пространства*, М.: Мир, 1970.

[Чж] Чжень Шэн–Шень, *Комплексные многообразия*, М.: ИЛ, 1961.

[Ad] Adachi M., *Embeddings and immersions*, AMS, 1993.

[Al1] Alexander J. W., *A proof of the invariance of certain constants of analysis situs*, Trans. Amer. Math. Soc. **16** (1915), 148–154.

[Al2] Alexander J. W., *A proof and extension of the Jordan–Brouwer separation theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), 333–349.

[Ap] Apéry F., *La surface de Boy*, Advan. Math. **61** (1986), 185–266.

[Ar] Arf C., *Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Characteristik 2*, J. Reine Angew. Math. **183** (1941), 148–167.

[Az] Aznar V. N., *On the Chern classes and the Euler characteristic for nonsingular complete intersections*, Proc. Amer. Math. Soc **78** (1980), 143–148.

[Ba] Barrat M. G., Milnor J., *An example of anomalous of singular homology*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 293–297.

[Br] Brown R., *Locally flat embeddings of topological manifolds*. Ann. Math. **75** (1962), 331-341.

[Ch] Chen B.-Y., Ogiue K. *Some implications of the Euler–Poincaré characteristic for complete intersection manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 1–8.

[Co1] Connelly R., *A new proof of Brown's collaring theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **27** (1971), 180–182.

[Co2] Conway J. H., *An enumeration of knots and links, and some of their properties*, в книге *Comput. problems in abstract algebra*, Pergamon Press, NY, (1970), 229–244.

[Cu] Curtis M. L., Dugundji J. *A proof of de Rham's theorem*, Fund. Math. **68** (1970), 265–268.

[De] Debrunner H. E., *Helly type theorems derived from basic singular homology*, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 375–380.

[Do] Dold A., *A simple proof of the Jordan–Alexander complement theorem*, Amer. Math. Monthly **100** (1993), 856–857.

[Ei1] Eilenberg S., *Cohomology and continuous mappings*, Ann. Math. **41** (1940), 231–251.

[Ei2] Eilenberg S., MacLane S., *Relations between homology and homotopy grours of spaces*, I, II, Ann. Math. **46** (1945), 480–509, Ann. Math. **51** (1950), 514–533.

[Ei3] Eilenberg S., MacLane S., *Acyclic models*, Amer. J. Math. **75** (1953), 189–199.

[Ei4] Eilenberg S., MacLane S., *On the groups $H(\pi, n)$*, I, II, III, Ann. Math. **58** (1953), 55–106, Ann. Math. **60** (1954), 49–139, 513–557.

[Ei5] Eilenberg S., Zilber J. A., *On products of complexes* Amer. J. Math. **75** (1953), 200–204.

[F] Floyd E. E., *On periodic maps and the Euler characteristics of associated spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 138–147.

[Gr1] Greenberg M., *Lectures on algebraic topology*, N-Y: W. A. Benjamin, Inc., 1967.

[Gr2] Greub W., Halperin S., Vanstone R., *Connections, curvature, and cohomology*, v. I (De Rham cohomology of manifolds and vector bundles), N-Y: Academic Press, 1972.

[Gr3] Greub W., Halperin S., Vanstone R., *Connections, curvature, and cohomology*, v. II (Lie groups, principal bundles, and characteristic classes), N-Y: Academic Press, 1973.

[Gr4] Gromov M., *Volume and bounded cohomology*, Publ. Math. IHES **56** (1982), 5–100.

[Gy] Gysin W., *Zur Homologie Theorie des Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten*, Comm. Math. Helv. **14** (1941), 61–121.

[Ha] Hatcher A., *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, 2002.

[He1] Helly E., *Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten*, Jber. Deutsch. Math. Verein. **32** (1923), 175–176.

[He2] Helly E., *Über Systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten*, Monatsh. Math. und Physik **37** (1930), 281–302.

[Hi1] Hilton P. J., Stammbach U., *A course in homological algebra*, N.Y. e.a.: Springer, 1971.

[Hi2] Hirzebruch F., *Division algebras and topology*, в книге *Numbers*, Springer, 1991.

[Hi3] Hirzebruch F., Mayer K. H., *O(n)-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphäre und Singularitäten*, Lecture Notes in Mathematics, **57**, Springer, 1968.

[Ho1] Hopf H., *Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen*, Math. Ann. **95** (1925/26), 340–367.

[Ho2] Hopf H., *Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeit*, Math. Ann. **96** (1926/27), 225–250.

[Ho3] Hopf H., *A new proof of Lefschetz formula on invariant points*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **14** (1928), 149–153.

[Ho4] Hopf H., *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Math. Ann. **104** (1931), 639–665.

[Ho5] Hopf H., *Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen Polyeder auf die n-dimensionalen Sphäre*, Comment. Math. Helv. **5** (1933), 39–54.

[Ho6] Hopf H., *Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedriger Dimensionen*, Fund. Math. **25** (1935), 427–440.

[Ho7] Hopf H., *Über die Topologie der Gruppen–Mannigfaltigleiten und Ihre Verallgemeinerungen*, Ann. Math. **13** (1940), 22-52.

[Ho8] Hopf H., *Ein topologischer Beitrag zur reelen Algebra*, Comment. Math. Helv. **13** (1941), 219–239.

[Hu] Hurewicz W., *Homotopie– und Homologiegruppen*, Proc. Akad. Wettensch., Amsterdam **38** (1935), 521–528.

[Ka1] Kane R. M., *The homology of Hopf spaces*, Norh-Holland, Amsterdam, 1988.

[Ka2] Kauffman L. H., *The Conway polynomial*, Topology **20** (1981), 101–108.

[Ke1] Kervaire M. A., Milnor J. W, *On 2-spheres in 4-manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **47** (1961), 1651–1657.

[Ke2] Kervaire M. A., Milnor J. W, *Groups of homotopy spheres: I*, Ann. Math. **77** (1963), 504–537.

[Ku1] Künneth H., *Über die Bettische Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit*, Math. Ann. **90** (1923), 65–85.

[Ku2] Künneth H., *Über die Torsionzahlen von Produktmannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **91** (1924), 125–134.

[La] Lai H.-F., *On the topology of the even-dimensional complex quadrics*, Proc. Amer. Math. Soc. **46** (1974), 419–425.

[Le1] Lefschetz S., *Intersections and transformations of complexes and manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **28** (1926), 1–49.

[Le2] Lefschetz S., *Topology*, N.Y., 1930.

[Le3] Levine J., *An algebraic classification of some knots of codimension two*, Comment. Math. Helv. **45** (1970), 185-198.

[Li1] Libgober A., *Alexander polynomial of plane algebraic curves and cyclic multiple planes*, Duke Math. J. **49** (1982), 833–851.

[Li2] Lickorish W. B., *An introduction to knot theory*, Springer, 1997.

[Ma] Mayer W., *Über abstrakte Topologie*, Monatshefte für Math. und Physik **36** (1929), 1–42, 219–258.

[Me] Meyerson M. D., *Representing homology classes of closed orientable surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **61** (1976), 181–182.

[Mi1] Milnor J. W., *On the immersions of n-manifolds in $(n+1)$-space*, Comment. Math. Helv. **30** (1956), 275–284.

[Mi2] Milnor J. W., *On simply connected 4-manifolds*, Sympos. Int. Topologia Algebraica, México, 1958, 122-128.

[Mi3] Milnor J. W., *A procedure for killing the homotopy groups of differentiable manifolds*, Sympos. in Pure Math., Amer. Math. Soc., **3**, 1961, 39–55.

[Mi4] Milnor J. W., *Microbundles I*, Topology **3**, suppl. **1**, (1964), 53–81.

[Mi5] Mimura M., Toda H., *Topology of Lie groups*, AMS, 1991.

[Mu1] Munkholm H. J., *Simplices of maximal volume in hyperbolic space, Gromov's norm, and Gromov's proof of Mostow's rigidity theorem (following Thurston)*, Lecture Notes Math. **788** (1980), 109–124.

[Mu2] Munkres J. R., *Elements of algebraic topology*, Addison–Wesley, 1984.

[N] Noether E., *Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie*, Jahresbericht Deutschen Math. Verein. **34** (1926), 104.

[Ol] Olum P., *Non-abelian cohomology and van Kampen's theorem*, Ann. Math. **68** (1958), 658–668.

[Pi] Pitcher E., *Inequalities of critical point theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 1–30.

[Po] Polombo A., *Classes de Chern*, Astérisque **58** (1978), 51-75.

[Rh] De Rham. G., *Sur l'analysis situs des variétés a n dimension*, J. Math. Pures et Appl. (ser. 9) **10** (1931), 115-120

[Ro1] Robertson S. A., *On transnormal manifolds*, Topology **6** (1967), 117–123.

[Ro2] Rotman J. J., *An introduction to algebraic topology*, Springer, 1988.

[Sa1] Samelson H., *On Poincaré duality*, J. Anal. Math. **14** (1965), 323–336.

[Sa2] Samelson H., *On de Rham's theorem*, Topology **6** (1967), 427-432.

[Sc] Schön R., *Acyclic models and excision*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1976), 167–168.

[Se] Serre J.-P., *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eulenberg–MacLane*, Comment. Math. Helv. **27** (1953), 198– 232.

[Sh1] Shapiro D. B., *Composition of quadratic forms*, Berlin, N.Y.: Walter de Gruyter, 2000.

[Sh2] Shih M.-H., *A combinatorial Lefschetz fixed-point formula*, J. Combinatorial Theory A **61** (1992), 123–129.

[Si] Singer I., Thorpe J., *Lectures on elementary topology and geometry*, Scott–Foresman Co, Glenview (1967).

[Sm] Smith P. A., *Transformations of finite period, I.*, Ann. Math. **39** (1938), 127–164.

[St1] Staples E. B., *A short and elementary proof that a product of spheres is parallelizable if one of them is odd*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 570–571.

[St2] Steenrod N. E., *Products of cocycles and extension of mappings*, Ann. Math. **48** (1947), 290–320.

[St3] Steenrod N. E., *Homology groups of symmetric groups and reduced power operations*, Proc. Nat. Acad. Sci. **39** (1953), 213–223.

[St4] Steenrod N. E., *Cohomology operation derived from symmetric group*, Comm. Math. Helv. **31** (1957), 195–218.

[St5] Stiefel E., *Richtungsfelder und Fernparallelismus in Mannigfaltigkeit*, Comm. Math. Helv. **8** (1936), 3–51.

[St6] Stiefel E., *Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen*, Comm. Math. Helv. **13** (1941), 201–218.

[Su] Sullivan D., *Infinitesimal computations in topology*, Publ. Math. IHES **47** (1977), 269–332.

[Th1] Thom R., *Espaces fibrés en spheres et carrés de Steenrod*, Ann. Sci. École Norm. Super. **69** (1952), 109–181.

[Th2] Thom R., *Les classes charactéristiques de Pontryagin des variétés triangulées*, Sympos. Int. Topologia Algebraica, México, 1958, 54–67.

[Th3] Thurston W., *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton, 1978.

[Vi1] Vick J. W., *Homology theory*, N.Y.: Academic Press, 1973.

[Vi2] Vietoris L., *Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe*, Monatshefte für Math. und Physik **37** (1930), 159–162.

[Wa1] Wadler Ph. L., *On pairs of nonintersecting faces of cell complexes*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975), 438–440.

[Wa2] Wang H. C., *The homology groups of the fibre-bundles over a sphere*, Duke Math. J. **16** (1949), 33–38.

[We1] Weibel Ch. A., *History of homological algebra*, в книге James I. M. (ed.) *History of topology*, Amsterdam: Elsevier (1999) 797–836.

[We2] Weil A., *Sur les theorems de de Rham*, Comment. Math. Helv. **26** (1952), 119–145.

[We3] Weinberger Sh., *Olver's formula and Minkowski's theorem*, Lecture Notes Math. **1126** (1985), 420–421.

[Wh2] Whitney H., *Sphere spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **21** (1935), 462–468.

[Wh3] Whitney H., *The maps of an n-complex into an n-sphere*, Duke Math. J. **3** (1937), 51–55.

[Wh4] Whitney H., *The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space*, Ann. Math. **45** (1944), 220-246.

[Wh5] Whitney H., *The self-intersections of a smooth n-manifold in $(2n+1)$-space*, Ann. Math. **45** (1944), 247–293.

[Wu] Wu Wen-Tsün, *Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété*, C. R. Acad. Sci. **230** (1950), 508–511.

Предметный указатель